

Логическое следование формул алгебры предикатов

С помощью логического следования формул определяются общие способы доказательства взаимосвязи между истинностными значениями утверждений посредством исследования формальной структуры этих утверждений.

Определение. Формула Φ алгебры предикатов называется *логическим следствием* формулы Ψ , если $\models \Psi \Rightarrow \Phi$, т.е. в любой интерпретации M формула Φ выполняется при любой оценке предметных переменных α , при которой выполняется формула Ψ .

Определение. Формула Φ называется *логическим следствием множества формул Γ* , если в любой интерпретации M формула Φ выполняется при любой оценке предметных переменных α , при которой выполняются все формулы из Γ .

Такое логическое следствие обозначается $\Gamma \models \Phi$ и называется *логическим следованием*. При этом формулы из Γ называются *посылками* и формула Φ – *следствием* логического следования $\Gamma \models \Phi$.

В случае, когда $\Gamma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}$ записывают $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$.

Определение. Множество формул Γ называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ . Символически это записывается $\Gamma \models$.

Лемма 1 (Критерии логического следования).
Условие $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$ равносильно каждому из следующих условий:

- a) $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \models \Phi$,
- b) $\models \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$,
- c) $\Phi_1, \Box, \Phi_m, \neg \Phi \models$.

В частности, $\Phi \models \Psi$ равносильно $\models \Phi \Rightarrow \Psi$.
Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ равносильно тому, что $\Phi \models \Psi$ и $\Psi \models \Phi$.

Основные правила логического следования:

1) *правило отделения* (или *правило модус поненс* – от латинского *modus ponens*)

$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi;$$

2) *правило модус толленс* (от латинского *modus tollens*)

$$\Phi \Rightarrow \Psi, \neg \Psi \models \neg \Phi;$$

3) *правило контрапозиции*

$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg \Psi \Rightarrow \neg \Phi;$$

4) *правило цепного заключения*

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3.$$

Проблема общезначимости формул алгебры предикатов

Определение истинности формул вводится с помощью их интерпретаций в конкретных допустимых множествах M с первоначально фиксированными предикатными символами этих формул. Так как множество таких интерпретаций бесконечно (они могут иметь как конечные, так и бесконечные области интерпретации), то в этом случае проверить тождественную истинность рассматриваемой формулы на всех таких интерпретациях практически невозможно.

Пример.

Формула

$$\Phi = (\forall x) \neg P(x, x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists x)(\forall y) \neg P(x, y)$$

общезначима в любой конечной интерпретации, но не выполнима в интерпретации $M = N$ с отношением $P_M(x, y) = (x < y)$.

Альтернативный подход к проверке общезначимости формулы Φ основывается на попытке построения интерпретации, опровергающей данную формулу.

Если из предположения существования такой интерпретации получается противоречие, то формула Φ общезначима. В противном случае на основе полученных условий для входящих в формулу Φ предикатов, алгебраических операций и констант строится интерпретация, опровергающая эту формулу Φ , и в этом случае формула Φ не является общезначимой.

Автоматическое доказательство теорем

Существуют алгоритмы поиска доказательства, которые для общезначимых формул подтверждают, что эти формулы общезначимы, и для необщезначимых формул в общем случае не заканчивают свою работу.

Автоматические системы построения доказательств называют *пруверами* и предъявляют им следующие требования:

- 1) корректность,
- 2) полнота,
- 3) эффективность.

Одну из основных систем автоматического поиска доказательства разработали Жак Эрбран, Дж.Робинсон и др. на основе алгоритма поиска интерпретации, опровергающей рассматриваемую формулу. Так как для общезначимых формул опровергающих интерпретаций нет, то такой алгоритм заканчивает работу за конечное число шагов.

Первым шагом алгоритма Эрбрана является приведение рассматриваемой формулы к специальным нормальным формам, которые аналогичны ДНФ и КНФ для формул алгебры высказываний (сокращенно, АВ).

Формула исчисления предикатов Φ находится в *пренексной нормальной форме* (сокращенно ПНФ), если она имеет вид

$$(K_1 x_1) \dots (K_n x_n) \Psi,$$

где $K_1, \dots, K_n$ — некоторые кванторы и Ψ — бескванторная формула, находящейся в КНФ. При этом последовательность кванторов $(K_1 x_1) \dots (K_n x_n)$ называется *кванторной приставкой* и формула Ψ называется *конъюнктивным ядром* формулы Φ .

Теорема 1. Любая формула исчисления предикатов Φ логически равносильна формуле Φ' , находящейся в ПНФ.

Такая формула Φ' называется *пренексной нормальной формой* (сокращенно ПНФ) формулы Φ .

Элиминация кванторов существования

Пусть замкнутая формула исчисления предикатов Φ находится в ПНФ:

$$\Phi = (K_1 x_1) \dots (K_n x_n) \Psi,$$

где $K_1, \dots, K_n$ — некоторые кванторы и $\Psi = \Psi(x_1, \dots, x_n)$ — конъюнктивное ядро формулы Φ , т.е. бескванторная формула со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$, находящаяся в КНФ.

В кванторной приставке формуле Φ можно удалить любой квантор существования $(\exists x_s)$ для $1 \leq s \leq n$ по следующему правилу:

- 1) если левее квантора существования $(\exists x_s)$ в формуле Φ не стоит никакой квантор общности, то выбираем новый предметный символ c , заменяем этим символом c все вхождения переменной x_s в конъюнктивное ядро формулы Φ и вычеркиваем $(\exists x_s)$ из кванторной приставки формулы Φ ;

2) если же левее квантора существования $(\exists x_s)$ стоят кванторы общности

$$(\forall x_{s_1}), \dots, (\forall x_{s_m})$$

для значений $1 \leq s_1 < \dots < s_m < s$, то выбираем новый m -арный функциональный символ f , заменяем все вхождения переменной x_s в конъюнктивное ядро формулы Φ выражением $f(x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$ и вычеркиваем $(\exists x_s)$ из кванторной приставки формулы Φ .

В результате такой замены всех кванторов существования в формуле Φ получим замкнутую ПНФ Φ' , кванторная приставка которой получается из кванторной приставки формулы Φ удалением всех кванторов существования и которая содержит новые символы – функциональные или предметные.

При этом формула Φ выполнима или противоречива одновременно с формулой Φ' .

Рассмотренный прием удаления квантора существования был введен Скулемом и называется *скулемизацией формул*. Вводимые в процессе скулемизации новые функциональные и предметные символы называются *функторами Скулема* или *скулемовскими функциями*.

Полученную в результате скулемизации замкнутую ПНФ Φ' называют *скулемовской стандартной формой* (сокращенно ССФ).

Теорема 2. Любая замкнутая формула исчисления предикатов Φ эффективно преобразуется (с помощью определенного алгоритма) в логически эквивалентную ей скунемовскую стандартную форму Φ' , которая называется *скунемовской стандартной формой* (сокращенно, ССФ) формулы Φ .

При этом формула Φ выполнима или противоречива одновременно с ее ССФ.

Пример. Как показано в предыдущем примере, замкнутая формула

$$\Phi = (\forall y)(\exists x)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)Q(x, y)$$

имеет ПНФ

$$(\exists y)(\forall x)(\forall z)(\neg P(x, y) \vee Q(z, y)),$$

результатом скулемизации которой является формула

$$\Phi' = (\forall x)(\forall z)(\neg P(x, c) \vee Q(z, c))$$

с новым предметным символом c .

Формула Φ' является ССФ формулы Φ .

Метод Эрбрана

Правило 1. Противоречивость замкнутой формулы алгебры предикатов Φ равносильна противоречивости ее скулемовской стандартной формы Φ' , которая является универсально замкнутой формулой

$$\Phi' = (\forall_{i_1} x_{i_1}) \dots (\forall_{i_k} x_{i_k}) \Psi$$

с конъюнктивным ядром $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$, где $D_1, \dots, D_m$ – некоторые дизъюнкты литер алгебры предикатов.

С другой стороны, универсально замкнутая формула Φ' противоречива в том и только том случае, если она невыполнима.

Доказательство невыполнимости формулы Φ' сводится к доказательству невыполнимости множества дизъюнктов

$$S = \{D_1, \dots, D_m\}.$$

Эрбран показал, что *при доказательстве невыполнимости такого множества формул S можно ограничиться рассмотрением интерпретаций в одной специальной области интерпретации, которая называется эрбрановским универсумом.*

Правило **2.** **Доказательство**
противоречивости формул алгебры предикатов
сводится к доказательству противоречивости
конечных множеств дизъюнктов S .

Для этого строится резолютивный вывод 0
из множества дизъюнктов S .

Унификаторы формул

Элементы области интерпретации могут описываться не только с помощью предметных переменных, но и с помощью так называемых *термов* – специальных выражений языка, которые индуктивно определяются следующим образом:

а) все предметные переменные и предметные символы формулы являются термами,

б) если f – n -арный функциональный символ формулы и $t_1, \dots, t_n$ – термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ является термом.

Пусть S — множество формул алгебры предикатов.

Обозначим X_S, C_S и F_S соответственно множества всех предметных переменных, предметных символов и функциональных символов, встречающихся в формулах множества S . Пусть A_S — объединение множеств X_S и C_S с добавленным новым постоянным символом a , если $C_S = \emptyset$.

На множестве A_S определяется множество всех термов T_S множества S с функциональными символами из множества F_S . В частности, каждая переменная $x \in X_S$ является термом из множества T_S и, значит, $X_S \subset T_S$.

Отображения θ множества переменных X_S в множество термов T_S называются *подстановками* и обозначаются

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

где $t_i = \theta(x_i)$ для всех $x_i \in \text{supp}\theta$, удовлетворяющих $\theta(x_i) \neq x_i$ ($i = \overline{1, n}$).

Действие подстановки θ естественно продолжается на термы из T_S , атомарные формулы, встречающихся в формулах множества S , и дизъюнкты из S .

Например, для терма $t = t(x_1, \dots, x_n)$ значение $\theta(t) = t(\theta(x_1), \dots, \theta(x_n))$.

Аналогично, для формулы D значение $\theta(D)$ – есть формула, полученная заменой всех вхождений в D термов t на термы $\theta(t)$.

Пусть $W = \{\Phi_1, \dots, \Phi_k\}$ – множество атомарных формул, встречающихся в формулах из множества S . Подстановка θ называется *унификатором множества формул W* , если

$$\theta(\Phi_1) = \dots = \theta(\Phi_k).$$

Говорят, что множество атомарных формул W *унифицируемо*, если для него существует унификатор.