

Доказательство неравенств методом математической индукции

Что такое принцип математической индукции?

Вообразим очередь, где первой стоит женщина, за ней снова женщина, а за ней снова женщина. Верно ли, что все стоящие в очереди — женщины?

Конечно, верно! Раз первые три человека в очереди — женщины, то, скорее всего, это очередь за косметикой, или за чем-нибудь таким, в чём нуждаются и разбираются исключительно женщины, и мужчин в этой очереди нет.

Пусть подобные рассуждения иногда оправдывают себя на практике, они не являются математически строгими и никак не связаны с методом математической индукции, о котором мы сегодня хотим поговорить.

Рассмотрим два утверждения:

1. Первый человек в очереди есть женщина.
2. За женщиной в очереди может стоять только женщина.

Из этих двух утверждений строго следует, что в очереди стоят только женщины. Мы можем последовательными шагами показать что любой человек в очереди — женщина.

Вот строгая формулировка принципа математической индукции:

Пусть имеется последовательность утверждений И пусть первое утверждение верно и мы умеем доказать, что из верности утверждения следует верность . Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

Докажем неравенство:

Пример 1:

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{2n+n} \geq \frac{11}{30},$$

где $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В случае $n = 2$ имеем $\frac{11}{30} \geq \frac{11}{30}$.

Предположим, что данное неравенство справедливо при $n = k$, т. е.

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \dots + \frac{1}{2k+k} \geq \frac{11}{30}. \quad (7.1)$$

Покажем, что данное неравенство справедливо также в случае $n = k + 1$.

При $n = k + 1$ неравенство принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2(k+1)+1} + \frac{1}{2(k+1)+2} + \dots + \frac{1}{2(k+1)+(k+1)} \geq \frac{11}{30}.$$

Прибавляя к обеим сторонам (7.1) выражение

$$\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2},$$

получим

$$\frac{1}{2k+3} + \dots + \frac{1}{3k+3} \geq \frac{11}{30} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}.$$

Так как $\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$ (упр. 1.19), то

$$\frac{1}{2k+3} + \dots + \frac{1}{3k+3} \geq \frac{11}{30}.$$

Таким образом, оба условия метода математической индукции удовлетворены. Следовательно, данное неравенство справедливо для натуральных значений n ($n > 1$).

Пример 2:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1, \quad (7.2)$$

где $n = 2, 3, \dots$

Доказательство. Если это неравенство попытаться доказать аналогично примеру 7.1, то это нам не удастся. Как при доказательстве этого неравенств, так и при доказательстве некоторых других неравенств метод математической индукции целесообразно применить к другому неравенству (строгому или расширенному), из которого следует справедливость данного неравенства.

Для доказательства данного неравенства докажем неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}, \quad (7.3)$$

из которого следует справедливость (7.2).

При $n = 2$ получим следующее правильное неравенство: $\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$.

Предположим, что неравенство (7.3) справедливо при $n = k$ ($k \geq 2$), и покажем, что оно справедливо в случае $n = k + 1$. При $n = k$ имеем неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k}.$$

Прибавив к обеим частям этого неравенства $\frac{1}{(k+1)^2}$, получим неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Так как $1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1}$, то имеет место неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k+1};$$

последнее совпадает с рассматриваемым неравенством в случае $n = k + 1$, следовательно, данное неравенство справедливо для всех натуральных значений n , которые не меньше 2.

Часто встречаются неравенства, при доказательстве которых метод математической индукции применяется в несколько ином виде:

а) доказывается справедливость данного неравенства для натуральных значений n , равных $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$;

б) из справедливости данного неравенства при произвольном $n = k$ ($k \geq 2$) следует, что оно справедливо при $n = k - 1$.

Пример 3:

$$\frac{x_1 \dots x_n}{(x_1 + \dots + x_n)^n} \leq \frac{(1 - x_1) \dots (1 - x_n)}{((1 - x_1) + \dots + (1 - x_n))^n},$$

где $0 < x_i \leq \frac{1}{2}$ ($i = 1, \dots, n$).

Доказательство. Сначала докажем неравенство для значений n , равных $2, 4, 8, 16, \dots, 2^k, \dots$

При $n = 2$ имеем справедливое неравенство

$$\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} \leq \frac{(1 - x_1)(1 - x_2)}{((1 - x_1) + (1 - x_2))^2}$$

(упр. 1.20).

Предположим, что в случае $n = 2^k$ данное неравенство справедливо. Докажем его справедливость при $n = 2^{k+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 x_2 \dots x_p x_{p+1} \dots x_{2p}}{(x_1 + \dots + x_p + x_{p+1} + \dots + x_{2p})^{2p}} = \\ & = \frac{x_1 \dots x_p}{(x_1 + \dots + x_p)^p} \frac{x_{p+1} \dots x_{2p}}{(x_{p+1} + \dots + x_{2p})^p} \times \\ & \times \frac{(x_1 + \dots + x_p)^p (x_{p+1} + \dots + x_{2p})^p}{(x_1 + \dots + x_{2p})^{2p}} \leq \frac{(1 - x_1) \dots (1 - x_p)}{((1 - x_1) + \dots + (1 - x_p))^p} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(1 - x_{p+1}) \dots (1 - x_{2p})}{((1 - x_{p+1}) + \dots + (1 - x_{2p}))^p} \left(\frac{\frac{x_1 + \dots + x_p}{p} \frac{x_{p+1} + \dots + x_{2p}}{p}}{\left(\frac{x_1 + \dots + x_p}{p} + \frac{x_{p+1} + \dots + x_{2p}}{p} \right)^2} \right)^p \leq \\
& \leq \frac{(1 - x_1) \dots (1 - x_{2p})}{((1 - x_1) + \dots + (1 - x_p))^p ((1 - x_{p+1}) + \dots + (1 - x_{2p}))^p} \times \\
& \times \left(\frac{\left(1 - \frac{x_1 + \dots + x_p}{p} \right) \left(1 - \frac{x_{p+1} + \dots + x_{2p}}{p} \right)}{\left(\left(1 - \frac{x_1 + \dots + x_p}{p} \right) + \left(1 - \frac{x_{p+1} + \dots + x_{2p}}{p} \right) \right)^2} \right)^p = \\
& = \frac{(1 - x_1) \dots (1 - x_{2p})}{((1 - x_1) + \dots + (1 - x_{2p}))^{2p}},
\end{aligned}$$

где $p = 2^k$. Таким образом, получили неравенство

$$\frac{x_1 \dots x_{2p}}{(x_1 + \dots + x_{2p})^{2p}} \leq \frac{(1 - x_1) \dots (1 - x_{2p})}{((1 - x_1) + \dots + (1 - x_{2p}))^{2p}},$$

следовательно, в случае $n = 2^t$ данное неравенство доказано. Теперь докажем, что если данное неравенство справедливо для m , то оно выполняется также в случае $m - 1$, где $m \geq 2$. Имеем

$$\frac{x_1 \dots x_m}{(x_1 + \dots + x_m)^m} \leq \frac{(1 - x_1) \dots (1 - x_m)}{((1 - x_1) + \dots + (1 - x_m))^m}.$$