Тема №1

Закон Кулона
Напряженность электрического поля

Задача 1 Задача 3 Задача 2

Задача 4

Задача 5

Задача 6

Задача 7

Задача 8

Теоретическое введение

Закон Кулона

Напряженность электрического поля

По закону Кулона сила, действующая между двумя заряженными телами, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними, определяется формулой:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где q_1 и q_2 – электрические заряды тел,

r – расстояние между ними,

ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды,

ε_0 – электрическая постоянная, равная в СИ $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м.*

Напряженность электрического поля определяется формулой

$$E = \frac{F}{q},$$

где F – сила, действующая на заряд q.

Напряженность поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Напряженность электрического поля от нескольких зарядов находится по правилу геометрических сложений полей.

По теореме Гаусса поток напряженности сквозь любую замкнутую поверхность

$$N_E = \frac{\Sigma q}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

где Σq – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

При помощи теоремы Гаусса можно найти напряженность электрического поля, образованного различными заряженными телами.

Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно длинной нитью

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a},$$

где τ – линейная плотность заряда на нити,

a – расстояние от нити.

Если нить имеет конечную длину, то напряженность поля в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из середины нити на расстоянии a от нее равна:

$$E = \frac{r\sin\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a},$$

где θ – угол между направлением нормали к нити и радиус-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концу нити.

Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно протяженной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда на плоскости.

Если плоскость представляет собой диск радиусом R, то напряженность поля в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из центра диска на расстоянии a от нее,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}\right).$$

Напряженность поля, образованного разноименно заряженными бесконечными плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, образованного заряженным шаром

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где q – заряд шара радиусом R,
r – расстояние от центра шара, причем $r>R$.

Задача 1

В вершинах правильного шестиугольника расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найти напряженность Е электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях в расположении этих зарядов. Каждый заряд 1,5 нКл, сторона шестиугольника 3 см.

Задача 1

Дано:

$N_+ = 3$

$N_- = 3$

$q_1 = q_2 = q_3 = 1{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл

$q_4 = q_5 = q_6 = -1{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл

$a = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м

$k = 9 10^9$ Н·м²/Кл²

$E_{рез}$ - ?

Решение:

3 варианта расположения

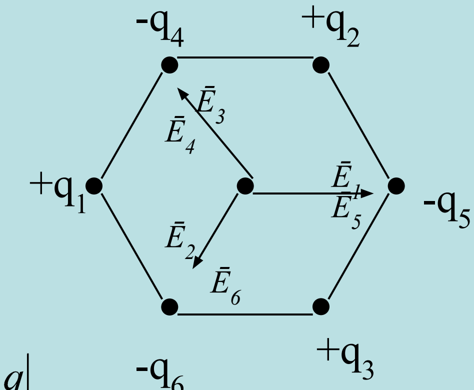
а) $\bar{E}_{рез} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \bar{E}_4 + \bar{E}_5 + \bar{E}_6$ (1)

$2\alpha = 120°$

$\bar{E}_{рез} = 2\bar{E}_1 + 2\bar{E}_2 + 2\bar{E}_3$ (2)

$$k\frac{2 \cdot 2|q|\cos 60°}{a^2} = k\frac{2|q|}{a^2}$$

$E_{рез} = -2E_3 + k\dfrac{2|q|}{a^2}$ Т.к. $E_3 = \dfrac{k|q|}{a^2}$ то $E_{рез} = 0$



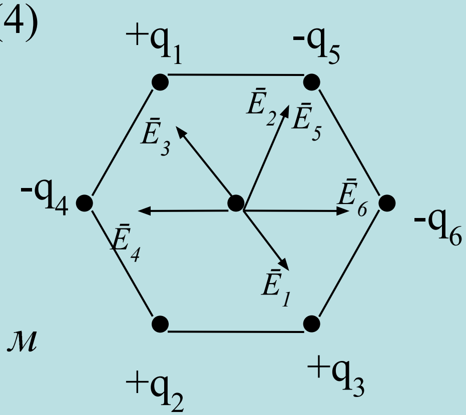
б) $E_{рез} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \bar{E}_4 + \bar{E}_5 + \bar{E}_6$ (3)

$E_{рез} = E_2 + E_5 = 2E_2$ (4)

$E_2 = \dfrac{k|q|}{a^2}$ (5)

Подставим (5) в (4)

$$\bar{E}_{рез} = \frac{k|q|}{a^2} = 30кВт/м$$



в)

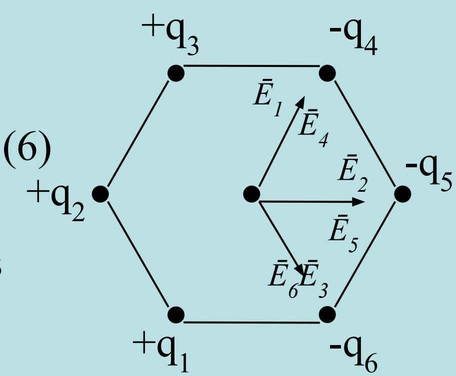
$\bar{E}_{рез} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \bar{E}_4 + \bar{E}_5 + \bar{E}_6$ (6)

$\bar{E}_1 \uparrow\uparrow \bar{E}_4, \bar{E}_2 \uparrow\uparrow \bar{E}_5, \bar{E}_3 \uparrow\uparrow \bar{E}_6$

$\bar{E}_{рез} = 2\bar{E}_1 + 2\bar{E}_2 + 2\bar{E}_3$

$$E_{рез} = k\frac{2q}{a^2} + k\frac{2q}{a^2}\cos 60° + k\frac{2q}{a^2}\cos 60°$$

$$E_{рез} = k\frac{4|q|}{a^2} = 60кВ/м$$



Ответ:

напряженность в центре шестиугольника при трех вариантах расположения зарядов равна E=0; E=30 кВ/м; E=60 кВ/м, соответственно.

Задача 2

Два точечных заряда q_1=7нКл, q_2=–14.7 нКл расположены на расстоянии r=5 см. Найти напряженность E электростатического поля в точке, находящейся на расстоянии a=3 см от положительного заряда и b=4 см от отрицательного заряда.

Задача 2

Дано:

$q_1=7{,}5\cdot10^{-9}$ *Кл*

$q_2=-14{,}7\cdot10^{-9}$ *Кл*

$r=5\cdot10^{-2}$ *м*

$a=3\cdot10^{-2}$ *м*

$b=4\cdot10^{-2}$ *м*

$\pi=3{,}14$

$\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ *Ф/м*

$E_A=?$

Решение:

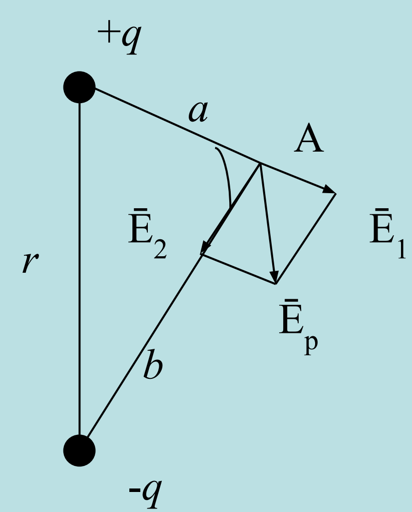
Теор. косинусов

$$E_A=\sqrt{E_1^{\ 2}+E_2^{\ 2}-2E_1E_2\cos\alpha} \quad (1)$$

$$E_1=\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2} \qquad E_2=\frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 b^2} \quad (2)$$

$$r^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-r^2}{2ab} \quad (3)$$



$$E_A=\sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{q_1^{\ 2}}{a^4}+\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{q_2^{\ 2}}{b^4}-2\frac{|q_1||q_2|}{16\pi^2\varepsilon_0 a^2b^2}\cdot\frac{a^2+b^2-r^2}{2ab}}=111{,}6\cdot10^3\,(В/м)$$

Ответ: напряженность электрического поля в точке *A* равна *E*=111,6 кВ/м

Задача 3

Два шарика одинаковых радиусов и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд Q нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной T=98 мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса l=10 см, масса каждого шарика m=5г.

Задача 3

Дано:

$r_1=r_2=r$

$m_1=m_2=5\cdot 10^{-3}$ *кг*

$T=98\cdot 10^{-3}$ *Н*

$L=10^{-1}$ *м*

$\varepsilon=1$

$k=9\cdot 10^{9}$ *Н · м²/Кл²*

q - ?

Решение:

$$F=\frac{kq^2}{4r^2} \qquad (1)$$

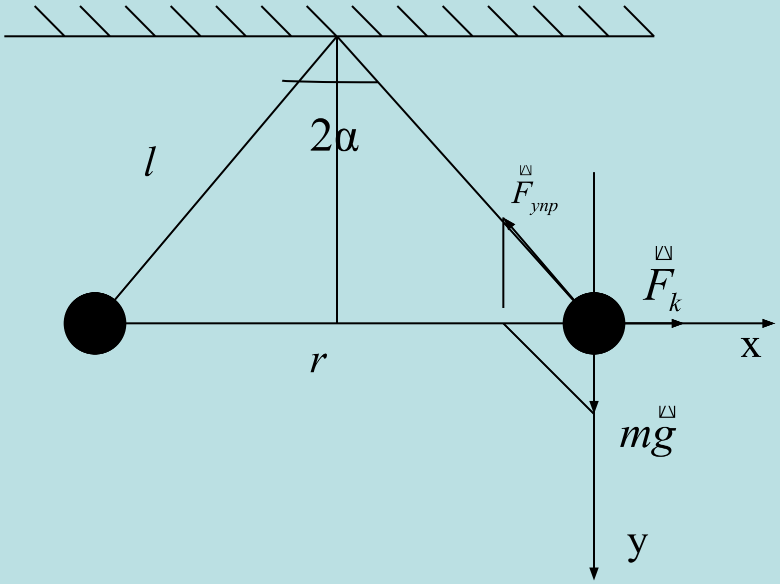
$$m\vec{g}+\vec{F}_{упр}+\vec{F}_k=0$$

$$Ox: F_к - F_{упр}\sin\alpha=0$$

$$Oy: -F_{упр}\cos\alpha+mg=0$$

$$F_К=F_{упр}\sin\alpha \qquad (2)$$

$$mg=F_{упр}\cos\alpha \qquad (3)$$



$$\cos\alpha=\frac{mg}{T}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left[\frac{mg}{T}\right]^2} \qquad (4)$$

$$\sin\alpha=\frac{r}{2l}\Rightarrow r^2=r^2l^2\sin\alpha \qquad (5)$$

Подставим формулы (1), (4), (5) в (2), получаем

$$\frac{kq^2}{16l^2\sin^2\alpha}=T\sin\alpha$$

$$q=\sqrt{\frac{16l^2T}{k}}\sqrt{\left(1-\left(\frac{mg}{T}\right)^2\right)^3}=1{,}1\cdot 10^{-6}(Кл)$$

Ответ: чтобы сила натяжения нитей была равна 98 мН нужно сообщить шарикам заряд который равен 1,1 мкКл.

Задача 4

Два заряженных шарика одинаковых радиусов и массы подвешены на нитях одинаковой длины и опущены в жидкий диэлектрик, плотность которого равна ρ, а диэлектрическая проницаемость равна ε. Какова должна быть плотность материала шариков ρ_0, чтобы углы расхождения нитей в воздухе и в диэлектрике были одинаковы?

Задача 4

Дано:

$m_1 = m_2 = m$

l

ρ

ε

ρ_0 - ?

Решение:

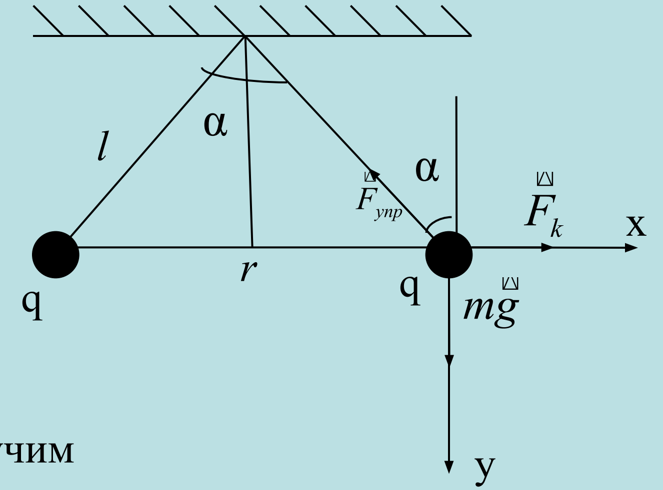
1) В воздухе (ε=1) $\quad m\vec{g} + \vec{F}_{упр} + \vec{F}_k = 0$

$$Ox: F_K - F_{упр}\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_K = F_{упр}\sin\alpha \qquad (1)$$

$$Oy: -F_{упр}\cos\alpha + mg = 0 \Rightarrow mg = F_{упр}\cos\alpha \qquad (2)$$

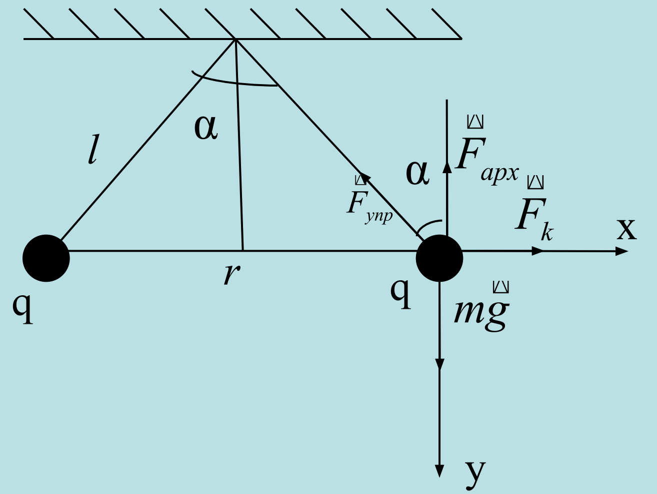
$$F_к = mgtg\alpha \Rightarrow \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mgtg\alpha \qquad (3)$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{2l}$$ (4). Подставим (3) в (4), получим



$$mg = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\alpha tg\alpha} \qquad (5)$$

2) В жидком диэлектрике $\quad m\vec{g} + \vec{F}_{упр} + \vec{F}_k + \vec{F}_{арх} = 0$



$$Ox: F_K - F_{упр}\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_K = F_{упр}\sin\alpha \qquad (6)$$

$$Oy: -F_{упр}\cos\alpha + mg + F_{арх} = 0 \Rightarrow mg - F_{арх} = F_{упр}\cos\alpha \qquad (7)$$

Поделим почленно (6) на (7) получим

$$mg - F_{арх} = \frac{F_K}{tg\alpha} \qquad (8)$$

$$F_{арх} = \rho g V \qquad (10)$$

$$mg - F_{арх} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2\sin^2\alpha tg\alpha} \qquad (9)$$

Из (5), (9), (10) имеем

$$\frac{mg - F_{арх}}{mg} = \frac{\rho_0 gV - \rho gV}{\rho_0 gV} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{\sin^2\alpha tg\alpha q^2 4\pi\varepsilon_0 4l^2}{\varepsilon\sin^2\alpha tg\alpha q^2 4\pi\varepsilon_0 4l^2}$$

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \rho_0 = \frac{\rho\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

Ответ:

Плотность материала шарика должна быть получена из формулы $\rho_0 = \dfrac{\rho\varepsilon}{\varepsilon - 1}$

Задача 5

На рисунке АА′ — заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда 40 мкКл/м^2 и В — одноименно заряженный шарик с массой 1г и зарядом 1нКл. Какой угол с плоскостью АА′ образует нить, на которой висит шарик?

Задача 5

Дано:

$\sigma = 40 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2

$m = 0{,}001$ кг

$q = 10^{-9}$ Кл

$\varepsilon = 1$

$g = 9{,}8$ м/с^2

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

α - ?

Решение:

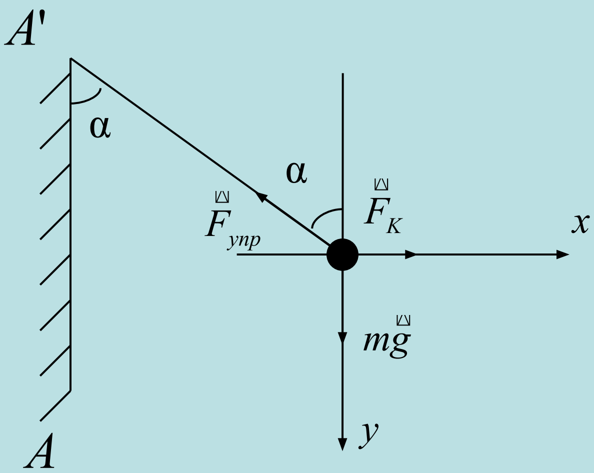
$$F_к = \frac{kq^2}{r^2} \qquad \vec{mg} + \vec{F}_{упр} + \vec{F}_K = 0$$

$$Ox: F_K - F_{упр} \sin\alpha = 0$$

$$Oy: -F_{упр} \cos\alpha + mg = 0$$

$$F_K = F_{упр} \sin\alpha \quad (1)$$

$$mg = F_{упр} \cos\alpha \quad (2)$$



Разделим почленно (1) на (2) получим

$$tg\alpha = \frac{F_K}{mg} \quad (3) \qquad \text{По опр.} \quad F_K = qE \quad (4)$$

Напряженность бесконечной плоскости $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (5)

Подставим (5) в (4)

$$F_K = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), получаем

$$tg\alpha = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg}$$

$$\alpha = arctg\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg} \approx 13^\circ$$

Ответ: угол, который образует нить с плоскостью, равен α=13°

Задача 6

С какой силой F_l на единицу длины отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные нити с одинаковой линейной плотностью заряда 3 мкКл/м, находящиеся на расстоянии r_1=2 см друг от друга? Какую работу на единицу длины надо совершить, чтобы сдвинуть эти нити до расстояния r_2=1 см.?

Задача 6

Дано:

$\tau_1 = \tau_2 = 3\cdot 10^{-6}$ Кл/м

$r_1 = 2\cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 10^{-2}$ м

$\varepsilon = 1$

$\varepsilon = 8{,}86\cdot 10^{-12}$ Ф/м

F_1-?, A_1-?

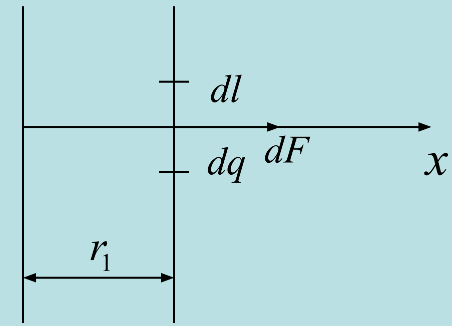
Решение:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_1} \qquad (1)$$

а) $$dF = E\cdot dq \qquad (2)$$

$$\tau = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \tau dl \qquad (3)$$

где dl – длина физически бесконечно малого отрезка нити



$$F = \frac{\tau^2 l}{2\pi\varepsilon_0 r_1}$$

$$\frac{F}{l} = \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0 r_1} \qquad (1')$$

F=8 (*Н/м*)

б) $$dF = \frac{\tau^2 dl}{2\pi\varepsilon_0 x} \qquad (4)$$

$$dA_l = F_l dx \qquad (5)$$

$$A_l = \int_{x_1}^{x_2} F_l dx \qquad (6)$$

$$A_l = x2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{x} = \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x} = \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln x\right] = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x_1}{x_2}$$

$A = 0{,}112$ *(Дж/м)*

Ответ: две одноименно заряженные бесконечно длинные нити отталкиваются с силой F=8,1 *Н/м*, приходящиеся на единицу длины; чтобы сдвинуть эти две нити на 1 см, надо совершить работу A_l = 0,112 Дж/м, приходящуюся на единицу их длины.

Задача 7

В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля E=60кВ/м. Заряд капли q= $2{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{СГС}_q$. Найти радиус R капли.

Задача 7

Дано:

$E = 6 \cdot 10^4$ В/м

$q = 8 \cdot 10^{-19}$ Кл

$\rho = 13{,}6 \cdot 103$ кг/м^3

$g = 9{,}8$ м/с^2

$\varepsilon = 1$

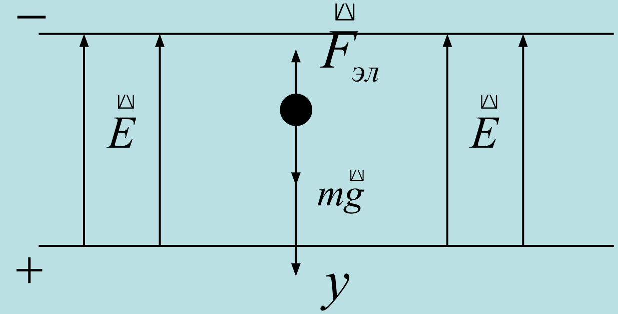
R-?

Решение:

$$\vec{F}_{эл} + m\vec{g} = 0 \qquad (1)$$

$$Oy: mg - F_{эл} = 0 \Rightarrow mg = F_{эл} \qquad (2)$$

По определению $\quad F_{эл} = Eq$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (3)$$

$$\frac{4}{3}\rho\pi R^3 g = Eq$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3qE}{4\pi\rho g}}$$

$R = 1 \cdot 10^{-3}$

Ответ: радиус капли должен быть $R = 1 \cdot 10^{-3}$ м

Задача 8

Кольцо из проволоки радиусом R=10 см имеет отрицательный заряд q=–5 нКл. 1) Найти напряженность E электрического поля на оси кольца в точках, расположенных на расстояниях L равных 0, 5, 8, 10 и 15см. Начертить график $E=f(L)$. 2) На каком расстоянии L от центра кольца напряженность электрического поля будет иметь максимальное значение?

Задача 8

Дано:

R=0,1 см

q=-5·10^{-9} Кл

L_1=0м

L_2=0,05 м

L_3=0,08 м

L_4=0,1 м

L_5=0,15 м

ε =1

ε_0=8,85 10-12 Ф/м

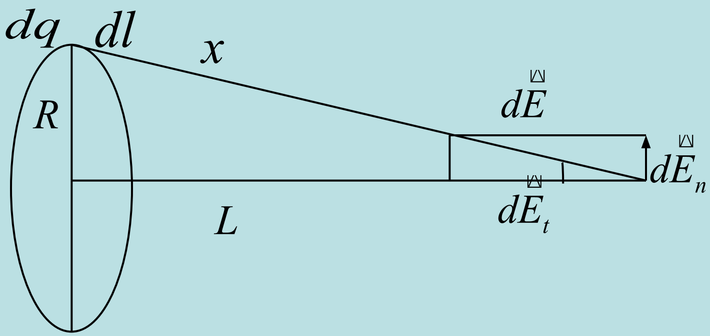
E_1, E_2, E_3, E_4, E_5-?

E_{max}-?

L_m=?

начертить $E=f(L)$

Решение:



$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2} \qquad E = \int dE_t$$

$$dE_t = dE\cos\alpha = dE\frac{L}{x} = \frac{Ldq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}$$

$$E = \frac{L}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}\int dq = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}$$

$$x = \sqrt{R^2 + L^2}$$

$$E = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R^2 + L^2)^{3/2}} \qquad (1)$$

Если L>>R, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L^2}$

$$R = x\cdot\sin\alpha, L = x\cdot\cos\alpha$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha\sin^2\alpha$$

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}(\cos^2\alpha\cdot 2\sin\alpha - \sin^3\alpha) = 0$$

$$2\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha = 0 \qquad tg^2\alpha = 2$$

$$2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \qquad L = \frac{R}{tg\alpha} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

E_1 = 0 (В/м)

E_2 = 1609 (В/м)

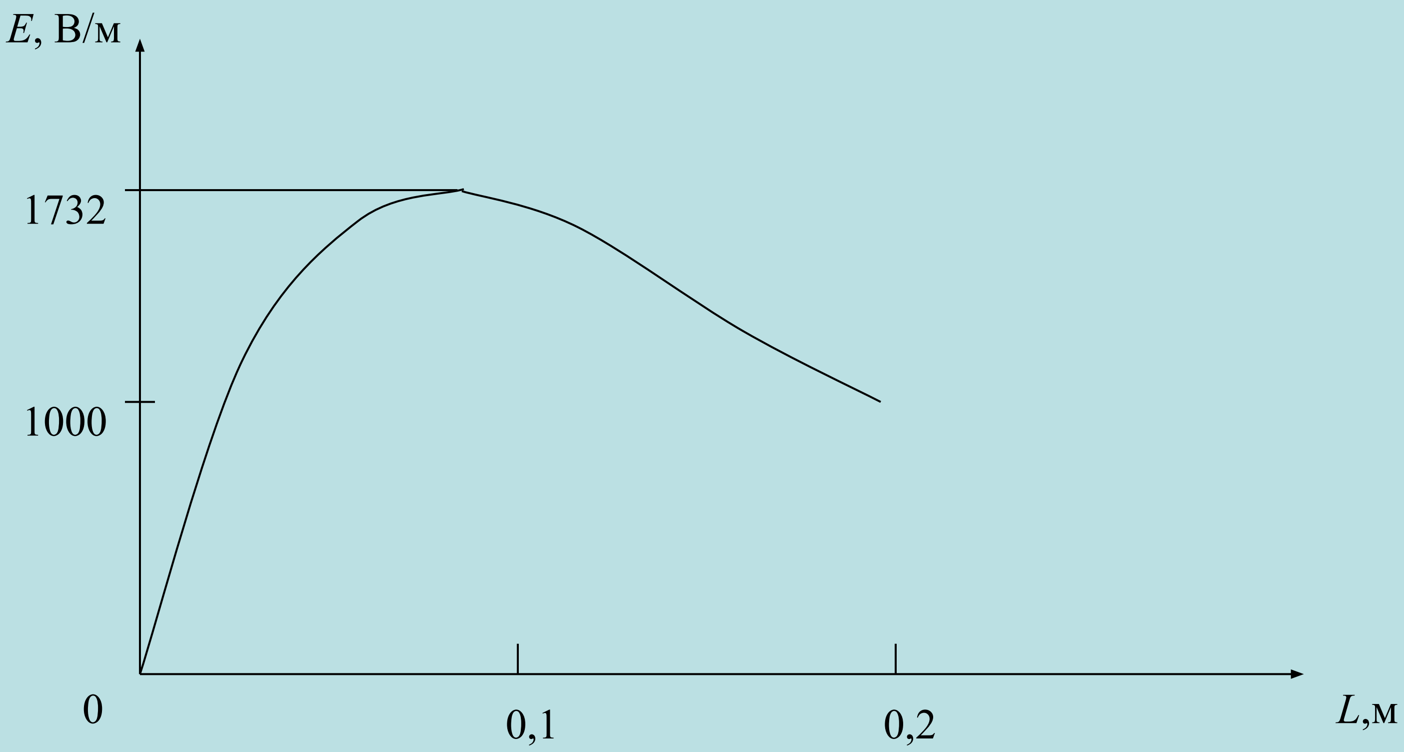
E_3=1714 (В/м)

E_4 = 1590 (В/м)

E_5 = 1152 (В/м)

Продолжение…

График *E=f(L)*



R=0,1 м, следовательно $L_m=7{,}1\cdot10^{-2}$ м, $E_{max}=1732$ В/м.

Ответ: напряженность электрического поля на 0 м; 0,05 м; 0,08 м; 0,1 м; 0,15 м равна соответственно 0 В/м; 1609 В/м; 1714 В/м; 1590 В/м; 1152 В/м. Напряженность будет максимальной на расстоянии от центра $L_m=7{,}1\cdot10^{-2}$ м и равна E=1732 В/м.