ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На интервале **[*a*, *b*]** задана система точек – *узлов интерполяции* $\boldsymbol{x_i}$, i=0,1,…,N; $\boldsymbol{a \le x_i \le b}$ и значения неизвестной функции в этих узлах $\boldsymbol{f_i}$. Могут быть поставлены следующие задачи.

1. Построить функцию ***F*(*x*)**, принимающую в узлах интерполяции заданные значения: $\boldsymbol{F(x_i)=f_i}$, i=0,1,…,N (*условия интерполяции*).
2. Для заданного произвольного значения $\boldsymbol{z \in [a, b]}$ найти ***F*(*z*)**.

Оценка погрешности методов интерполяции

- Задача интерполяции имеет множество решений, т.к. через заданные точки (x_i, f_i), i=0,1,…,N можно провести бесконечное число кривых, для которых будут выполнены все условия интерполяции.
- Если известна исходная функция $f(x)$, то погрешность метода $r(z)$ в произвольной точке $z \in [a, b]$ можно оценить по следующему выражению:

$$r(z)=|f(z)-F(z)|$$

- Погрешность уменьшается при увеличении числа узлов интерполяции. Будем считать, что *метод сходится*, если при $N \to \infty$ погрешность $r \to 0$.

Методы интерполяции

Все методы интерполяции можно разделить на два типа: *локальные* и *глобальные*.

- В случае ***локальной интерполяции*** на каждом отрезке [x_{i-1}, x_i] строится своя (локальная) функция.
- В случае ***глобальной интерполяции*** на всем интервале [a, b] строится одна (глобальная) функция.

ЛОКАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

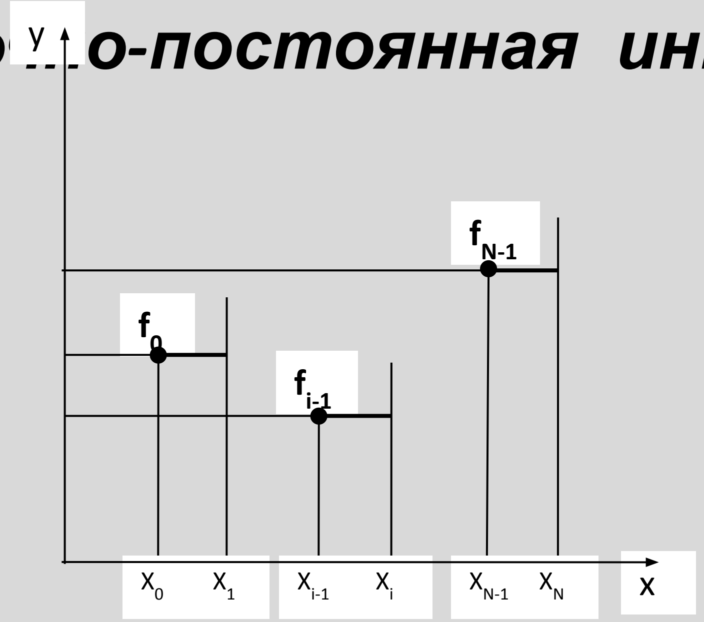
- Кусочно-постоянная интерполяция
- Кусочно-линейная интерполяция
- Кусочно-параболическая интерполяция
- Кубический интерполяционный сплайн

Кусочно-постоянная интерполяция

На каждом локальном отрезке [x_{i-1},x_i], i=1,…,N интерполирующая функция заменяется константой.

Различают два вида кусочно-постоянной интерполяции.

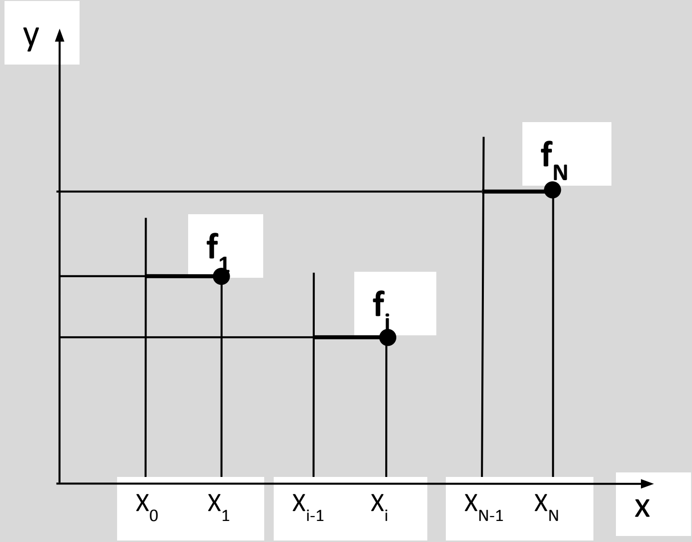
1. ***Левая кусочно-постоянная интерполяция*** : $F_i(z)=f_{i-1}$.



Кусочно-постоянная интерполяция

2. ***Правая кусочно-постоянная интерполяция*** :

$F_i(z)=f_i$.



Недостатки метода

- Интерполирующая функция является *разрывной* в узлах интерполяции.
- При малом числе точек погрешность будет большой.

Кусочно-постоянная интерполяция (пример)

На интервале [*a, b*] заданы значения некоторой функции в узлах интерполяции.

Найти промежуточное значение функции в точке ***z***, используя правую кусочно-постоянную интерполяцию.

Исходные данные

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix} \qquad f := \begin{pmatrix} -1 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Решение

```
IKPP(x,f,N,z) := | for i ∈ 1..N
                 |   if x[i-1] ≤ z ≤ x[i]
                 |      | F ← f[i]
                 |      | m ← i
                 |      | break
                 | (F)
                 | (m)
```

$$F(z) := IKPP(x, f, 3, z)$$

$$F(1) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(3.2) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Кусочно-линейная интерполяция

На каждом локальном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,\ldots,N$ интерполирующая функция заменяется линейной $F_i(z)=k_i z+l_i$.

Значения коэффициентов k_i *и* l_i находятся из выполнения условий интерполяции на концах отрезка:

$$F(x_{i-1})=f_{i-1};\ F(x_i)=f_i$$

Составим систему уравнений:

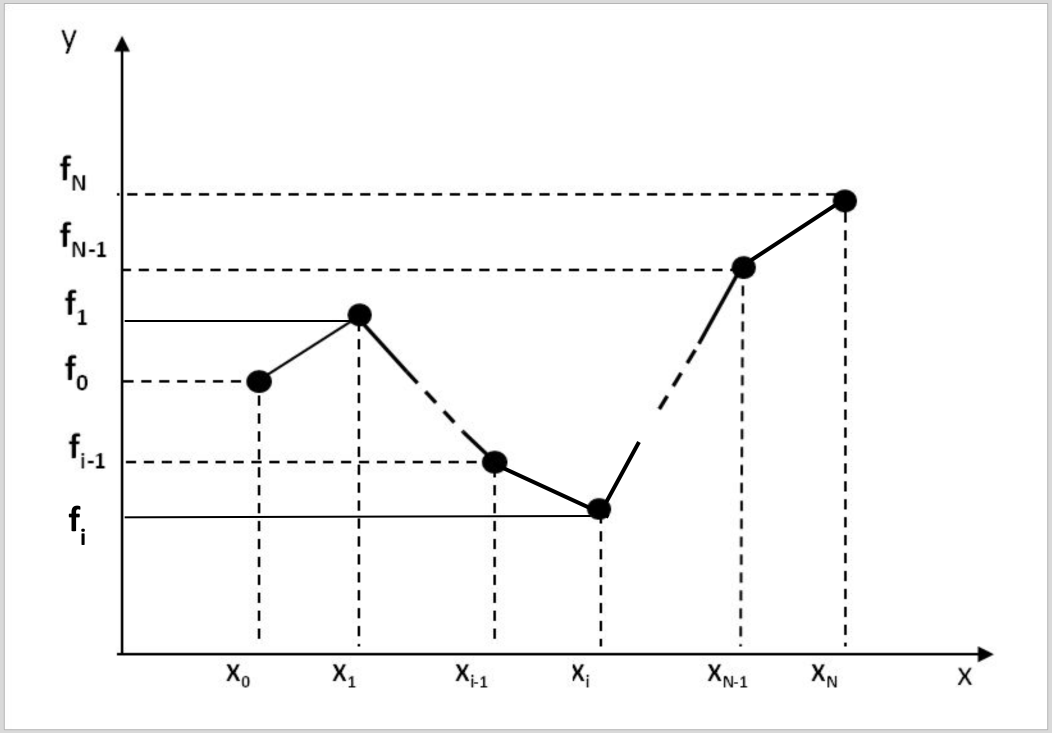
$$\begin{cases} k_i x_{i-1} + l_i = f_{i-1} \\ k_i x_i + l_i = f_i \end{cases}$$

Из системы находим коэффициенты:

$$k_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}};\quad l_i = f_i - k_i x_i$$

Кусочно-линейная интерполяция

График функции



Недостаток метода

Первая производная интерполирующей функции является *разрывной* в узлах интерполяции.

Кусочно-линейная интерполяция (пример)

Для функции ***f***(***x***), заданной таблично, найти значение в промежуточной точке ***z***, используя кусочно-линейную интерполяцию.

Построить график линейной интерполяции в MathCad с помощью встроенной функции ***linterp***.

Исходные данные

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix} \qquad f := \begin{pmatrix} -1 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Решение

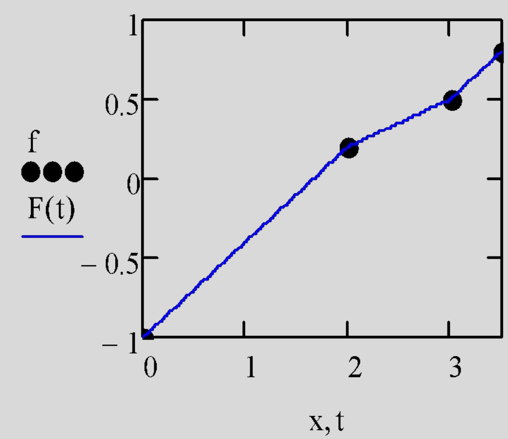
$$\mathrm{IKL}(x,f,N,z) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ \quad \text{if } x_{i-1} \le z \le x_i \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow \dfrac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ l \leftarrow f_i - k \cdot x_i \\ F \leftarrow k \cdot z + l \\ \text{break} \end{array} \right. \\ F \end{array} \right.$$

$F(z) := \mathrm{IKL}(x,f,3,z)$

$F(1) = -0.4$

$F(t) := \mathrm{linterp}(x,f,t)$

$F(1) = -0.4$



Кубический интерполяционный сплайн

На каждом локальном отрезке $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,N$ интерполирующая функция описывается кубической параболой:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i\frac{(x-x_i)^2}{2} + d_i\frac{(x-x_i)^3}{6}, \quad i=1,2,\dots,N$$

Для определения **4*N*** неизвестных коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i; $i=1,2,\dots,N$ используются следующие условия:

1. Условия интерполяции: $S_i(x_i)=f_i$; $i=1,2,\dots,N$; $S_1(x_0)=f_0$
2. Условия непрерывности функции: $S_i(x_{i-1})=S_{i-1}(x_{i-1})$; $i=2,\dots,N$
3. Условия непрерывности первой производной: $S'_i(x_{i-1})=S'_{i-1}(x_{i-1})$; $i=2,\dots,N$
4. Условия непрерывности второй производной: $S''_i(x_{i-1})=S''_{i-1}(x_{i-1})$; $i=2,\dots,N$

Кубический интерполяционный сплайн имеет достаточно хорошую точность и простую реализацию.

Кубический интерполяционный сплайн (пример)

Для построения кубической интерполяции в пакете MathCad используется встроенная функция: ***interp*(*s, x, f, t*).**

s – вспомогательный вектор коэффициентов, который вычисляется с помощью функции ***cspline***.

Исходные данные

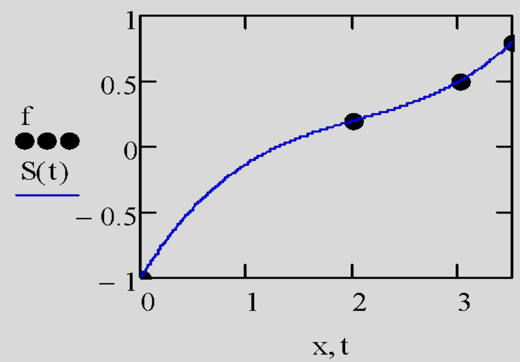
$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix} \qquad f := \begin{pmatrix} -1 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$s := \mathrm{cspline}(x, f)$

$S(t) := \mathrm{interp}(s, x, f, t)$

Решение

$S(1) = -0.129$



ГЛОБАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Полином Лагранжа

Полином Ньютона

Интерполяционный полином Лагранжа

Данный метод основан на построении многочлена *N*-ой степени, принимающего в узлах интерполяции x_i, $i=0,1,\ldots,N$ заданные значения f_i.

Решение ищем в виде полинома Лагранжа

$$L_N(z)=\sum_{i=0}^{N} f_i l_i(z)$$

где $l_i(z)$ – базисные полиномы *N*-ой степени, для которых выполняется условие:

$$l_i(x_k)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

Интерполяционный полином Лагранжа

Действительно, если такие базисные полиномы построены, то полином Лагранжа $L_N(z)$ будет удовлетворять условиям интерполяции:

$$L_N(x_i)=\sum_{k=0}^{N} f_k l_k(x_i)=f_0\underbrace{l_0(x_i)}_{0}+f_1\underbrace{l_1(x_i)}_{0}+\ldots+f_i\underbrace{l_i(x_i)}_{1}+\ldots+f_N\underbrace{l_N(x_i)}_{0}=f_i$$

Базисные полиномы *N*-ой степени для каждого узла интерполяции строятся следующим образом:

$$l_i(z)=\frac{(z-x_0)(z-x_1)\ldots(z-x_{i-1})(z-x_{i+1})\ldots(z-x_N)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_N)};\quad i=0,\ 1,\ldots,\ N$$

Интерполяционный полином Лагранжа

Полином Лагранжа можно записать в компактной форме, по которой легко составить П-Ф в пакете MathCad:

$$L_N(z)=\sum_{i=0}^{N} f_i l_i(z)=\sum_{i=0}^{N} f_i \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N}\frac{(z-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

Исходные данные

$$x := \begin{pmatrix}0\\2\\3\\3.5\end{pmatrix} \qquad f := \begin{pmatrix}-1\\0.2\\0.5\\0.8\end{pmatrix}$$

$M := 10 \qquad j := 0..M$

$a := 0 \qquad b := 3.5 \qquad h := \dfrac{b-a}{M}$

Решение

$$IPL(x,f,N,z) := \left|\begin{array}{l} L \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \left|\begin{array}{l} P \leftarrow 1 \\ \text{for } k \in 0..N \\ \quad P \leftarrow P\cdot\dfrac{z-x_k}{x_i-x_k} \text{ if } i \neq k \\ L \leftarrow L + f_i \cdot P \end{array}\right. \\ L \end{array}\right.$$

$L(z) := IPL(x,f,3,z)$

$t_j := a + j\cdot h \qquad L_j := IPL\left(x,f,3,t_j\right)$

$L(1) = -0.129$