

Геометрия

9 класс

**Дополнительные главы к
школьному учебнику**

«Учитель-методист» А.П.Родина.

2007-2008 учебный год.

Полуправильные многоугольники. Длина и площадь.

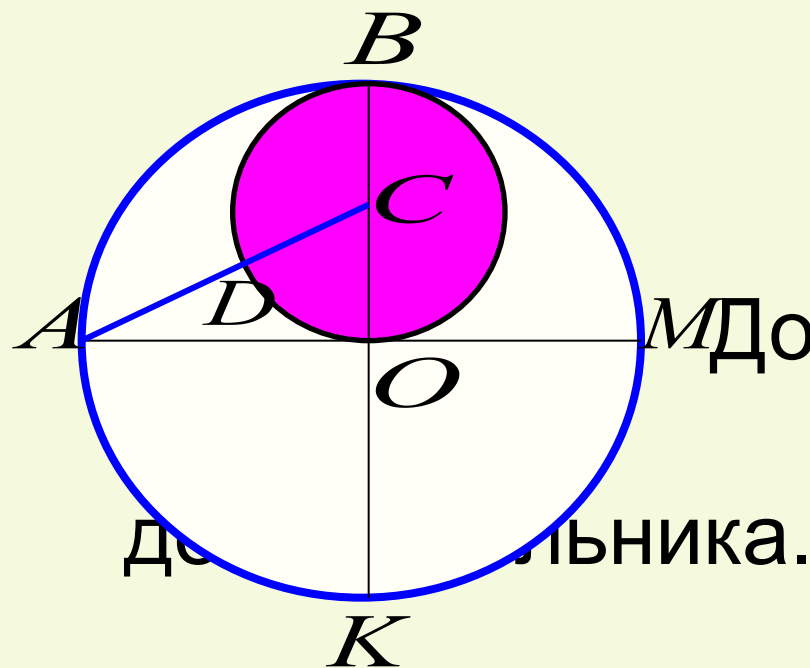
Цели: 1) Углубить знания учащихся по теме «Многоугольники».

2) Ввести понятие равноугольно-полуправильного и равносторонне-полуправильного многоугольника.

3) Познакомить с теоремой Барбье о длине кривой постоянной ширины и площадью фигуры.

Вписанный правильный десятиугольник и пятиугольник

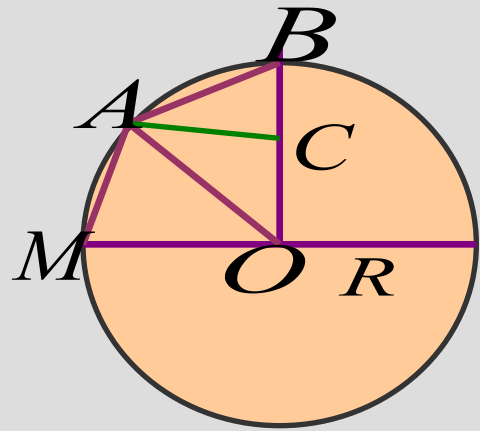
Дано: $O(R)$, $BK \perp AM$, $C \in OB$,
 $C(CO)$, $BC = CO$
 $AC \cap C(CO) = D$



Доказать, что AD - сторона
 правильного

десятиугольника.

Доказательство



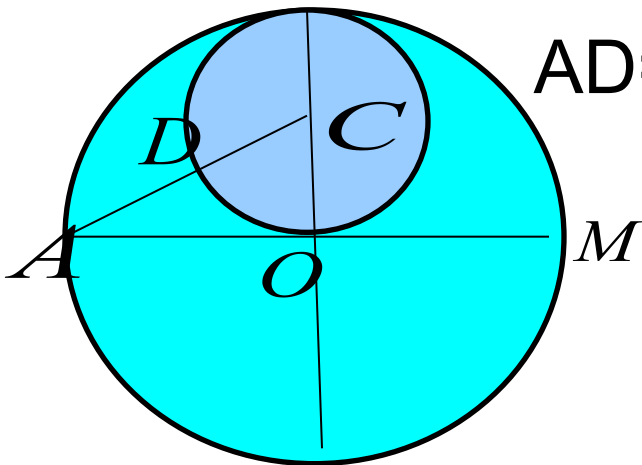
1) $\angle MAB = 144^\circ$ - угол десятиугольника,
 $\angle AOB = \frac{360}{10} = 36^\circ$, то $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$
 $\angle BAC = 36^\circ$ т.к. AC - биссектриса.

$\triangle AOB \sim \triangle CAB$ - по двум углам, $\frac{AB}{OB} = \frac{BC}{AB}$ $OA = R$,
 $BC = OB - OC = R - AB$, значит

$$\frac{AB}{R} = \frac{R - AB}{AB}, \text{ то } AB = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R.$$

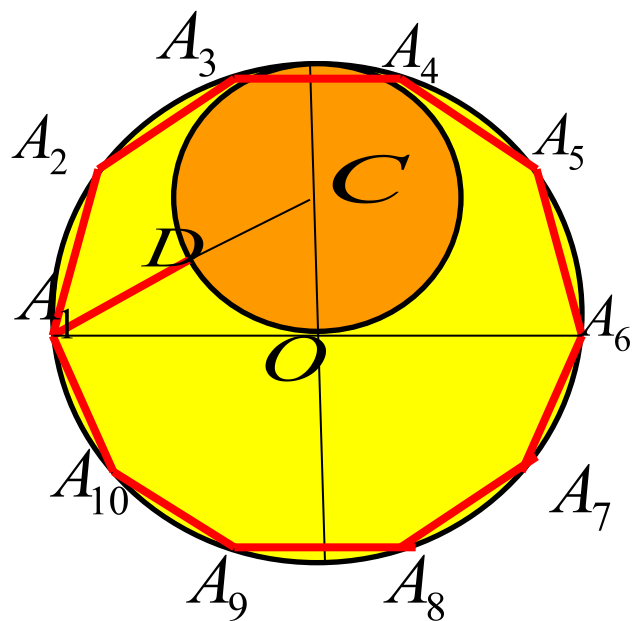
2) $AB = 2R \sin 18^\circ$, тогда $2R \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R$,

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

B 

$$AD = AC - DC = AC - R/2$$

$$AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} R.$$



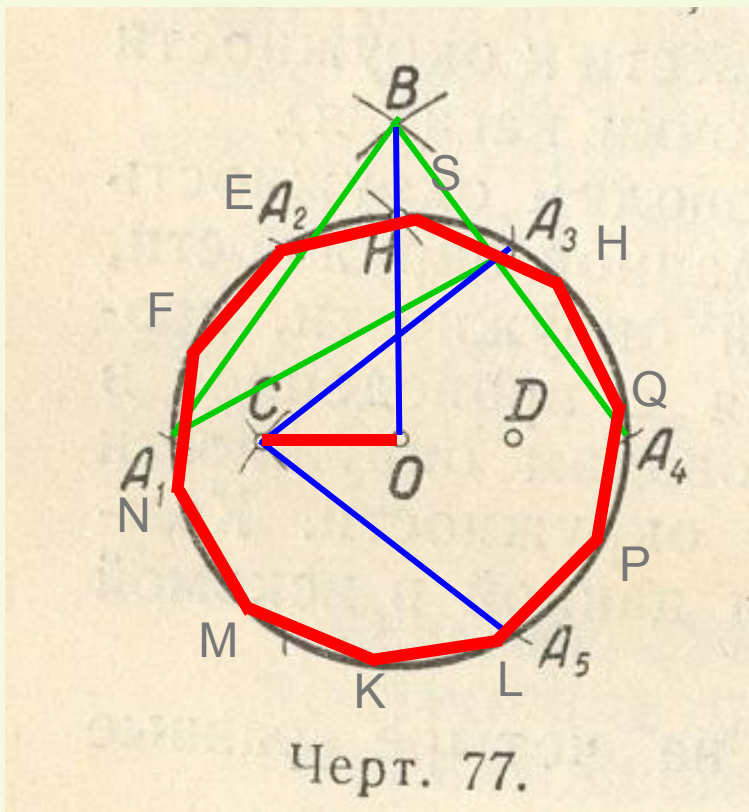
$$AD = \frac{\sqrt{5}}{2} R - \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{5}R - R}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R,$$

значит AD - сторона десятиугольника

Построение правильного десятиугольника

При помощи одного циркуля

Построение

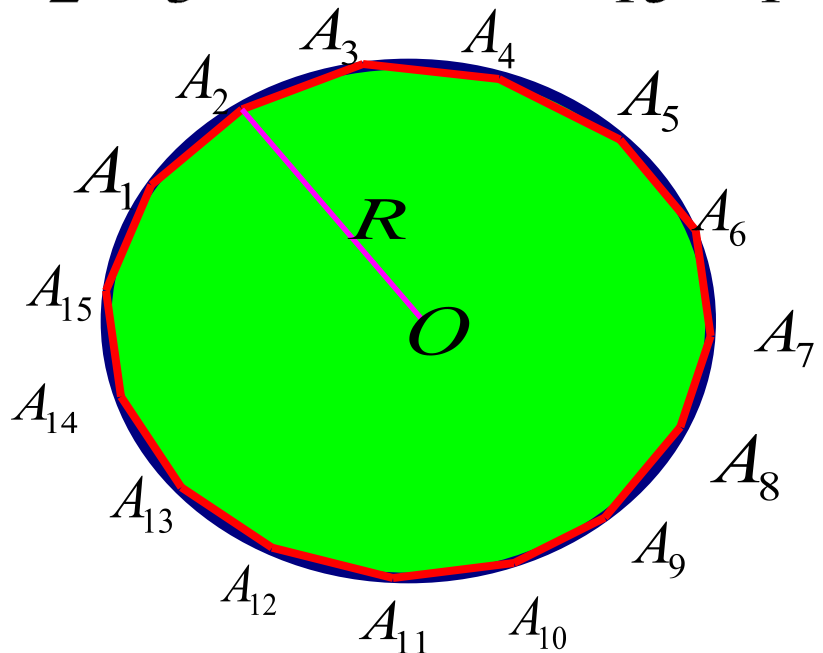
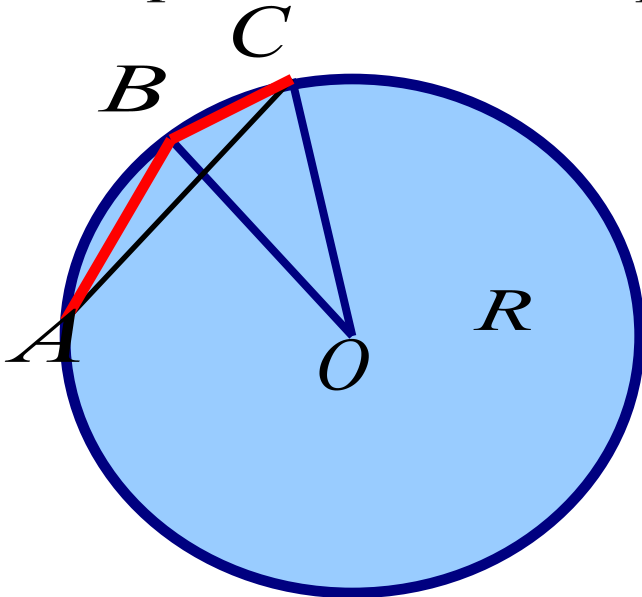


- 1. $O(R)$
- 2. $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=$
 $=A_4A_5=A_5A_6=R$
- 3. $A_1(A_1A_3) \cap A_4(A_1A_3)=B$
- 4. $A_3C=A_5C=OB$
- 5. ОС-сторона
десятиугольника
- 6. EF, FN, NM, МК, KL,
LP, PQ, QH, HS
- **EFNMKLPQHS-**
ИСКОМЫЙ

Вписанный правильный пятнадцатигульник

Пусть $AB = a_{10}$, $AC = a_6$, дуга $AB = 36^\circ$, дуга $AC = 60^\circ$, а дуга $BC = 24^\circ$. Следовательно $BC = a_{15}$
т.к. $\angle BOC = 24^\circ = \frac{360^\circ}{15}$

$$A_1 \in \omega \Rightarrow A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_{15} A_1$$



Теорема Гаусса (1777-1855гг)

Построение правильного n -угольника с помощью линейки и циркуля возможно тогда и только тогда, когда число n имеет следующее разложение на множители $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$

где m - целое неотрицательное число, а

- $p_1, p_2, \dots, p_s$

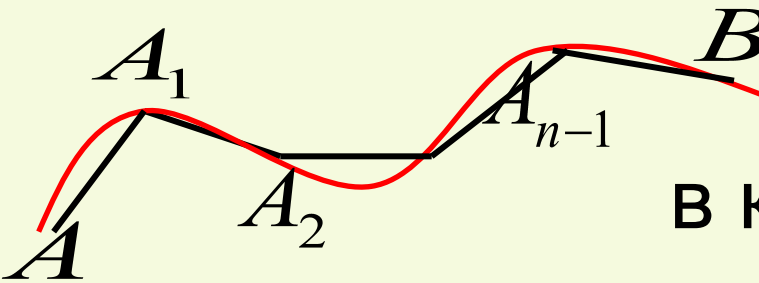
различные между собой простые числа вида

$$2^{2^k} + 1$$

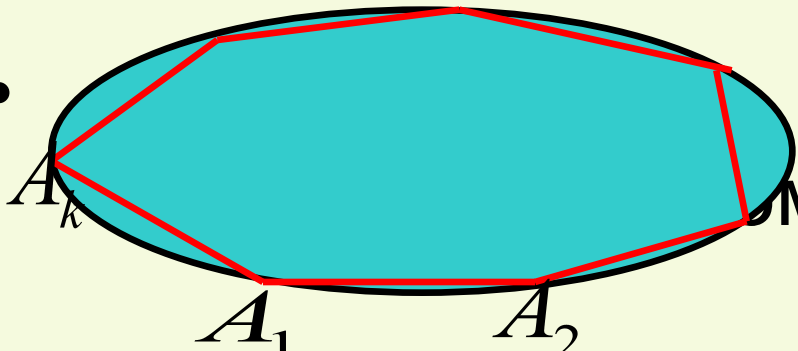
Примеры

- При $m=0$, $s=1$, $n=2^{2^k} + 1$ для $k=0;1;2;3;4$ получаем $n=3$, $n=5$, $n=17$, $n=257$, $n=65537$.
- При $m=0$, $s=2$ имеем $n = p_1 \cdot p_2$, если $p_1 = 3$
 $p_2 = 5$, то $n=15$.
- Число 7 простое, но оно не является числом $2^{2^k} + 1$, поэтому с помощью циркуля и линейки нельзя точно построить правильный семиугольник
- $9 \neq 2^{2^k} + 1$, поэтому построить правильный девятиугольник нельзя.
- $360 \neq 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ не удовлетворяет т.Гаусса, т.к. 3 входит дважды. Следовательно нельзя разделить окружность на 360 равных частей, т.е. нельзя построить угол в один градус.

Длина кривой

- 

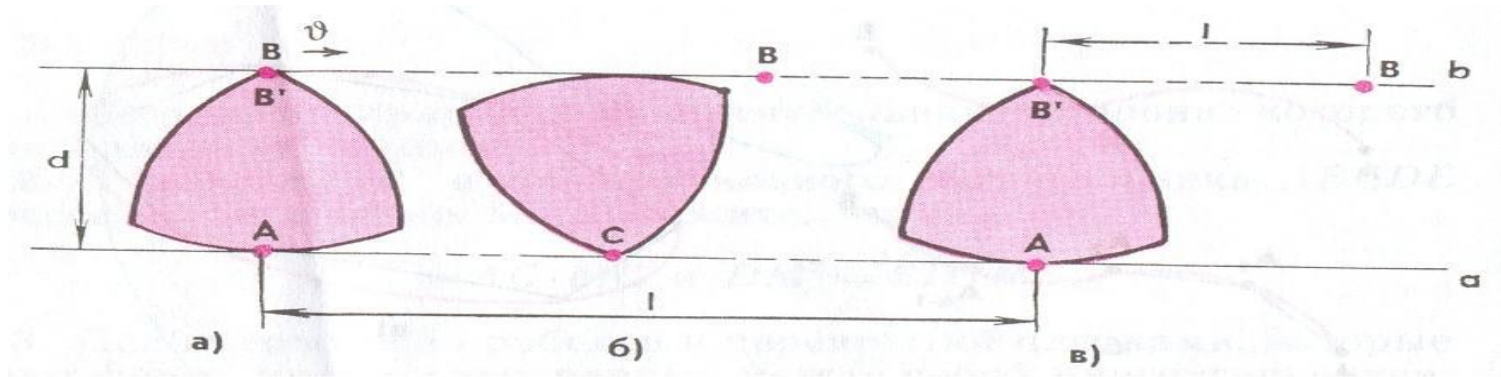
Ломаная $A...B$ вписана в кривую AB , $l_{AB} = \lim A...B$

- 

В замкнутую кривую вписанная ломаная $A_1A_2...A_k$

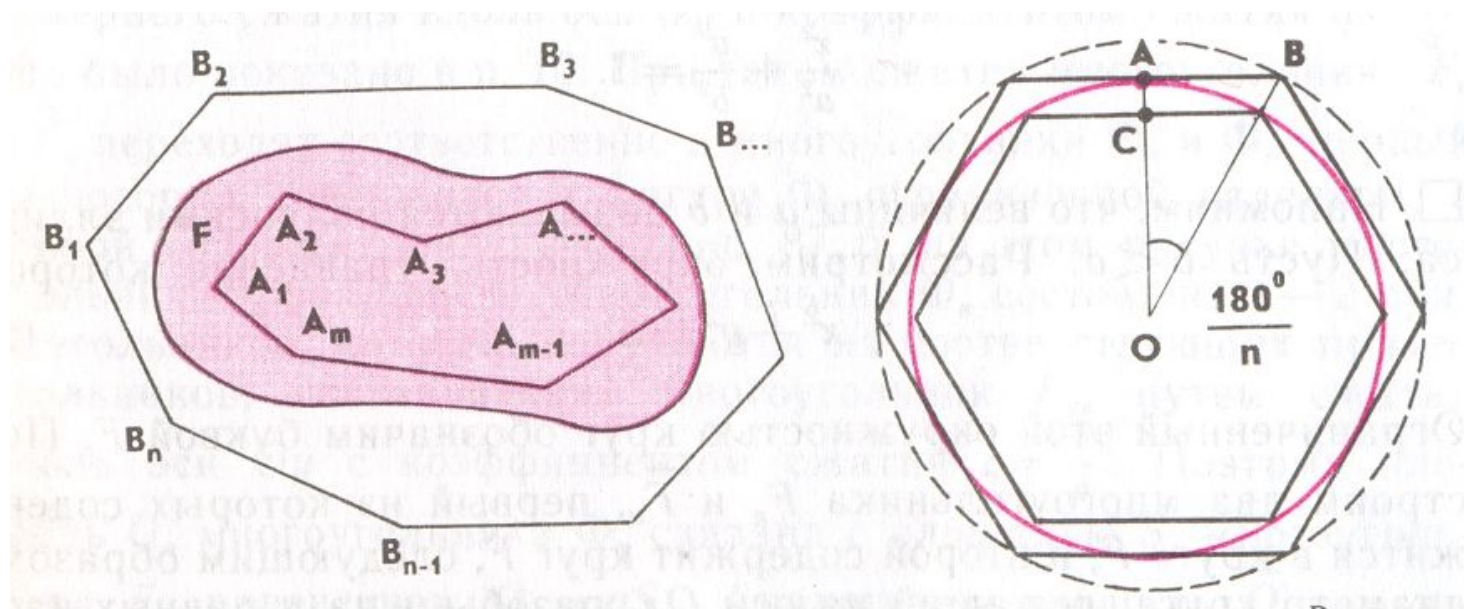
$l = \lim A_1A_2...A_k$

- **Теорема Барбье** — Длина любой кривой постоянной ширины d равна πd .



- **Доказательство.** Представим себе каток постоянной ширины d , который катится без проскальзывания между параллельными прямыми a и b .
- Пусть a неподвижна, а прямая b движущаяся с постоянной скоростью v . Сделав один оборот каток переместится на расстояние l , где l — длина кривой, ограничивающей каток. Прямая b переместится тоже на l по отношению к катку, тогда по отношению к неподвижной прямой — на $2l$, $2l = vt$. Каток вращается вокруг точки $(A(a); C(b))$ с угловой скоростью вращения катка ω то скорость движения прямой b будет $v = \omega d$.
Итак $2l = \omega d t$ но $\omega t = 2\pi$, тогда $2l = 2\pi d$,
$$l = \pi d$$

Площадь фигуры



*Многоугольник $A_1A_2...A_m$ содержится
в фигуре F , многоугольник $B_1B_2...B_n$
содержит фигуру F*

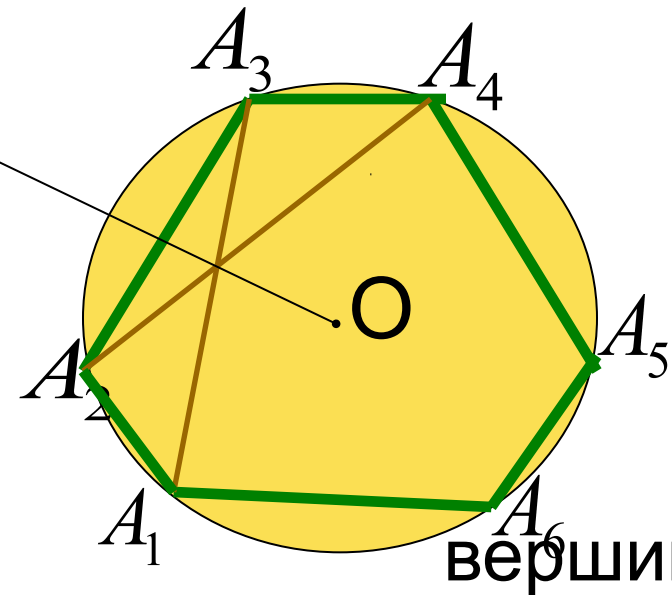
$$OA = R, OB = \frac{R}{\cos \frac{180^\circ}{n}},$$

$$r_n = OC = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

Полуправильные многоугольники

- Определение. Выпуклый многоугольник с четным числом вершин называется равноугольно-полуправильным, если его стороны, взятые через одну, равны и все его углы равны. (пример-прямоугольник)
- Теорема 1. Около любого равноугольно-полуправильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Доказательство



Пусть $A_1A_2\dots A_n$ ($n > 3$) -
 полуправильный. Опишем
 около $\triangle A_1A_2A_3$ окружность
 ω , O - центр окружности.

Докажем, что все

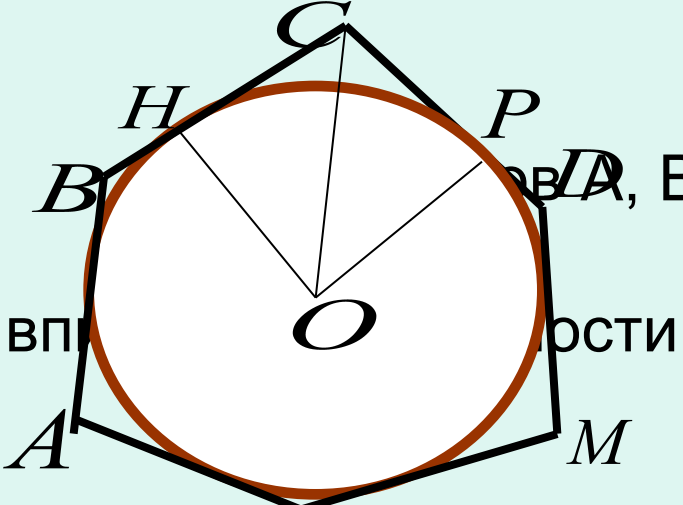
вершины лежат на ω

Около $\triangle A_2A_3A_4$ опишем ω' с центром O' .

$\triangle A_1A_2A_3 = \triangle A_2A_3A_4$ ($A_1A_2 = A_4A_3$, A_2A_3 -общая,
 $\angle A_2 \neq \angle A_3$). Поэтому $R = R'$, $O = O'$, значит $\omega = \omega'$

► **Определение** Выпуклый многоугольник с четным числом вершин называется равносторонне-полуправильным, если его углы, взятые через один, равны и все его стороны равны.

► **Теорема** В любой равносторонне-полуправильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

- 
- $AO, BO, \dots KO$ - биссектрисы $\angle A, \angle B, \dots \angle K$.
 - $AO \cap BO \cap \dots \cap KO$, O -центр
 - $OH \perp BC, OP \perp CD, OH = OP = r$
 - Действительно, $\triangle HCO = \triangle PCO$, т.к. $\angle OHC = \angle OPC = 90^\circ$, $\angle OCH = \angle OCP$, OC - общая.
 - Следствие 1. Не в любой равноугольно- полуправильный многоугольник можно вписать окружность (пример- прямоугольник)
 - Следствие 2. Не для любого равносторонне- полуправильного многоугольника существует описанная окружность.

Домашнее задание

Подготовиться к контрольной работе, повторив материал пунктов 105-112 и решив задачи:

- 1) Периметр правильного пятиугольника, вписанного в окружность, равен 6 дм. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в ту же окружность.
- 2) Найдите площадь круга, если площадь вписанного в ограничивающую его окружность треугольника равна $12\sqrt{3} \text{ см}^2$
- 3) Найдите длину окружности, если площадь вписанного в нее правильного четырехугольника равна 32 м^2

Молодцы!

