1.4 Полные множества булевых функций

- **Множество булевых функций F называется *полным*,**

  если любая булева функция может быть представлена некоторой формулой над F.

Пример.

- **Множество функций** $\{\neg, \&, \vee\}$

является полным множеством в силу теоремы о представлении любой булевой функции ДНФ (или КНФ)

Из множества можно удалить конъюнкцию (дизъюнкцию), поскольку & (v) можно выразить по законам де Моргана через ¬ и v (&)

- **Множество, состоящее из единственной функции штриха Шеффера** $\{x \mid y = \neg(x \,\&\, y)\}$

является полным, поскольку

$$\neg x = (x \mid x)$$

$$x \,\&\, y = \neg(x \mid y) = ((x \mid y) \mid (x \mid y))$$

- **Множество функций**

(базис Жегалкина)

$$\{\oplus, \&, 1\}$$

является полным множеством

- **Полином Жегалкина от n переменных представление булевой функции в виде**

$$P(x_1,\ldots,x_n) = \bigoplus_{\{i_1,i_2,\ldots,i_m\}\subseteq I} a_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$$

- **где** $I = \{1,2,\ldots n\}$**, коэффициенты**

полинома $a_{i_1 i_2 \ldots i_m} \in \{0,1\}$ **индексированы всеми возможными подмножествами множества** I

Утверждение

Полином Жегалкина для любой булевой функции определен однозначно.

Пример

- **Пусть f=(1,1,0,0,1,0,1,1)**

Функция f представляется некоторым полиномом Жегалкина от 3 переменных, т.е.

$$f = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3$$

$$\oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

$$f(0,0,0) = a_0 = 1$$

$$f(0,0,1) = a_3 \oplus a_0 = a_3 \oplus 1 = 1 \qquad a_3 = 0$$

$$f(0,1,0) = a_2 \oplus 1 = 0 \qquad a_2 = 1$$

$$f(1,0,0) = a_1 \oplus 1 = 1 \qquad a_1 = 0$$

$$f(1,1,0) = a_{12}x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0 =$$
$$= a_{12} \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$a_{12} = 1 \qquad a_{23} = 0 \qquad a_{13} = 1 \qquad a_{123} = 1$

$$f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2 \oplus 1$$

1.5 Классы Поста

- **Функцию f называют *функцией, сохраняющей константу 0*, если**
  $f(0,0,\ldots,0) = 0$
- **Функцию f называют *функцией, сохраняющей константу 1*, если**
  $f(1,1,\ldots,1) = 1$
- **Множество всех функций, сохраняющих константу 0 обозначим T_0. Множество всех функций, сохраняющих константу 1 -- T_1.**

Пример.

Функция $f = (00111101)$ является функцией, сохраняющей и константу 0, и константу 1.

Отрицание не сохраняет ни 0, ни 1.

- Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – булева функция. *Двойственной* к ней называется функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n)$.

  Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f, то такая функция f называется *самодвойственной*.

- **Функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах она принимает взаимно противоположные значения.**
- **Множество всех самодвойственных функций обозначим *S***

- **Функцию f монотонная, если**
  f(α) ≤ f(β) для всех наборов значений переменных таких, что α ≤ β

- **Множество всех монотонных функций принято обозначать через *М***

- **Если функция f не является монотонной, то найдутся два таких набора α, β и индекс i, что**

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n)$$
$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \ldots \beta_n)$$

и f(α)=1, f(β)=0,

т.е. эти два набора различаются значениями в точности одной компоненты, а значение функции равно 0 на большем наборе и равно 1 на меньшем

Пример.

- **Функция f = (0011) монотонна.**
- **Отрицание немонотонная функция**

- **Функция f линейная, если f представима в виде полинома Жегалкина первой степени, т.е.**

$$f(x_1,...,x_n) = a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus ... \oplus a_nx_n \oplus a_0$$

- **Множество всех линейных функций обозначают через *L***

- **Множества функций T_0, T_1, *S* , *M* , *L* называются *классами Поста***

Пример

- **Штрих Шеффера** $x \mid y = \neg(x \,\&\, y)$
  не принадлежит ни одному из классов Поста.

x	y	$x \mid y$
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**0**

- Все свойства, кроме нелинейности, следуют из таблицы этой функции. Нелинейность доказывается выводом нелинейного полинома Жегалкина для штриха Шеффера

$$x \mid y = \neg(x \,\&\, y) = (x \,\&\, y) \oplus 1$$

- **Множество булевых функций *F* называют *замкнутым*, если любая формула над *F* представляет некоторую функцию из *F***

- **Множество F булевых функций *полное*,**

  если замыкание F совпадает с множеством всех булевых функций

Теорема.

Каждый класс Поста замкнут.

- Нужно показать, что для каждого класса Поста Р любая функция из Р, представляемая подстановкой функций из Р принадлежит этому же классу Р.

1-2. Замкнутость классов T_0 и T_1

Пусть f , g_1, ..., g_n из класса T_0, т.е. $f(0,0,\ldots,0)=0$, $g_i(0)=0$

Тогда $f(g_1(0),\ldots,g_n(0))=0$

Следовательно, подстановка функций из T_0 содержится в классе T_0

Для класса T_1 доказательство аналогично.

3. Замкнутость класса S

- Пусть f , g_1, ..., g_n из класса S, т.е.

$f=f^*$, $g_i= g_i^*$

Показать, что $f(g_1, ..., g_n)$ из S

4. Замкнутость класса М

- Пусть f , g_1, ..., g_n из класса М

Показать, что f(g_1, ..., g_n) из М

5. Замкнутость класса L

- Очевидно, что при подстановке в линейную функцию вместо ее переменных произвольных линейных функций получится снова линейная функция.
- Доказана замкнутость каждого класса Поста.

Реализация констант 0 и 1

- **Случай 1**

Пусть $f_0 \notin T_0$ $f_0 \in T_1$`

т.е. $f_0(0,\dots,0) = 1, f_0(1,\dots 1) = 1$

Тогда $1 = f_0(x,\dots,x)$

Для получения 0 нужно использовать $g \notin T_1$

$$0 = g(1,\dots,1) = g(f_0(x,\dots,x),\dots,f_0(x,\dots,x))$$

- **Аналогично реализуются константы, если имеется функция** $f_1 \notin T_1 \quad f_1 \in T_0$`

Случай 2

- Пусть $f_S \notin S$. Тогда найдется такой набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, что $f_S(\neg\alpha) = f_S(\alpha)$
- Определим функцию $h(x) = f_S(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})$

где $x^\sigma = \begin{cases} \neg x, \sigma = 0 \\ x, \sigma = 1 \end{cases}$ и $0^\sigma = \neg\sigma, 1^\sigma = \sigma$

Тогда

$$h(0) = f_S(\neg\alpha) = f_S(\alpha) = h(1)$$

Реализация отрицания

- **Если функция** f_M **немонотонная, то с использованием констант 0 и 1 из нее можно реализовать отрицание**
- **Для немонотонной функции** f_M **найдутся два таких набора α и β и индекс** i**, что**

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$$
$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \dots \beta_n)$$

и f(α)=1, f(β)=0,

Тогда

$$\neg x = f_M(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

- **Если немонотонная функция f_M не сохраняет 0 и 1,**

  $f_M(0,\ldots,0) = 1$, $f_M(1,\ldots,1) = 0$
- **то**

$$\neg x = f_M(x,\ldots,x)$$

Реализация конъюнкции с использованием констант и отрицания

Если функция f_L нелинейная, то с использованием констант и отрицания из нее можно реализовать конъюнкцию

Критерий Поста

- ***Множество булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов Поста.***

Необходимость.

- Пусть множество *F* булевых функций полно. Предположим, что оно содержится целиком в одном из классов Поста Всякая суперпозиция над *F* снова лежала бы в классе Поста*.*
- Существуют функции, не содержащиеся ни в одном из классов Поста, например штрих Шеффера.
- Таким образом, нашлась функция, которую нельзя представить в виде суперпозиции над *F*, что противоречит предположению о полноте *F*

Достаточность

- Для доказательства полноты множества *F*, удовлетворяющего условию теоремы, построим формулы над *F* для отрицания и конъюнкции, поскольку множество, образованное этими функциями, полно.
- Тогда полным и множество *F* .

- **По условию теоремы в *F* найдется хотя бы одна функция** $f_1 \notin T_0$
- **Если** $f_1 \in T_1$**, то можно реализовать константу 1.**
- **Если** $f_1 \notin T_1$**, то можно реализовать отрицание.**

- По условию теоремы в *F* найдется хотя бы одна функция $f_2 \notin T_1$.
- Если $f_2 \in T_0$, то можно реализовать константу 0.
- Если $f_2 \notin T_1$, то можно реализовать отрицание.
- Таким образом, могут быть реализованы либо две константы 0 и 1, либо только отрицание, либо константы и отрицание

- В случае, если из первых двух классов (T_0 , T_1) построены только формулы для констант, с использованием немонотонной функции fм можно реализовать отрицание.
- Если реализовано только отрицание, с использованием несамодвойственной функции f_S можно реализовать константы.

- Имея константы и отрицание, из нелинейной функции f_L можно реализовать коньюнкцию.
- Таким образом, отрицание и конъюнкция реализованы формулами над F .
- Множество полно.

Пример.

- **Проверить на полноту множество булевых функций** $F = \{\approx, \vee, 0\}$
- **Для исследования используют критериальную таблицу. Строки таблицы соответствуют функциям исследуемого множества, а столбцы -- классам Поста**

+

	T_0	T_1	S	M	L
~	—	+	—	—	+
V	+	+	—	+	—
0	+	—	—	+	+

- **В множестве *F* есть функции, не принадлежащие каждому из пяти классов Поста.**
- **Согласно теореме Поста, множество *F* полное**