

Семинар 26

Признак Даламбера.

Радикальный признак Коши.

Интегральный признак Коши.

Признак Даламбера

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots (u_n > 0)$ (*)

Если при $n \rightarrow \infty$ существует предел отношения последующего элемента к предыдущему, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при

$\rho < 1$ - ряд сходится; $\rho > 1$ - ряд расходится; $\rho = 1$ - признак Даламбера не действует.

Радикальный признак Коши.

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots (u_n > 0)$ (*)

Если при $n \rightarrow \infty$ существует, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ то при

$\rho < 1$ - ряд сходится; $\rho > 1$ - ряд расходится; $\rho = 1$ - радикальный признак Коши не действует.

Интегральный признак Коши

Не трудно заметить полную аналогию определений сходимости ряда и сходимости несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом.

Много общего и в признаках сходимости рядов с положительными элементами и интегралов с положительной подынтегральной функцией.

Рассмотрим признак, позволяющий в некоторых случаях сводить вопрос о сходимости ряда, к вопросу о сходимости интеграла.

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots (u_n > 0)$ (*), элементы которого являются значениями непрерывной положительной функции $f(x)$ при целых значениях аргумента x : $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$ и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $[1, +\infty)$.

Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ и расходится, если этот интеграл расходится.

Ряды с произвольными элементами. Абсолютная сходимость

Знакопередающиеся ряды

Знакопередающийся ряд можно записать в таком виде:

$\pm (u_1 - u_2 + u_3 - \dots)$ (*), где $u_1, u_2, u_3, \dots$ - положительные числа.

Достаточный признак сходимости – признак Лейбница

Если в знакопередающемся ряду абсолютные величины элементов ряда убывают, то есть в ряде (*) $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ и общий элемент $u_n \rightarrow 0$, то ряд сходится, причем его сумма по абсолютной величине меньше u_1 ;

остаток ряда r_n по абсолютной величине меньше абсолютной величины первого из отбрасываемых элементов $|r_n| < u_{n+1}$.

Абсолютная сходимость

Для рядов с произвольным распределением знаков существует следующий достаточный признак сходимости

Если ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Примеры с решениями

1. Исследовать сходимость рядов

$$1) \frac{2}{10} + \frac{2^2}{10^2} + \frac{2^3}{10^3} + \dots + \frac{2^n}{10^n} + \dots$$

Решение. Применим признак Даламбера; имеем $u_n = 2^n / n^{10}; u_{n+1} = 2^{n+1} / (n+1)^{10}$

тогда
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 + \frac{1}{n})^{10}} = 2 > 1 \Rightarrow \text{расходится}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{n}{3^{n/2}} + \dots$$

Решение. Применим признак Даламбера; имеем $u_n = n / 3^{n/2}; u_{n+1} = (n+1) / 3^{(n+1)/2}$

тогда
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n\sqrt{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/n}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow \text{сходится}$$

$$3) \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Решение. Применим радикальный признак Коши; имеем $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$
 тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 1/n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{сходится}$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \text{Решение. Применим радикальный признак Коши; имеем}$$

$$u_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow \text{расходится}$$

$$5) \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} + \dots$$

Решение. Применим интегральный признак Коши. $u_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}, f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \ln \ln(x+1) \Big|_1^{\infty} = \infty - \text{интеграл расходится, поэтому}$$

и ряд расходится

6. $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Решение. Общий элемент ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится

7. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots$ Решение. Составим ряд из абсолютных

величин: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$ Этот ряд есть бесконечно убывающая геометрическая и, следовательно, сходится. Значит, и данный ряд сходится, причем абсолютно.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Исследовать сходимость рядов 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5 + n^2 \sqrt[3]{n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$

2. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакопеременного ряда: 1. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{2n+1}}{n \cdot \ln n}$ 2. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n \cdot \ln n}}$

3. Вычислить сумму ряда с указанной точностью

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^3}, \delta = 0.01$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n}, \delta = 0.001$