

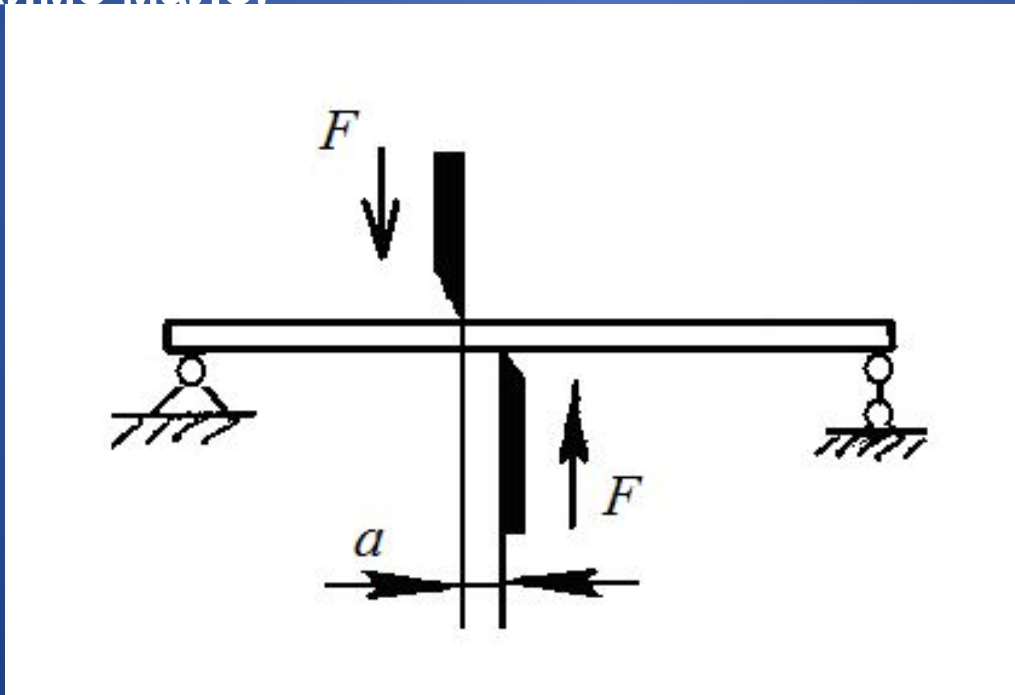
Лекция № 4

Сдвиг и кручение. Закон Гука при сдвиге. Условие прочности при чистом сдвиге. Зависимость между тремя упругими константами.

Кручение. Определение напряжений в стержнях круглого сечения. Условия прочности и жесткости при кручении.

Чистым сдвигом называется напряженное состояние, при котором на гранях элемента действуют только касательные напряжения.

Срезом называют нагружение бруса встречно направленными поперечными силами F , расстояние между которыми (a) пренебрежимо мало.



Касательное напряжение τ связано с угловой деформацией γ законом Гука при сдвиге

$$\tau = G\gamma ,$$

где G — модуль сдвига.

Для стали модуль сдвига $G \approx 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Удельная потенциальная энергия при сдвиге

$$u = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} .$$

Кручением называют такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только крутящий момент.

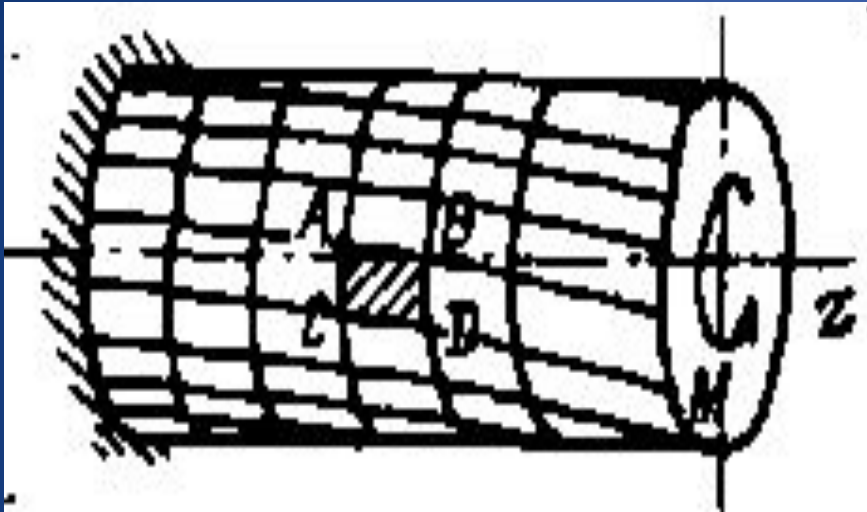
При решении задач внешние крутящие моменты, передаваемые валом, зачастую бывают неизвестны, а задается передаваемая мощность. В этом случае крутящий момент M_z можно найти по формуле:

$$M_z = \frac{N}{\omega}$$

,

где N – мощность, ω - угловая скорость.

Процесс деформации вала при кручении на модели (резина, поролон).

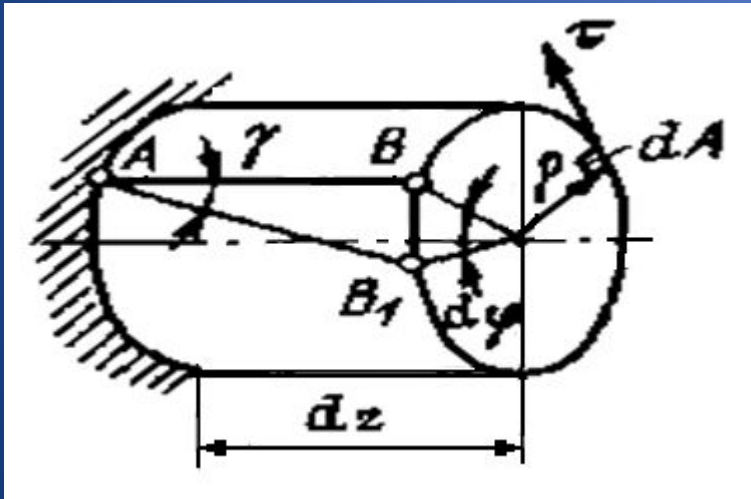


Если на поверхность вала круглого сечения нанести прямоугольную сетку, то после деформации все образующие на поверхности цилиндра повернутся на один угол и превратятся в винтовые линии. Расстояния между поперечными линиями не изменятся, и сами эти линии не искривятся. Это наблюдение позволяет сделать вывод, что все поперечные сечения, не изменяя своей формы, размеров и взаимного положения, поворачиваются относительно друг друга. Заштрихованный элемент, заключенный между

Указанный эксперимент позволяет принять следующие допущения:

1. Справедлива гипотеза плоских сечений.
2. Расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными.
3. Каждое сечение поворачивается на некоторый угол как жесткое целое.

На основании этого можно принять, что при кручении в поперечных сечениях вала (бруса) возникают только касательные напряжения, то есть имеет место чистый сдвиг.



γ - угол сдвига,

$d\varphi/dz$ - угол закручивания.

Связь между тремя упругими константами E , G , μ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} ,$$

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга),
 G – модуль упругости второго рода,
 μ – коэффициент Пуассона.

Коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации) выражает отношение относительной линейной деформации растягиваемого образца в поперечном направлении ε' к его относительной линейной деформации в продольном направлении ε :

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

Касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения направлено перпендикулярно к радиусу, проведенному из центра сечения в данную точку, и вычисляется по формуле:

$$\tau = \frac{M_z}{J_\rho} \rho ,$$

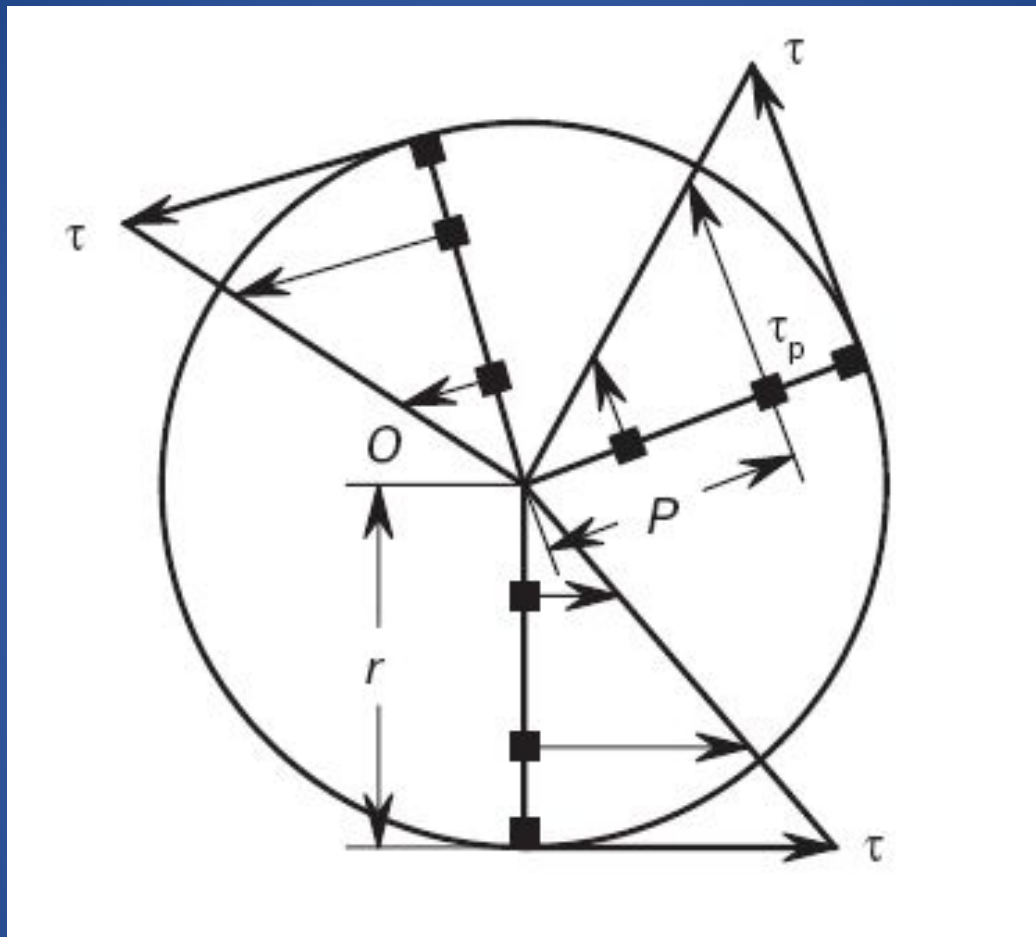
где τ - касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения;

M_z - крутящий момент в рассматриваемом поперечном сечении;

ρ - расстояние от центра сечения до рассматриваемой точки;

J_ρ - полярный момент инерции поперечного сечения.

Касательные напряжения при кручении по сечению изменяются по линейному закону. В центре тяжести сечения касательные напряжения равны нулю, а наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у поверхности бруса.



Распределение касательных напряжений по сечению при кручении

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в точках у контура сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_Z}{W_\rho},$$

где W_ρ – полярный момент сопротивления, $W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}}$.

Для круглого сплошного сечения:

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16},$$

для кольцевого сечения:

$$W_\rho = \pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right),$$

где D и d – наружный и внутренний диаметры сечения соответственно.

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] ,$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

При действии статической нагрузки принимают:

$$[\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma] .$$

Для вычисления деформации вала при кручении используют формулу:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GJ_\rho} ,$$

где l – расстояние между сечениями, для которых определяется взаимный угол поворота φ .

Произведение GJ_ρ – *жесткость вала при кручении*.

При постоянных крутящем моменте и жесткости -

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_\rho} .$$

Для обеспечения требуемой жесткости вала при кручении необходимо, чтобы относительный угол закручивания θ не превосходил допускаемого

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_z}{GJ_\rho} \leq [\theta]$$

где $[\theta]$ — допускаемый относительный угол закручивания в рад/м. Часто допускаемый относительный угол закручивания задают в градусах на 1 м длины.

Например для валов средних размеров рекомендуют принимать $[\theta] = 0,5$ град/м.