

Движение абсолютно твёрдого тела

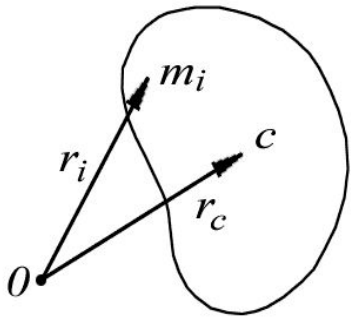
1. *Момент силы*
2. *Момент инерции*
3. *Момент импульса*
4. *Основной закон динамики
вращательного движения*
5. *Закон сохранения момента импульса*
6. *Работа и энергия*
7. *Условия равновесия АТТ*

Динамика движения АТТ

Любое сложное движение тела можно рассматривать как совокупность поступательного перемещения в трёхмерном пространстве и вращения вокруг трёх координатных осей.

Центр масс тела (системы материальных точек) - *точка, характеризующая распределение масс в теле или механической системе.*

При движении АТТ его центр масс движется как материальная точка с массой, равной массе всего тела, к которой приложены все силы, действующие на это тело.



$$\vec{V}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{P}}{m}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$m \vec{V}_c = \vec{P}$$

$$m \vec{a}_c = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$$

В однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести твердого тела.

Динамические характеристики вращательного движения. Момент силы

Момент силы относительно оси - величина, характеризующая вращательное действие силы и равная векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на составляющую вектора силы в плоскости перпендикулярной оси вращения.

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_{\perp}] \quad [M] = \text{м} \cdot \text{Н} = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} = \text{Дж}$$

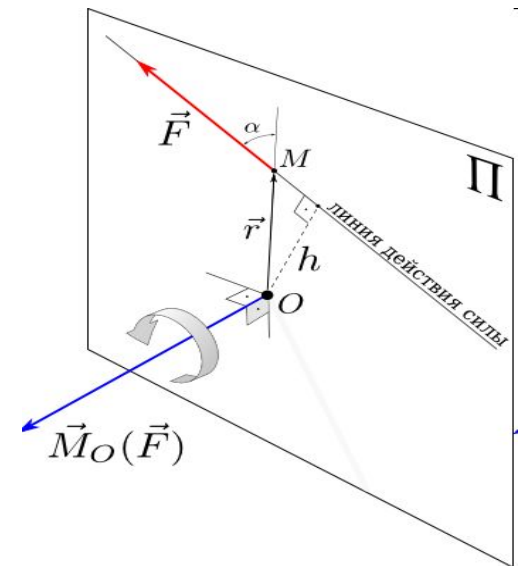
Направление вектора момента силы определяется правилом буравчика. Модуль вектора момента силы равен произведению перпендикулярной оси составляющей вектора силы на её плечо:

$$M = r F_{\perp} \sin \alpha \quad M = F_{\perp} h$$

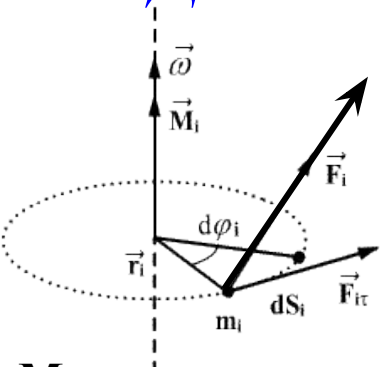
Плечо силы (h)- кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы: $h = r \sin \alpha$

Момент силы равен нулю, если линия действия силы:

- параллельна оси вращения
- пересекает ось вращения



Динамические характеристики вращательного движения. Момент инерции



Преобразуем II закон Ньютона для материальной точки:

$$\overset{\rceil}{a} = \frac{\overset{\rceil}{F}_p}{m} \Longrightarrow \varepsilon \cdot r = \frac{F_p r}{mr} \Longrightarrow \varepsilon = \frac{M_p}{mr^2}$$

Момент результирующей действующих на тело сил относительно некоторой оси равен векторной сумме моментов сил, приложенных к телу, относительно данной оси.

$$\overset{\rceil}{M}_p = \left[\overset{\rceil}{r} \overset{\rceil}{F}_{p\perp} \right] = \sum \overset{\rceil}{M}_i$$

Момент инерции материальной точки - скалярная величина, характеризующая её инертные свойства во вращательном движении и равная произведению массы на квадрат расстояния до оси вращения.

$$I = mr^2$$

Угловое ускорение материальной точки прямо пропорционально результирующему моменту действующих на неё сил и обратно пропорционально моменту инерции.

$$\overset{\rceil}{\varepsilon} = \frac{\overset{\rceil}{M}_p}{I} = \frac{\sum \overset{\rceil}{M}_i}{I}$$

Момент инерции твердого тела

Момент инерции тела, мера его инертности во вращательном движении, равен сумме моментов инерции всех материальных точек, составляющих данное тело.

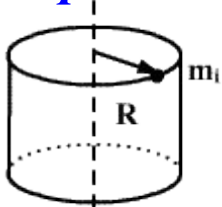
Момент инерции зависит от распределения массы тела относительно оси вращения, т.е. зависит от положения оси вращения.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int \rho r^2 dV$$

Пример 1. Момент инерции полого тонкостенного цилиндра радиусом R относительно его оси



$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

Пример 2. Момент инерции сплошного однородного цилиндра (диска) относительно его оси

*Сплошной цилиндрический диск высотой h , радиусом R , массой m , плотностью ρ .
Элемент массы- тонкостенный цилиндр радиусом r , толщиной стенки dr , массой dm .*

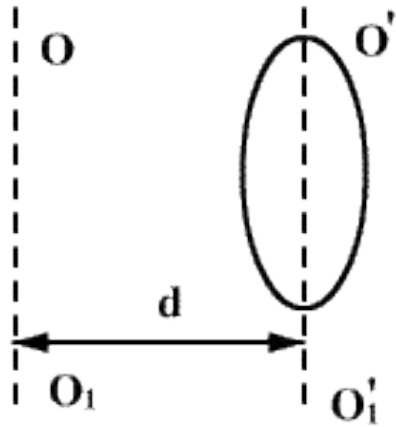
$$dI = r^2 dm = r^2 \rho dV$$

$$dm = 2\pi r h \rho dr$$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 2\pi r h \rho dr = 2\pi h \rho \int r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси.

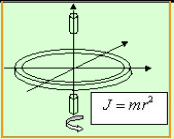
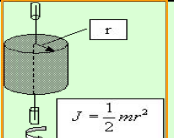
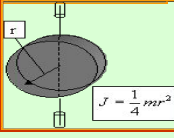
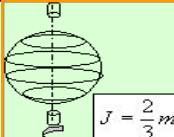
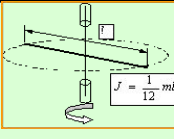
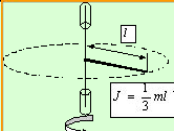
Теорема Штейнера



$$I = I_0 + md^2$$

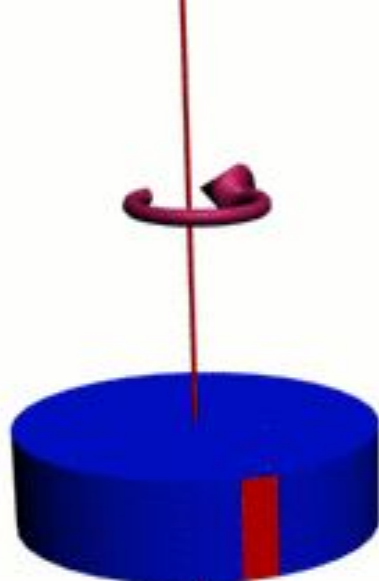
Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями .

Моменты инерции некоторых тел

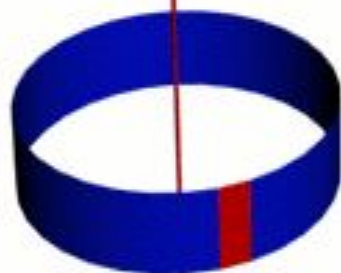
Тело	Положение оси	Момент инерции
Тонкостенный цилиндр 	Центр инерции, параллельно образующей	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр, диск 	Центр инерции, параллельно образующей	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Сплошной цилиндр, диск 	Центр инерции, параллельно диаметру	$J = \frac{1}{4} mR^2$
Шар 	Центр инерции	$J = \frac{2}{5} mR^2$
Тонкостенная сфера	Центр инерции	$J = \frac{2}{3} mR^2$
Стержень 	Центр инерции, перпендикулярно стержню	$J = \frac{1}{12} ml^2$
Стержень 	Конец, перпендикулярно стержню	$J = \frac{1}{3} ml^2$



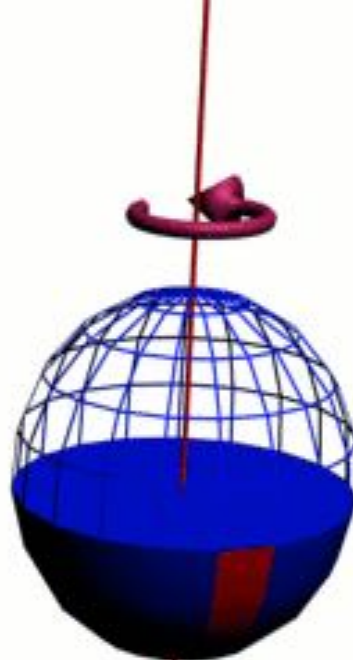
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$



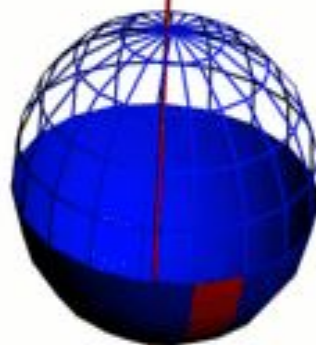
$$I = \frac{1}{2} m R^2$$



$$I = m R^2$$



$$I = \frac{2}{5} m R^2$$



$$I = \frac{2}{3} m R^2$$

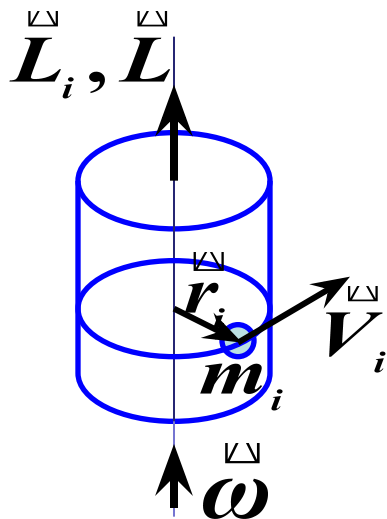


$$I = \frac{1}{12} m l^2$$



$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

Динамические характеристики вращательного движения. Момент импульса



Момент импульса материальной точки относительно оси- векторная характеристика вращательного движения, равная векторному произведению её радиуса- вектора на вектор импульса.

$$\vec{P}_i = m_i \vec{V}_i$$

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times \vec{P}_i] = [\vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i]$$

$$\vec{V}_i = r_i \vec{\omega}$$

$$\vec{L}_i = r_i m_i \vec{V}_i = m_i r_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

Момент импульса абсолютно твёрдого тела (системы материальных точек) равен сумме моментов импульса всех составляющих его материальных точек:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega} = I \vec{\omega} \quad \vec{L} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$$

Момент импульса АТТ относительно некоторой оси равен произведению его момента инерции относительно данной оси на вектор угловой скорости.

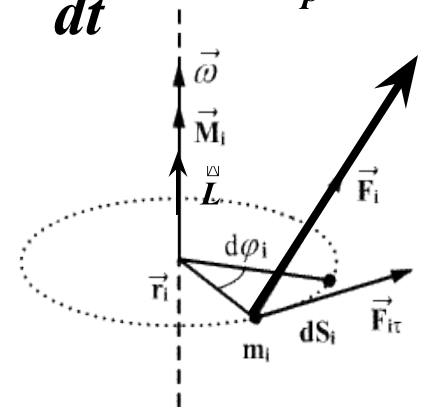
Основной закон динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела

Угловое ускорение, приобретаемое телом, при вращении вокруг неподвижной оси прямо пропорционально результирующему моменту действующих на тело сил и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно данной оси.

$$\varepsilon = \frac{M_p}{I} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_p}{I} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d(I\omega)}{dt} = M_p$$

Момент импульса АТТ: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_p$$



Скорость изменения момента импульса тела равна суммарному моменту всех действующих на него сил.

Закон сохранения момента импульса

Экспериментально, XVIII в., Эйлер.

В XX в. теоретически обоснована связь закона сохранения момента импульса с изотропностью пространства Нашей Вселенной.

$$\sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_{i \text{ внутр.}} + \sum \vec{M}_{i \text{ внеш.}}$$

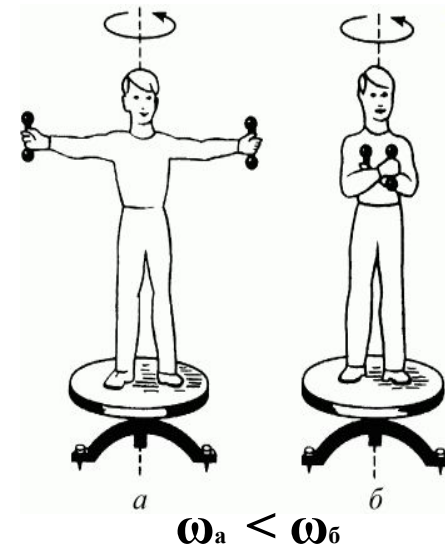
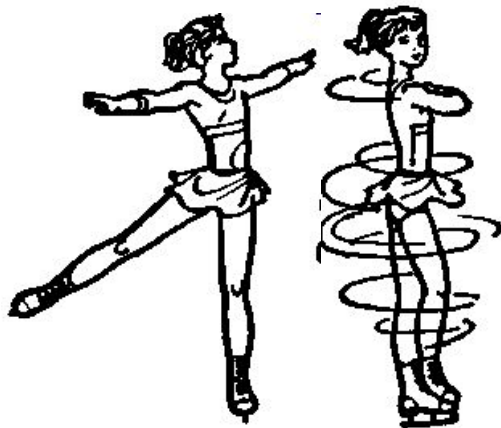
$$\sum \vec{M}_{i \text{ внутр.}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_{i \text{ внеш.}}$$

Для замкнутой системы тел:

$$\sum \vec{M}_{i \text{ внеш.}} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = 0$$

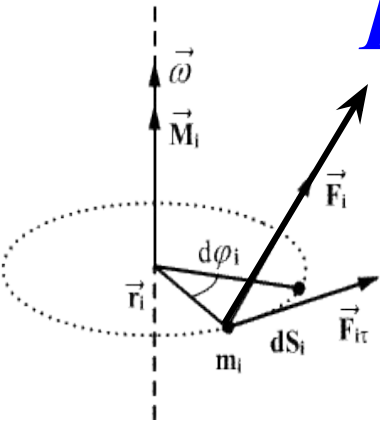
$$\Longrightarrow \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega}_i = \text{const}$$



Векторная сумма моментов импульсов замкнутой системы тел есть величина постоянная.

Работа внешних сил при вращении твёрдого тела.

Кинетическая энергия вращения



Элементарная работа i -той силы при вращении тела:

$$dA_i = F_{i\tau} dS_i = F_{i\tau} r_i d\varphi = M_i d\varphi = M_i \omega dt$$

Элементарная работа равнодействующей при вращении тела:

$$dA = \sum M_i d\varphi = d\varphi \sum M_i = M_p d\varphi = M_p \omega dt$$

Работа равнодействующей всех сил при вращении тела: $A = \int M_p d\varphi = \int M_p \omega dt$

Кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех составляющих его материальных точек.

$$W_{\text{к пост}} = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}$$

$$V_i = \omega r_i$$

$$W_{\text{к вр}} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}$$

В общем случае любое сложное движение АТТ можно представить как сумму двух движений: **поступательного** со скоростью, равной скорости центра инерции тела V_c , и **вращательного** с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции.

$$W_{\text{кин АТТ}} = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

Аналогия между величинами и соотношениями, характеризующими поступательное и вращательное движение

Поступательное движение		Вращательное движение	
Путь	S	Угол поворота	φ
Скорость	$v = \frac{dS}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
	$v = v_0 \pm at$ $S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $S = \int_0^t v dt$		$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = \int_0^t \omega dt$

Поступательное движение

Вращательное движение

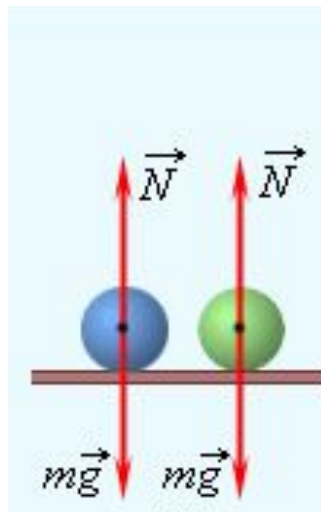
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{v} = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса	$I\vec{\omega} = \text{const}$
Работа	$A = F \cdot S$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$K_{\text{вр.}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Полная энергия тела, катящегося с высоты h			
$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$			

Условия равновесия тел

Виды равновесия

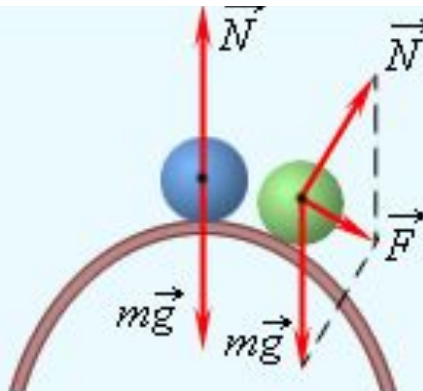
Безразличное

При любых малых отклонениях от положения равновесия равновесие не нарушается .



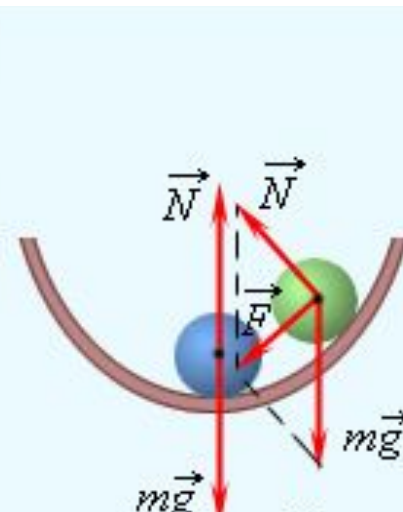
Неустойчивое

При любых малых отклонениях от положения равновесия возникают силы, смещающие тело от начального положения.



Устойчивое

При любых малых отклонениях от положения равновесия возникают силы, которые стремятся возвратить тело в начальное положение.

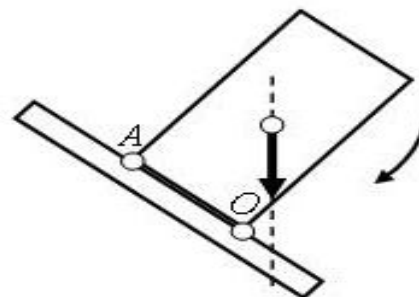
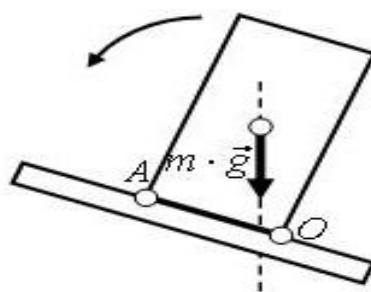
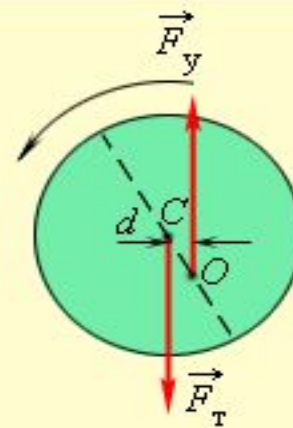
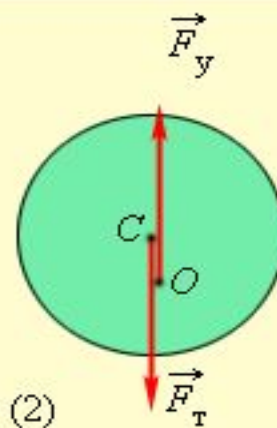
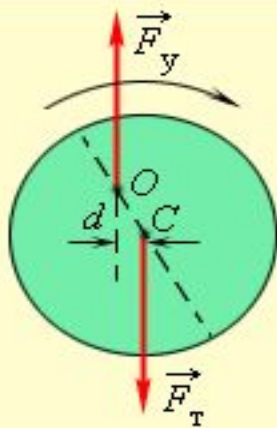
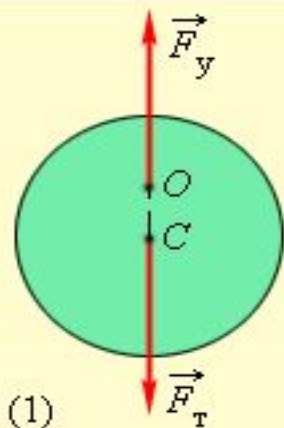


Условия равновесия тела имеющего неподвижную ось вращения:

безразличное равновесие - ось вращения проходит через центр масс

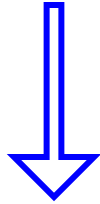
устойчивое равновесие - центр масс находится ниже оси вращения

неустойчивое равновесие – центр масс расположен выше оси вращения

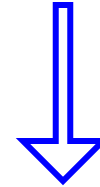


Условия равновесия твёрдого тела

Твердое тело находится в равновесии, если равны нулю равнодействующая приложенных к телу сил и векторная сумма моментов всех сил относительно произвольной оси.



$$\vec{F}_p = \sum \vec{F}_i = 0$$



$$\vec{M}_p = \sum \vec{M}_i = 0$$

