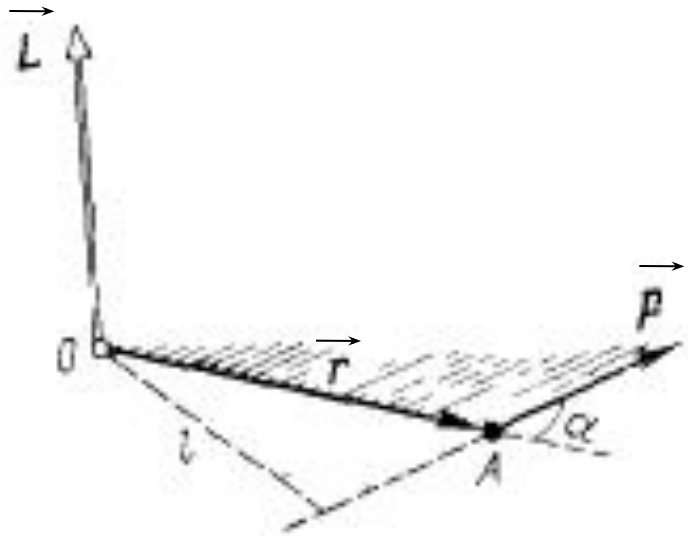


Лекция 7. Динамика вращения твердого тела. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела.



Момент импульса



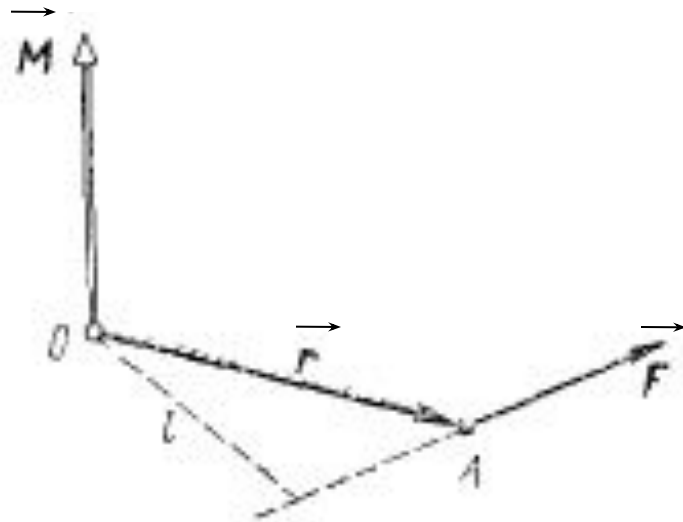
$\vec{r}$ – радиус-вектор,
определяющий положение
точки A
 l – плечо импульса $\vec{p}$

Момент импульса – векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора и импульса.

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}] = r \cdot p \cdot \sin \alpha = p \cdot l$$

$$[L] = \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$$

Момент силы



$\vec{r}$ – радиус-вектор,
определяющий положение
точки A

l – плечо импульса $\vec{F}$

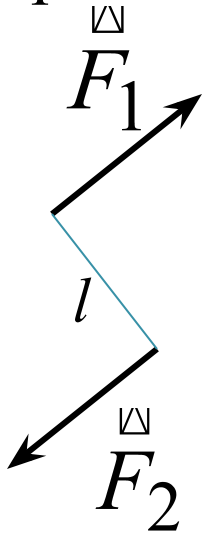
Момент силы – векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора и силы.

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}] = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot l$$

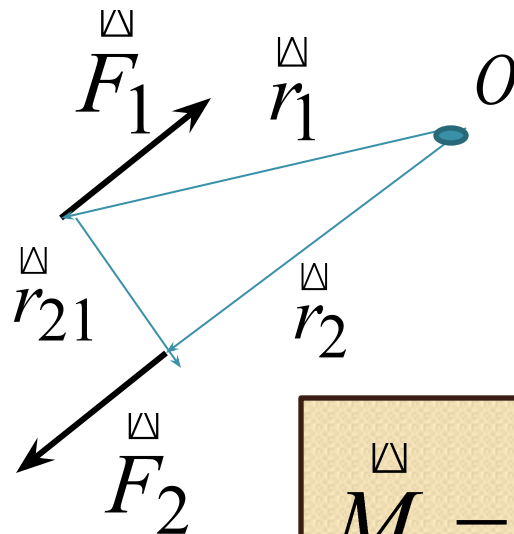
$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Момент пары сил

Пара сил – две равные по величине противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой.



l – плечо пары, расстояние между прямыми, вдоль которых действуют силы.



$$\vec{M} = [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \vec{F}_2] = \dots$$

Момент пары силы

Момент пары сил относительно любой точки O одинаков:

$$\overset{\curvearrowright}{M} = [\overset{\curvearrowright}{r}_{12} \overset{\curvearrowright}{F}_1] = [\overset{\curvearrowright}{r}_{21} \overset{\curvearrowright}{F}_2]$$

Момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой.

Момент пары сил перпендикулярен плоскости, в которой лежат силы, численно равен произведению модуля одной из сил на плечо пары сил.

Момент двух сил, действующих вдоль одной прямой равен нулю!

Уравнение моментов

Продифференцируем момент импульса $\vec{L}$ по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

Уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_1^2 \vec{M} dt$$

Если $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = const$

Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим произвольную систему частиц:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_{внутр} + \vec{M}_{внешн}$$

Суммарный момент внутренних сил $\vec{M}_{внутр}$ равен нулю (согласно III закону Ньютона и определению момента пары сил), следовательно

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внешн}$$

Момент импульса системы может меняться только под действием суммарного момента внешних сил.

Закон сохранения момента импульса

Момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным

$$\vec{L} = \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса выполняется в замкнутых инерциальных системах.

В неинерциальных системах отсчета момент импульса может оставаться постоянным при условии равенства нулю суммарного момента сил инерции.

Момент инерции

- мера инертности тела при вращательном движении, аналог массы тела.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$

Плотности распределения массы

Линейная плотность

$$\tau = \frac{dm}{dl} = \frac{m}{l}$$

Поверхностная плотность

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{m}{S}$$

Объемная плотность

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{V}$$

Момент инерции однородных твердых тел, относительно оси, проходящей через ц.м.

1. Тонкий однородный стержень массой m и длиной l .
2. Тонкий однородный диск (сплошной цилиндр) массой m и радиусом R .
3. Тонкое однородное кольцо (полый цилиндр) массой m и радиусом R .
4. Тонкостенная однородная сфера массой m и радиусом R .
5. Однородный шар массой m и радиусом R .

Теорема Штейнера

Позволяет находить момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс.

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Закон сохранения момента импульса

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = \text{const}$$