

Актуальність

Електродинаміка лежить в основі фізичної оптики, фізики поширення радіохвиль, а також пронизує практично всю фізику, так як майже у всіх розділах фізики доводиться мати справу з електричними полями і зарядами, а часто і з їх нетривіальними швидкими змінами і рухами.

Крім того, **електродинаміка** є зразковою фізичною теорією (і в класичному і в квантовому своєму варіанті), що поєднує дуже велику точність розрахунків і прогнозів з впливом теоретичних ідей, що народилися в її області, на інші галузі теоретичної фізики.

Електродинаміка має величезне значення в техніці і лежить в основі: радіотехніки, електротехніки, різних галузей зв'язку та радіо.

Електродинаміка - розділ фізики, що вивчає електромагнітне поле в найбільш загальному випадку (тобто, розглядаються змінні поля, що залежать від часу) і його взаємодію з тілами, що мають електричний заряд (електромагнітне взаємодія).

Предмет електродинаміки включає зв'язок електричних і магнітних явищ, електромагнітне випромінювання (у різних умовах, як вільне, так і в різноманітних випадках взаємодії з речовиною), електричний струм (взагалі кажучи, змінний) і його взаємодію з електромагнітним полем (електричний струм може бути розглянуто при цьому як сукупність рухомих заряджених частинок)

Закон Кулона для нерухомих зарядів

Дві нерухомих частинки середовища, що володіють зарядами e_1 та e_2 взаємодіють між собою з силою, що аналогічна силі тяжіння між двома масами

$$F = \pm k \frac{e_1 e_2}{r^2} \text{grad } r$$

, де r – відстань між зарядженими частинками.

Сила, що діє на нерухомий заряд залежна від його розташування і величини.
Вона дорівнює

$$F = eE$$

, де E деякий вектор, що називається вектором електричної напруженості.

Закон Кулона, що визначає поле E систему в нерухових в інерціальній системі координат зарядів можна написати у диференціальній формі

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho_e, \operatorname{rot} E = 0,$$

де ρ_e - щільність зарядів.

Диференціальні рівняння гравітаційного поля в Ньютонській механіці

▶ Якщо існує дві матеріальних точки з масами m і m_k , то вони притягуються один до одного за законом Ньютона і на точку m зі сторони точки m_k діє сила, яка дорівнює

$$F_k = -\frac{mm_k}{r_k^2} r_k^0$$

, де r_k відстань між точками m і m_k , f —гравітаційна стала, а r_k^0 - одиничний вектор напрямлення

від m_k до m . Ця сила потенціальна, оскільки $F = \text{grad } U_k$, $U_k = f \frac{mm_k}{r_k}$

Функція $1/r_k$, де

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}$$

У всіх точках x, y, z , для яких $r_k \neq 0$ функція задовільняє рівняння Лапласа

$$\Delta \frac{1}{r_k} = \frac{\partial^2 (1/r_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (1/r_k)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (1/r_k)}{\partial z^2} = 0$$

Звідси потенціал U_k гравітаційного поля одної матеріальної точки задовільняє рівняння $\Delta U_k = 0$ або $\operatorname{div} F_k = 0$, $F_k = \operatorname{grad} U_k$, тобто $\operatorname{rot} F_k = 0$.

Рівняння Максвелла для електромагнітного поля в вакуумі

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0$$

В рівняннях c – константа, яку потрібно розглядати як швидкість світла.

Рівняння описують розповсюдження світлових і електромагнітних хвиль у вакуумі та інші явища.

▶ $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ – довільне диференційоване по координатах векторне поле, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, тому з рівняння витікає, що

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

Якщо $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ в деякий початковий момент часу, то $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ в усі інші моменти часу. Аналогічно з $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Якщо $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ – умова неможливості появи заряду у вакуумі, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ – умова відсутності магнітних зарядів.

Рівняння Максвелла в просторі Мінковського

► Для більш повного роз'яснення фізичного змісту рівняння Максвелла перепишемо ці рівняння в нових позначеннях.

$$\|F_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & H^3 & -H^2 & cE_1 \\ -H^3 & 0 & H^1 & cE_2 \\ H^2 & -H^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Розглянемо чотиривимірний простір з координатами $x^1, x^2, x^3, x^4 = t$, причому x^1, x^2, x^3 будемо розглядати як звичайні ортогональні декартові координати в тривимірному геометричному об'ємі.

Диференціальні рівняння Максвелла в проєкціях на декартові осі координат можна написати в наступному вигляді:

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial y^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial z^k} = 0, \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Загальний розв'язок рівнянь можна представити у вигляді

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial y^i}$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 – 4 довільних функції від x^1, x^2, x^3, x^4 .

Таким чином розв'язок рівнянь Максвелла можна звести до відшукування 4-х функцій A_i задовільняючих рівняння

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial A_4}{\partial x^4} = 0$$

, кожна з яких задовільняє рівняння

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^3)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Перетворення Лоренса в інерціальній системі відліку

В ньютонівській фізиці і кінематичному визначенню швидкості витікає наступний закон додавання швидкостей;

$$v_x = v_y + v$$

v_y -швидкість об'єкта, точки відносно системи y

v_x – швидкість цього ж об'єкта відносно системи x

v – поступальна швидкість інерціальної системи y відносно системи x

Перетворення Лоренца в системах з паралельними осями

Розглянемо остаточне перетворення Лоренца, яке має вигляд

$$y^1 = c_1^1 x^1 + c_4^1 t,$$

$$y^2 = x^2,$$

$$y^3 = x^3,$$

$$t' = c_1^4 x^1 + c_4^4 t$$

Перетворення Лоренца:

$$y^1 = \frac{x^1 - Ut}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{U}{c^2} x^1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$$

і обернені формули

$$x^1 = \frac{y^1 - Ut'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' - \frac{U}{c^2} y^1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$$

Розглянемо вищевказаний зв'язок між відповідними інтервалами часу dt' і dt в точці М, нерухомій в системі К' ($y^1 = \text{const}$), що рухається зі швидкістю U в системі К. Звідси маємо

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \text{ тобто } dt > dt'$$

Аналогічно нехай точка N пов'язана нерухомо з системою К ($x^1 = \text{const}$), тоді отримаємо

$$\widetilde{dt'} = \frac{\widetilde{dt}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \text{ тобто } \widetilde{dt'} > \widetilde{dt}$$

При розгляді різних рухів одної і тої ж точки або при розгляді різних рухів різних точок можна вирахувати кінцеві проміжки власного часу за допомогою інтегралів виду

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int ds = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

$\Delta\tau$ – власний інтервал часу.

Струм зміщення

Наслідок рівнянь Максвелла:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0$$

$$\int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_e dx = - \int_V \operatorname{div} j dx = - \int_\Sigma j_n d\sigma ,$$

де Σ – поверхня, що обмежує V ,

n – зовнішня нормаль проведена до Σ

Сила Лоренца

$$F d\tau = \frac{de}{d\tau} E d\tau = \rho_e E d\tau$$

Якщо крім заряду de в елементі $d\tau$ є ще точки j , то на одиницю об'єму середовища буде діяти пондеромоторна сила

$$F = \rho_e E + \frac{1}{c} (j \times H)$$

що називається силою Лоренса.

Рівняння потоку тепла для провідного середовища

Рівняння потоку тепла для рухливої частинки провідного середовища у власній системі координат записується в загальному випадку наступним чином;

$$dU = \frac{\rho^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}}{\rho} + dq_{\text{неел}}^{(e)} + \frac{1}{\rho} (\tilde{j} \cdot \tilde{E}) dt + dq^{**}$$

де знак тильда вказує на те, що відповідні величини взяті у власній системі координат.

Рівняння Максвелла з урахуванням поляризації і намагніченості

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} B = 0,$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{div} D = 4\pi p_e$$

Де D та B вектори електричної і магнітної індукції.

Замість вектора магнітної ідукції B можна розглядати вектор намагніченості M , який пов'язаний з B

$$B = H + 4\pi M$$

M - розподіл в тілі магнітних диполів

Замість вектора електричної індукції D можна розглядати вектор поляризації P , котрий пов'язаний з D

$$D = E + 4\pi P$$

P - вектор поляризації

Рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\mathcal{F}} E * ds = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma_1} \frac{\partial B_n}{\partial t} d\sigma, \quad \int_{\Sigma} B_n d\sigma = 0, \\ \oint_{\mathcal{F}} H * ds = \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma_1} j_n d\sigma + \frac{1}{c} \int_{\Sigma_1} \frac{\partial D_n}{\partial t} d\sigma, \quad \int_{\Sigma} D_n d\sigma = 4\pi \int_{\Sigma} \rho_e d\tau, \end{array} \right.$$

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho_e d\tau = \int_{\Sigma} j_n d\sigma - \text{умова збереження повного заряду}$$

де $\mathcal{F}$ - замкнутий, спочивають в обраній інерціальній системі координат контур, Σ_1 - поверхня, натягнута на цей контур, Σ - замкнута, яка спочиває в обраній системі координат поверхню, що обмежує обсяг V .

Тензор Маньківського

Як тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля при $f_{ij} \neq 0$ можна взяти тензор Мінковського, який вводиться за визначенням наступним чином:

$$S_i^k = -\frac{1}{4\pi} \left[F_{mi} H^{mk} - \frac{1}{4} \delta_i^k F_{mn} H^{mn} \right]$$

Ця формула є безпосереднім узагальненням формули для тензора енергії - імпульсу електромагнітного поля в порожнечі.

Про додаткових співвідношеннях електродинаміки, замикаючих рівняння Максвелла

Система рівнянь Максвелла не є замкнутою. Для того щоб замкнути систему, необхідні принаймні ще три векторних співвідношення, що зв'язують вектори

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^* &= \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right), \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mu \tilde{\mathbf{H}}, \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}, \end{aligned}$$

де через σ позначений, як і раніше, коефіцієнт провідності, через μ - коефіцієнт магнітної проникності і через ε - діелектрична постійна.

Зауважимо, що закон намагнічування не виконується для дуже сильних магнітних полів, коли вектор намагніченості $M = \frac{\mu-1}{4\pi} H$ досягає максимальної величини при повному насиченні, тоді як величину вектора H можна збільшувати за рахунок зовнішніх струмів.

Приплив енергії від поля до тіла

З урахуванням такого визначення внутрішньої енергії матеріального середовища напишемо тепер формулу для припливу енергії від поля до тіла, віднесеного до одиниці маси середовища:

$$dq^* = \frac{dQ_{\partial l}^*}{dm}, dm = \rho d\tau$$

$d\tau$ — об'єм матеріального середовища

$dQ_{\partial l}^*$ — приріст внутрішньої енергії dU для даної нескінченно малої частки

Магнітна гідродинаміка

У магнітної гідродинаміки приймається, що суцільне середовище є рідиною або газом, в яких відсутня поляризація і намагніченість, але може текти електричний струм, $M = P = 0$, $j^* \neq 0$. Вважаючи $dq^{**} = 0$, будемо вважати, що в розглянутих моделях індивідуальна частка суцільного середовища може обмінюватися з сусідніми частинками і іншими зовнішніми об'єктами тільки механічною і тепловою енергією.

►
Модель ідеального середовища

$$p^{ij} = -p g^{ij}$$

Система рівнянь магнітної гідродинаміки є наближеною в рамках ньютонівської механіки систему, яка складається з наступних рівнянь:

▶ скалярного рівняння нерозривності

$$\text{▶ } -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

векторного рівняння імпульсів

$$\text{▶ } \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v * \nabla) v \right] = -\operatorname{grad} p + \rho_e \left[E + \frac{1}{c} (v \times H) \right] + \frac{1}{c} (j * \times H) + \rho F_{\text{доб.}}$$

скалярного рівняння припливу

$$\text{▶ } dU + p d\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} (\tilde{j} * \tilde{E}) dt + dq_{\text{доб.}}^{(e)}$$

скалярного співвідношення, що виражає другий закон термодинаміки

▶

$$T ds = \frac{1}{\rho} (\tilde{j} * \tilde{E}) dt + dq_{\text{доб.}}^{(e)}$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right)_\rho, \quad -p = \left(\frac{\partial U}{\partial \frac{1}{\rho}} \right)_s.$$

До динамічних і термодинамічних рівнянь потрібно ще додати електродинамічні рівняння, а саме рівняння Максвелла:

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) + \rho_e \mathbf{v}.$$

два скалярних рівняння стану:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \rho_e \end{aligned} \right\}$$

закон Ома в звичайному варіанті магнітної гідродинаміки