

Правила вычисления производных

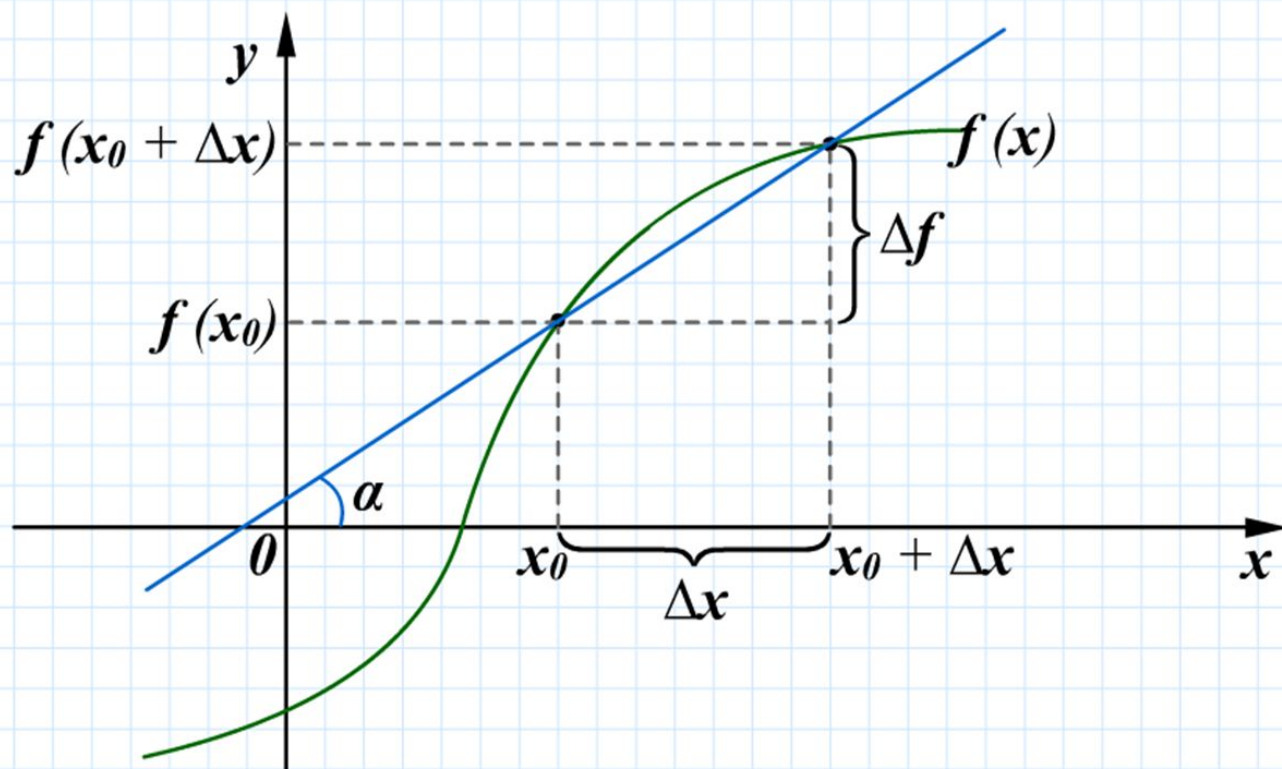
Производная функции

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение приращения функции в этой точке к приращению аргумента при последнем, стремящемся к нулю.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0), \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Если функция в точке x_0 имеет производную, говорят, что она *дифференцируема* в этой точке.

Функция $f'(x)$ определенная во всех точках, в которых функция $f(x)$ дифференцируема, называется *производной* функции $f(x)$.



Производные функций

$$(C)' = 0$$

$$(kx + b)' = k$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$x' = 1$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(Cu)' = C(u)'$$

Пример:

$$(2x^3)' = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

Очевидно, элементарные функции можно складывать друг с другом, умножать, делить — и многое другое. Так появятся новые функции, уже не особо элементарные, но тоже дифференцируемые по определенным правилам.

Производная суммы и разности

Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, производные которых нам известны. К примеру, можно взять элементарные функции, которые рассмотрены выше. Тогда можно найти **производную суммы и разности** этих функций:

1. $(f + g)' = f' + g'$

2. $(f - g)' = f' - g'$

Строго говоря, в алгебре не существует понятия «вычитание». Есть понятие «отрицательный элемент». Поэтому разность $f - g$ можно переписать как сумму $f + (-1) \cdot g$, и тогда останется лишь одна формула — производная суммы.

Пример:

Задача. Найти производные функций:

1. $f(x) = x^2 + \sin x$;

2. $g(x) = x^4 + 2x^2 - 3$.

Решение.

1. Функция $f(x)$ — это сумма двух элементарных функций, поэтому:

$$f'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x;$$

2. Аналогично рассуждаем для функции $g(x)$.

Только там уже три слагаемых (с точки зрения алгебры):

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^4 + 2x^2 - 3)' = (x^4 + 2x^2 + (-3))' = \\ &= (x^4)' + (2x^2)' + (-3)' = 4x^3 + 4x + 0. \end{aligned}$$

Производная

Математика — наука логичная, поэтому многие считают, что если производная суммы равна сумме производных, то производная произведения равна произведению производных. А вот фиг вам! **Производная произведения** считается совсем по другой формуле. А именно:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Формула несложная, но ее часто забывают. И не только школьники, но и студенты. Результат — неправильно решенные задачи.

Пример:

• **Задача.** Найти производные функций:

- $f(x) = x^3 \cdot \cos x$;

- $g(x) = (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x$.

Решение. Функция $f(x)$ представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому все просто:

- $$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 \cdot \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = \\ &= 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = \\ &= x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g'(x) &= ((x^2 + 7x - 7) \cdot e^x)' = (x^2 + 7x - 7)' \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot (e^x)' = \\ &= (2x + 7) \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x = \\ &= e^x \cdot (2x + 7 + x^2 + 7x - 7) = \\ &= (x^2 + 9x) \cdot e^x. \end{aligned}$$

Производная частного

Если есть две функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(x) \neq 0$ на интересующем нас множестве, можно определить новую функцию $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Для такой функции тоже можно найти производную:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Пример:

Найти производные функций: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$

Решение. В числителе и знаменателе каждой дроби стоят элементарные функции, поэтому все, что нам нужно — это формула производной частного:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x} \right)' = \frac{(x^2)' e^x - x^2 (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2x e^x - x^2 e^x}{(e^x)^2}$$

По традиции, разложим числитель на множители — это значительно упростит ответ:

$$g'(x) = \frac{2x e^x - x^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{x e^x (2 - x)}{(e^x)^2} = \frac{x(2 - x)}{e^x}$$

Производная сложной функции

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Прежде всего, обратим внимание на запись $f(g(x))'$. Здесь у нас две функции – f и g , причем функция g , образно говоря, вложена в функцию f .

Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется **сложной** функцией.

- Функция f называется **внешней функцией**, а функция g – **внутренней (или вложенной) функцией**.

Пример:

- Найти производную функции: $y = \sin(3x - 5)$
 - Решение: Под синус вложен многочлен $(3x - 5)$, значит многочлен $(3x - 5)$ является **внутренней**, а синус – **внешней** функцией.
 - Таким образом, находим производную внешней функции и умножаем на производную внутренней:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) (3x - 5)' = \\ &= \cos(3x - 5) \cdot 3 = 3 \cos(3x - 5) \end{aligned}$$

Найти производную функции: $y = \sqrt{\ln x^2}$

- Решение: Под корень квадратный вложен натуральный логарифм, а под него - x^2 .
- Таким образом, данная функция является третьей степени сложности и решение представляет собой произведение производной внешней функции на производные всех входящих в нее функций:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{\ln x^2}} \cdot (\ln x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{1}{x\sqrt{\ln x^2}} \end{aligned}$$

Производная второго порядка

- Производную от данной функции называют **первой производной** или **производной первого порядка**.
- Производную от производной первого порядка называют **производной второго порядка** и т.д., и обозначают y'' или $f''(x)$.

Пример:

- Найти вторую производную функции: $y = 3x^4$
- Решение: $y' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$
 $y'' = 12 \cdot 3x^2 = 36x^2$

Дифференциал.

*Опр.: Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, то произведение $f'(x) \cdot \Delta x$ называется **дифференциалом функции** и обозначается $df(x)$ или dy .*

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

- **Пример:**

Найти дифференциал функции $y = \sin x^2$

- **Решение:**

$$1) \quad y' = (\sin x^2)' = 2x \cos x^2$$

$$2) \quad dy = 2x \cos x^2 dx$$

$$y = \sqrt{x}(x^2 - \sqrt{5})$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$y = \sin 5x$$

$$y = \cos^3 4x$$

$$y = \ln \sin 3x$$

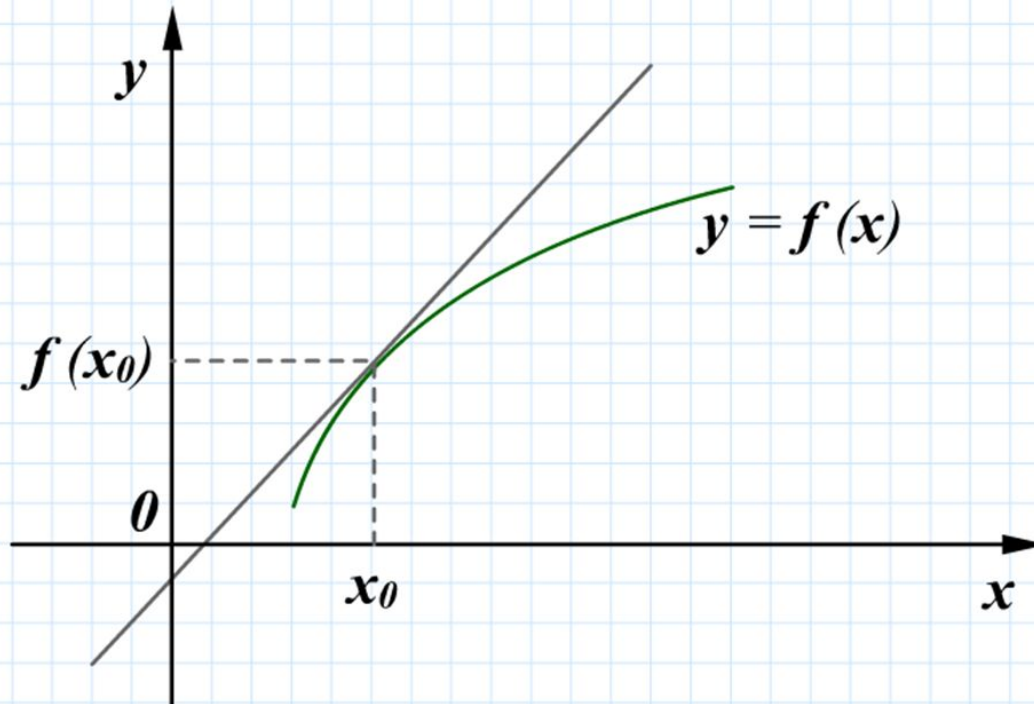
$$y = \ln \cos^4 7x$$

$$y = \ln \frac{x+2}{x-2}$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

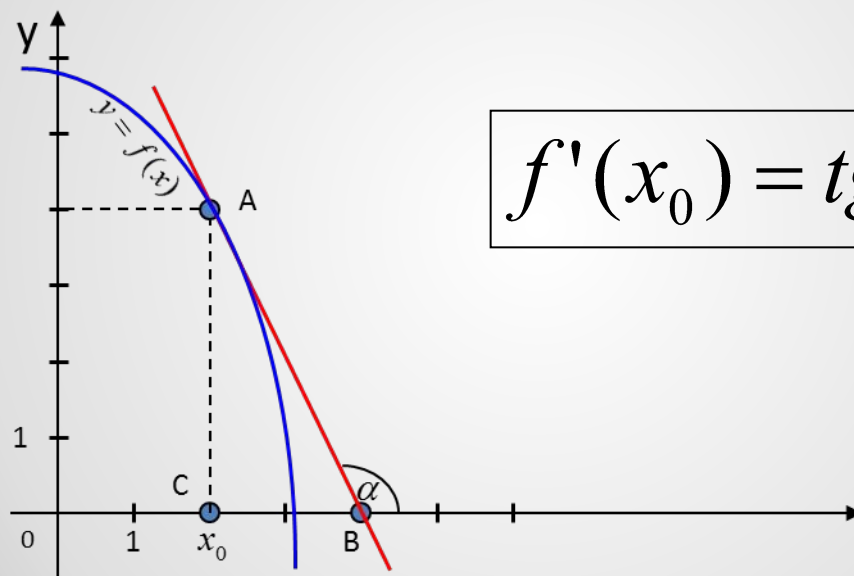
$$y = 2^{\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)}$$

Касательной к графику функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0 , называется прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.



$f'(x_0)$ — угловой коэффициент

Геометрический смысл производной



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = K_{\text{кас}}$$

Уравнение касательной

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то в этой точке к графику можно провести касательную, причем уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Производная функции $y = f(x)$
в точке x_0 выражает скорость
изменения функции в этой точке,
т. е. скорость процесса,
описываемого зависимостью $f(x)$

Физический смысл производной

Так, если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения, то $s'(t)$ — скорость движения в момент времени t

$$v(t) = s'(t)$$

Тогда $s''(t) = v'(t)$ — скорость изменения скорости этого движения, т. е. ускорение:

$$a(t) = v'(t)$$

- Задача 1:
- Тело движется по закону:
- $y = 5 + 5t + 7t^2$
- Чему равна скорость тела через 5 секунд?

- Задача 2: