

Лекция 16

1. Механика жидкостей и газов

2. Специальная теория относительности

1. Механика жидкостей и газов

Основным отличием жидкостей от твердых (упругих) тел является способность легко изменять свою форму. Поэтому жидкость принимает форму сосуда, в который она налита. В жидкость, как и в газообразную среду, можно погружать твердые тела. В отличие от газов жидкости практически несжимаемы.

На тело, погруженное в жидкость или газ, действуют силы, распределенные по поверхности тела. Для описания таких распределенных сил вводится физическая величина – **давление**.

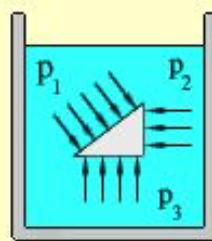
Давление определяется как отношение модуля силы F , действующей перпендикулярно поверхности, к площади S этой поверхности: $p = F/S$

В системе СИ давление измеряется в **паскалях (Па)**: $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$

Часто используются внесистемные единицы: **нормальная атмосфера (атм)** и **миллиметр ртутного столба (мм Hg)**: $1 \text{ атм} = 101325 \text{ Па} = 760 \text{ мм Hg}$

Французский ученый Б.Паскаль в середине XVII века эмпирически установил закон, названный **законом Паскаля**: *Давление в жидкости или газе передается во всех направлениях одинаково и не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.*

Для иллюстрации закона Паскаля рассмотрим прямоугольную призму, погруженную в жидкость. Если предположить, что плотность материала призмы равна плотности жидкости, то призма должна находиться в жидкости в состоянии безразличного равновесия. Это означает, что силы давления, действующие на грани призмы, должны быть уравновешены. Это произойдет только в том случае, если давления, т.е. силы, действующие на единицу поверхности каждой грани, одинаковы: $p_1 = p_2 = p_3 = p$.



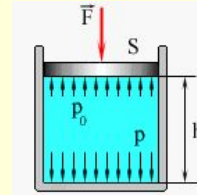
Давление жидкости на дно или боковые стенки сосуда зависит от высоты столба жидкости. Сила давления на дно цилиндрического сосуда высоты h и площади основания S равна весу столба жидкости mg , где $m = \rho ghS$ — масса жидкости в сосуде, ρ — плотность жидкости. Следовательно

$$p = \frac{\rho ghS}{S} = \rho gh.$$

Такое же давление на глубине h в соответствии с законом Паскаля жидкость оказывает и на боковые стенки сосуда. Давление столба жидкости ρgh называют **гидростатическим давлением**.

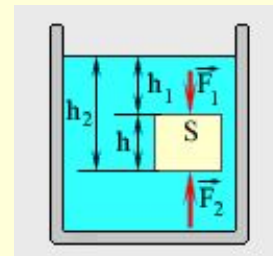
Если жидкость находится в цилиндре под поршнем, то действуя на поршень некоторой внешней силой $\vec{F}$, можно создавать в жидкости дополнительное давление $p_0 = F / S$, где S – площадь поршня.

Таким образом, полное давление в жидкости на глубине h можно записать в виде: $p = p_0 + \rho gh$.



Из-за разности давлений в жидкости на разных уровнях возникает **выталкивающая** или **архимедова** сила $\vec{F}_A$.

Поясним появление архимедовой силы.



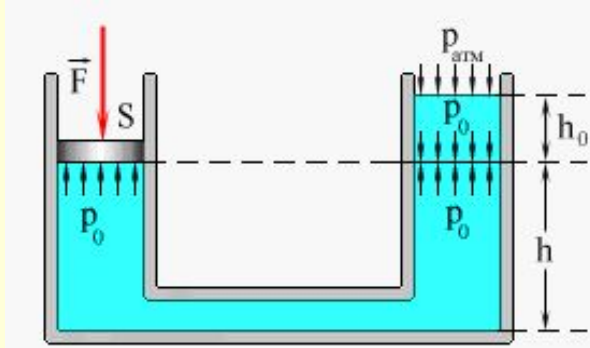
В жидкость погружено тело в виде прямоугольного параллелепипеда высотой h и площадью основания S . Разность давлений на нижнюю и верхнюю грани есть: $\Delta p = p_2 - p_1 = \rho gh$.

Поэтому выталкивающая сила $\vec{F}_A$ будет направлена вверх, и ее модуль равен $F_A = F_2 - F_1 = S\Delta p = \rho gSh = \rho gV$, где V – объем вытесненной телом жидкости, а ρV – ее масса.

Архимедова сила, действующая на погруженное в жидкость (или газ) тело, равна весу жидкости (или газа), вытесненной телом. Это утверждение, называемое **законом Архимеда**, справедливо для тел любой формы.

Из закона Архимеда вытекает, что если средняя плотность тела ρ_t больше плотности жидкости (или газа) ρ , тело будет опускаться на дно. Если же $\rho_t < \rho$, тело будет плавать на поверхности жидкости. Объем погруженной части тела будет таков, что вес вытесненной жидкости равен весу тела. Для подъема воздушного шара в воздухе его вес должен быть меньше веса вытесненного воздуха. Поэтому воздушные шары заполняют легкими газами (водородом, гелием) или нагретым воздухом.

Из выражения для полного давления в жидкости $p = p_0 + \rho gh$ вытекает, что в **сообщающихся сосудах** любой формы, заполненных однородной жидкостью, давления в любой точке на одном и том же уровне одинаковы.



Если оба вертикально расположенных цилиндра сообщающихся сосудов закрыть поршнями, то с помощью внешних сил, приложенных к поршням, в жидкости можно создать большое давление p , во много раз превышающее гидростатическое давление ρgh в любой точке системы. Тогда можно считать, что во всей системе устанавливается одинаковое давление p .

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{или} \quad F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}.$$

Если поршни имеют разные площади S_1 и S_2 , то на них со стороны жидкости действуют разные силы $F_1 = pS_1$ и $F_2 = pS_2$. Если $S_2 \gg S_1$, то $F_2 \gg F_1$. Устройства такого рода называют **гидравлическими машинами**. Выигрыш в силе обязательно сопровождается таким же проигрышем в расстоянии. При этом произведение силы на расстояние остается неизменным: $F_1 h_1 = F_2 h_2$.

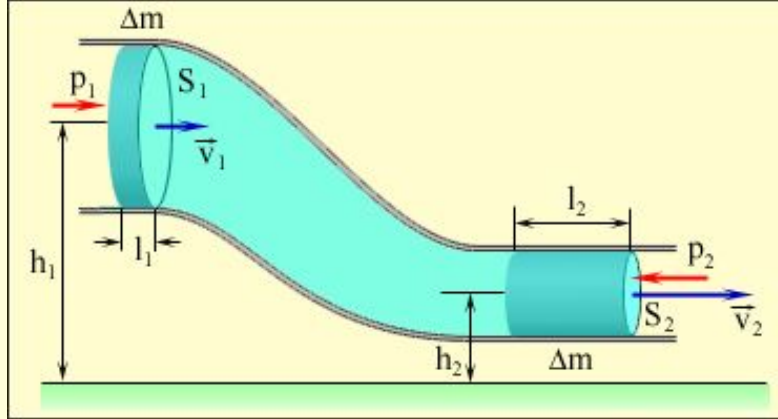
Это правило выполняется для любых идеальных машин, в которых не действуют силы трения. Оно называется «**золотым правилом механики**».

Гидравлические машины, используемые для подъема грузов, называются домкратами. Они широко применяются также в качестве гидравлических прессов. В качестве жидкости обычно используются минеральные масла.

Элементы гидро- и аэродинамики

Движение жидкостей или газов представляет собой сложное явление. Для его описания жидкость (или газ) предполагаются **несжимаемыми** и **идеальными** (т.е. без внутреннего трения между движущимися слоями). При движении идеальной жидкости не происходит превращения механической энергии во внутреннюю, поэтому выполняется закон сохранения механической энергии. Следствием этого закона для **стационарного потока** идеальной и несжимаемой жидкости является **уравнение Бернулли** (1738 г.). Стационарным принято называть такой поток жидкости, в котором не образуются вихри. В стационарном потоке частицы жидкости перемещаются по неизменным во времени траекториям, которые называются **линиями тока**. Опыт показывает, что стационарные потоки возникают только при достаточно малых скоростях движения жидкости.

Рассмотрим стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости по трубе переменного сечения. Различные части трубы могут находиться на разных высотах.



За промежуток времени Δt жидкость в трубе сечением S_1 переместится на $l_1 = v_1 \Delta t$, а в трубе сечением S_2 – на $l_2 = v_2 \Delta t$, где v_1 и v_2 – скорости частиц жидкости в трубах. Условие несжимаемости записывается в виде: $\Delta V = l_1 S_1 = l_2 S_2$ или $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Здесь ΔV – объем жидкости, протекающей через сечения S_1 и S_2 .

Таким образом, при переходе жидкости с участка трубы с большим сечением на участок с меньшим сечением скорость течения возрастает, т.е. жидкость движется с ускорением. Следовательно, на жидкость действует сила. В горизонтальной трубе эта сила может возникнуть только из-за разности давлений в широком и узком участках трубы. Давление в широком участке трубы должно быть больше чем в узком участке. Если участки трубы расположены на разной высоте, то ускорение жидкости вызывается совместным действием силы тяжести и силы давления. Сила давления – это упругая сила сжатия жидкости. Несжимаемость жидкости означает лишь то, что появление упругих сил происходит при пренебрежимо малом изменении объема любой части жидкости.

Так как жидкость предполагается идеальной, она течет по трубе без трения. Поэтому к ее течению можно применить закон сохранения механической энергии.

При перемещении жидкости силы давления совершают работу:

$$\Delta A = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = (p_1 - p_2) \Delta V.$$

Работа ΔA сил давления равна изменению потенциальной энергии упругой деформации жидкости, взятому с обратным знаком.

Изменения, произошедшие за время Δt в выделенной части жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2 в начальный момент времени, при стационарном течении сводятся к перемещению массы жидкости $\Delta m = \rho \Delta V$ (ρ – плотность жидкости) из одной части трубы сечением S_1 в другую часть сечением S_2 . Закон сохранения механической энергии для этой массы имеет вид: $E_2 - E_1 = \Delta A = (p_1 - p_2) \Delta V$, где E_1 и E_2 – полные механические энергии массы Δm в поле тяготения:

$$E_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1; \quad E_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Это и есть **уравнение Бернулли**. Из него следует, что сумма

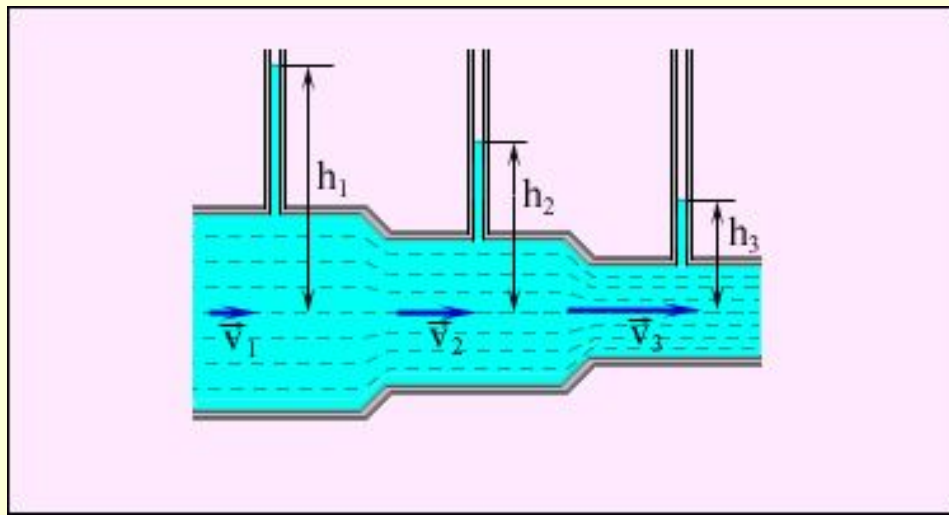
$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const.}$$

остаётся неизменной вдоль всей трубы. В частности, для горизонтально расположенной трубы ($h_1 = h_2$) уравнение Бернулли принимает вид:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.}$$

Величина p – статическое давление в жидкости. Оно может быть измерено с помощью манометра, перемещающегося вместе с жидкостью. Практически давление в разных сечениях трубы измеряется с помощью манометрических трубок, вставленных через боковые стенки в поток жидкости, так чтобы нижние концы трубок были параллельны скоростям частиц жидкости. Из уравнения Бернулли следует:

Давление в жидкости, текущей по горизонтальной трубе переменного сечения, больше в тех сечениях потока, в которых скорость ее движения меньше, и наоборот, давление меньше в тех сечениях, в которых скорость больше.



Если сечение потока жидкости достаточно велико, то уравнение Бернулли следует применять к **линиям тока**, т.е. линиям, вдоль которых перемещаются частицы жидкости при стационарном течении. Например, при истечении идеальной несжимаемой жидкости из отверстия в боковой стенке или дне широкого сосуда линии тока начинаются вблизи свободной поверхности жидкости и проходят через отверстие.

Поскольку скорость жидкости вблизи поверхности в широком сосуде пренебрежимо мала, то уравнение Бернулли принимает вид:

$$\rho gh + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0,$$

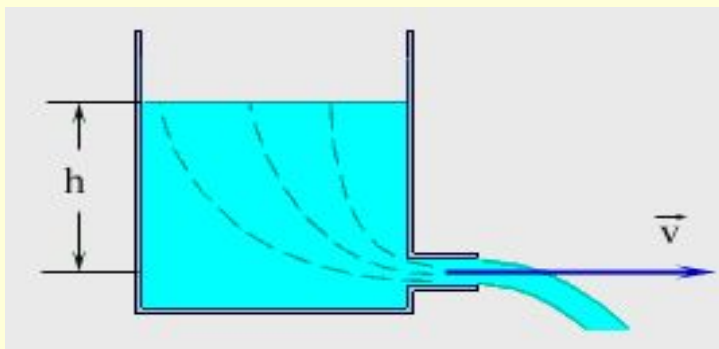
где p_0 – атмосферное давление, h – перепад высоты вдоль линии тока.

Таким образом,

$$v = \sqrt{2gh}.$$

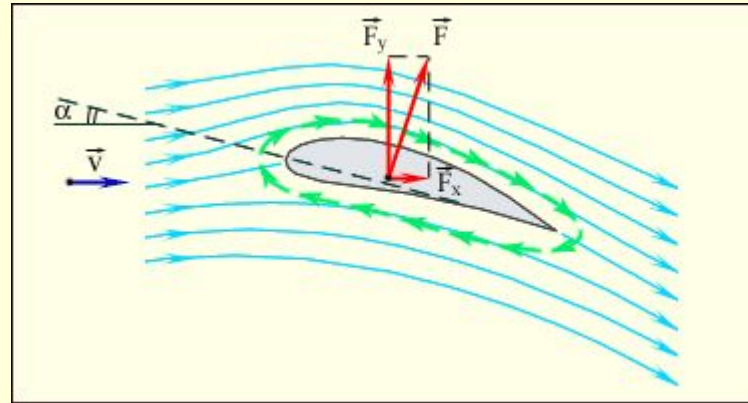
Это выражение для скорости истечения называют **формулой Торричелли**.

Скорость истечения идеальной жидкости из отверстия в сосуде такая же, как и при свободном падении тела с высоты h без начальной скорости.



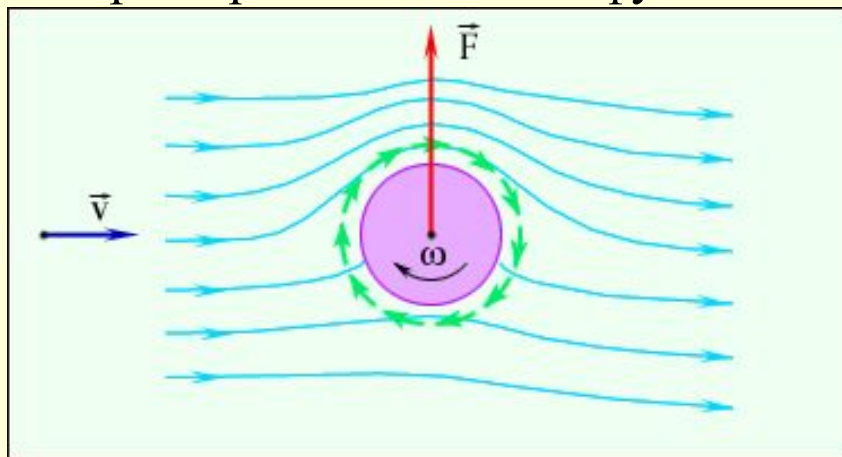
Уравнение Бернулли можно применять к достаточно широкому классу задач аэродинамики.

Одной из таких задач является изучение сил, действующих на крыло самолета. Уравнение Бернулли позволяет дать качественное объяснение возникновению **подъемной силы** крыла.



Из-за специального профиля крыла и наличия **угла атаки**, т.е. угла наклона крыла по отношению к набегающему потоку воздуха, скорость воздушного потока над крылом оказывается больше, чем под крылом. Из уравнения Бернулли следует, что давление в нижней части крыла будет больше, чем в верхней; в результате появляется сила $\vec{F}$, действующая на крыло. Вертикальная составляющая $\vec{F}_y$ этой силы называется подъемной силой. Она позволяет скомпенсировать силу тяжести, действующую на самолет, и тем самым она обеспечивает возможность полета тяжелых летательных аппаратов в воздухе. Горизонтальная составляющая $\vec{F}_x$ представляет собой силу **сопротивления** среды.

Циркуляция воздуха, обусловленная силами вязкого трения, возникает и вокруг вращающегося тела (например, цилиндра). При вращении цилиндр увлекает прилегающие слои воздуха, вызывая его циркуляцию. Если такой цилиндр установить в набегающем потоке воздуха, то возникнет сила бокового давления, аналогичная подъемной силе крыла самолета. Это явление называется **эффектом Магнуса**. Эффект Магнуса проявляется, например, при полете закрученного мяча при игре в теннис или футбол.



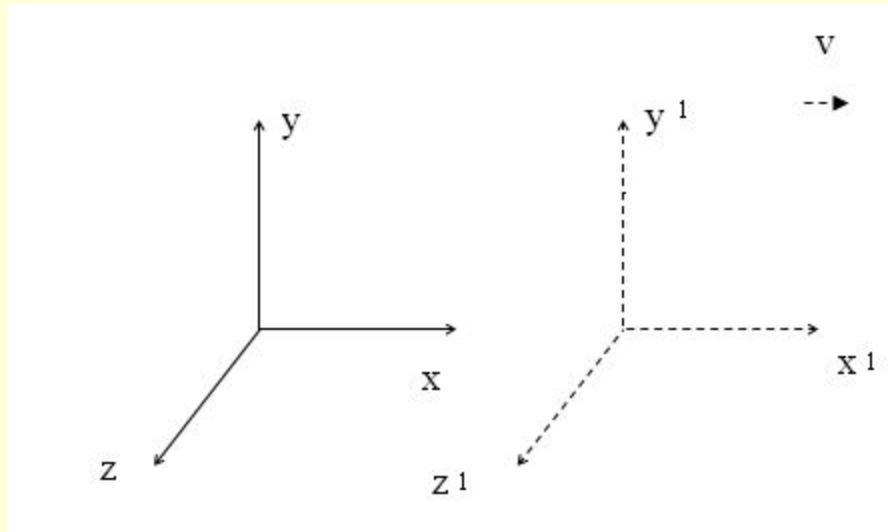
Итак, во многих явлениях аэродинамики существенную роль играют силы вязкого трения. Они приводят к возникновению циркулирующих потоков воздуха вокруг крыла самолета или вокруг вращающегося тела, к появлению силы сопротивления среды и т. д. Уравнение Бернулли не учитывает сил трения. Его вывод основан на законе сохранения механической энергии при течении жидкости или газа. Поэтому с помощью уравнения Бернулли нельзя дать исчерпывающего объяснения явлений, в которых проявляются силы трения.

2. Основы специальной теории относительности

Постулаты специальной теории относительности Эйнштейна

1. *Принцип относительности*: **Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета**
2. *Принцип постоянства скорости света*: **Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света $c = 2,9979246 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$**

Преобразования координат и времени



(1) При $t = t' = 0$ начала координат обеих систем совпадают: $x_0 = x'_0 = 0$

$$(2) \quad x_0 = v_0 \cdot t \qquad (2') \quad x'_0 = -v_0 \cdot t'$$

Чтобы выполнялись (1) и (2), для любой точки должно быть:

$$(3) \quad x = \gamma \cdot (x' + v_0 \cdot t') \qquad (3') \quad x' = \gamma \cdot (x - v_0 \cdot t)$$

Пусть при $t = t' = 0$ в начале координат произойдет вспышка света. После этого будет двигаться «фронт световой волны» - граница светлой и темной зон пространства.

Поскольку системы координат равноправны, а скорость света одинакова в обеих системах координат, то координата «фронта»:

$$(4) \quad x = c \cdot t; \qquad (4') \quad x' = c \cdot t'$$

$$(3) \quad x = \gamma \cdot (x' + v_0 \cdot t') \qquad (3') \quad x' = \gamma \cdot (x - v_0 \cdot t)$$

$$(4) \quad x = c \cdot t; \qquad (4') \quad x' = c \cdot t'$$

$$(5) \quad c \cdot t = \gamma \cdot (c \cdot t' + v_0 \cdot t') \qquad (5') \quad c \cdot t' = \gamma \cdot (c \cdot t - v_0 \cdot t)$$

Вынесем за скобки время и перемножим (5) и (5')

$$c^2 = \gamma^2 \cdot (c^2 - v_0^2)$$
$$\gamma = 1/(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$$

Преобразования Лоренца

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}' + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t}'}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_0^2 / \mathbf{c}^2}}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}'$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}' + (\mathbf{v}_0 / \mathbf{c}^2) \cdot \mathbf{x}'}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_0^2 / \mathbf{c}^2}}$$

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_0^2 / \mathbf{c}^2}}$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z}$$

$$\mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t} - (\mathbf{v}_0 / \mathbf{c}^2) \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_0^2 / \mathbf{c}^2}}$$

Относительность одновременности

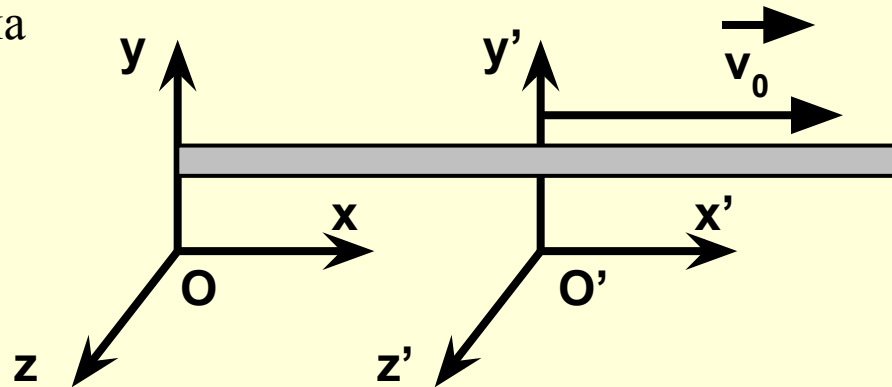
Два события в нештрихованной системе отсчета происходят одновременно, но в точках с разными координатами x .

В штрихованной системе отсчета они произойдут в разное время t' .

$$t' = \frac{t - (v_0/c^2) \cdot x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Относительность длины

Рассмотрим стержень, неподвижный в нештрихованной системе отсчета. Его длина $\Delta x = X_{\text{конца}} - X_{\text{начала}}$



Если в штрихованной системе отсчета (где стержень движется) одновременно ($t = \text{const}$) измерить $x'_{\text{конца}}$ и $x'_{\text{начала}}$, то с учетом, что $\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$

Относительность промежутка времени

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}$$

Интервал

Что не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую?

Из преобразований Лоренца можно получить

$$c^2 \cdot t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 \cdot t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Эта величина называется **интервал s**

$s^2 > 0 \Rightarrow s$ — действительное число $\Rightarrow$ интервал времениподобный, может разделять события, имеющие причинно-следственную связь

$s^2 = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow$ интервал светоподобный: движение луча света

$s^2 < 0 \Rightarrow s$ — мнимое число $\Rightarrow$ интервал пространственноподобный, не может разделять события, имеющие причинно-следственную связь

Преобразование скоростей

$$x = \frac{x' + v_0 \cdot t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{x' + v_0 \cdot t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \right) = \frac{dt'}{dt} \cdot \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{dt'}{dt} \cdot \frac{v'_x + v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$t = \frac{t' + (v_0/c^2) \cdot x'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 + (v_0/c^2) \cdot \frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{1 + (v_0/c^2) \cdot v'_x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$v_x = \frac{dt'}{dt} \cdot \frac{v'_x + v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{v'_x + v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + (v_0/c^2) \cdot v'_x}$$

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}} \quad v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}} \quad v_z = \frac{v'_z \cdot \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}}$$

Релятивистское выражение для импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}$$

Релятивистское выражение для массы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}$$

Релятивистское выражение для энергии

Сила $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$

$$dA = F v dt = v dp = v d(mv) = v^2 dm + m v dv =$$
$$= m_0 v^2 d(1 - v^2/c^2)^{-1/2} + m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2} v dv =$$
$$= m_0 v^3 (1 - v^2/c^2)^{-3/2} + m_0 v (1 - v^2/c^2)^{-1/2} dv = \frac{m_0 v dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$dA = c^2 dm = d(mc^2)$$

$$dA = dE_k$$

$$dE_k = d(mc^2)$$

$$E_k = mc^2 - \text{const}$$

Поскольку

$$E_k(v_0 = 0) = 0 \Rightarrow \text{const} = m_0 c^2$$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

$E = mc^2$ – полная энергия

Взаимосвязь энергии и импульса

$$E=mc^2 ; p=mv \Rightarrow p = \frac{E}{c^2} v$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} \quad v^2 = \frac{p^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}$$

$$p^2 = \frac{p^2 E^2}{(p^2 + m_0^2 c^2) c^2} \Rightarrow W = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 = \text{inv}$$

- эта разность не меняется при переходе от одной системы координат к другой – она инвариантна относительно преобразования системы координат.