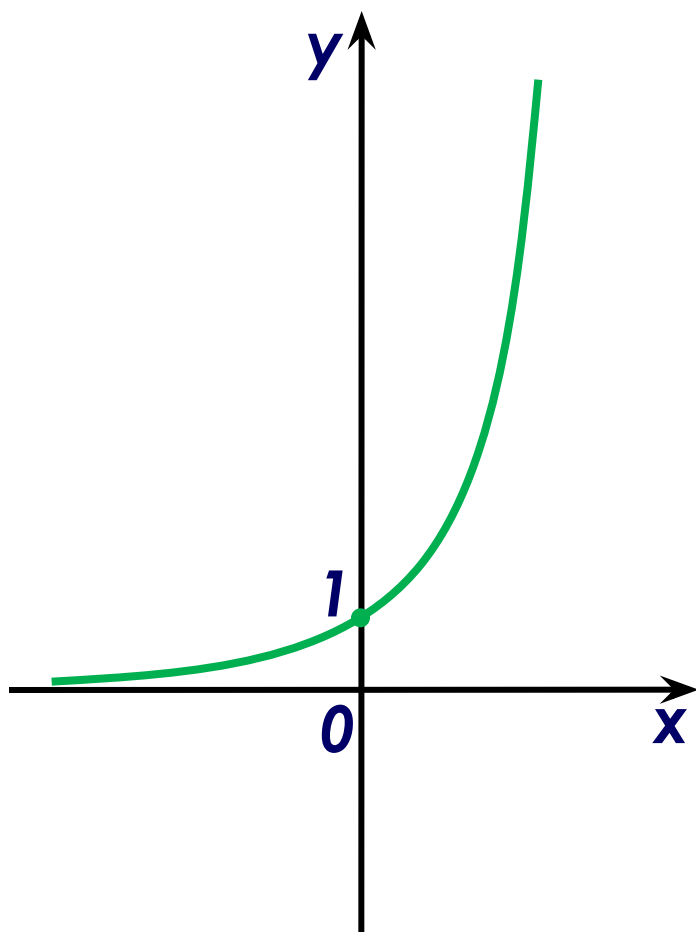


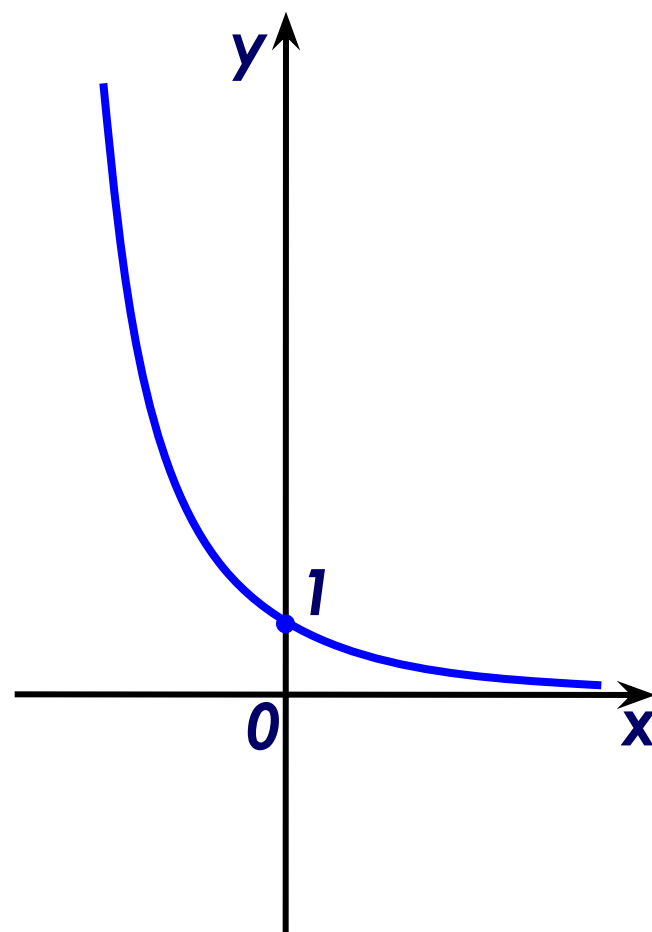
График показательной функции

$$y = a^x, a \neq 1, a > 0$$

$$y = a^x, a > 1$$



$$y = a^x, 0 < a < 1$$



Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными уравнениями**

$$a^{f(x)} = a^{h(x)}$$



$$f(x) = h(x)$$

Методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.



Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} = 64$$

$$2^{2x-4} = 2^6$$

$$2x - 4 = 6$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x - 3,5 = 0,5$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Пример 3

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$$

$$x^2 - 3x = 3x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Ответ : 2; 4



Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$(2^2)^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$ тогда

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$t_1 = -6$ не удовлетворяет условию $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

Ответ : 2



Показательные уравнения. Примеры

Пример 9. Решить уравнение $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$

Решение

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x &= 9 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot (2 \cdot 3^2 - 6 - 3^1) = 9 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 9 = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3^{x-1} &= 1 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Ответ: $\{1\}$.

Пример 10. Решить уравнение $4^{x-1} + 4^{x-\frac{1}{2}} + 2^{2x-3} = 14$

Решение

$$\begin{aligned} 4^{x-1} + 4^{x-\frac{1}{2}} + 2^{2x-3} &= 14 \Leftrightarrow 4^{x-1} + 4^{x-\frac{1}{2}} + 4^{x-\frac{3}{2}} = 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4^{x-\frac{3}{2}} \cdot \left(4^{\frac{1}{2}} + 4^1 + 1 \right) &= 14 \Leftrightarrow 4^{x-\frac{3}{2}} \cdot 7 = 14 \Leftrightarrow 2^{2x-3} = 2 \Leftrightarrow 2x-3=1 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $\{2\}$.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 5 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot 9^{x-1} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot \frac{9^x}{9} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 9^x = 0$$

Разделим на 9^x , тогда

$$\frac{5 \cdot 5^{2x}}{9^x} - \frac{13 \cdot 15^x}{9^x} + \frac{6 \cdot 9^x}{9^x} = 0$$

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 6 = 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t$, где $t > 0$, тогда

$$5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{3}{5}, \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \quad \text{или} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$$

$$x = -1$$

$$x = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

Ответ : $-1; \log_{\frac{5}{3}} 2$.



чисел.

Вернёмся к функции $y = 2^x$, построим её график. Для этого составим таблицу значений функции $y = 2^x$:

93

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(-1; \frac{1}{2})$, $(2; 4)$, $(-2; \frac{1}{4})$, $(3; 8)$, $(-3; \frac{1}{8})$ на координатной плоскости (рис. 41), они намечают некоторую линию, проведём её — это график функции $y = 2^x$ (рис. 42).

Свойства функции $y = 2^x$:

- 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 2) не является ни чётной, ни нечётной;
- 3) возрастает;
- 4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- 6) непрерывна;
- 7) $E(f) = (0; +\infty)$;
- 8) выпукла вниз.

Строгие доказательства перечисленных свойств функции $y = 2^x$ приводят в курсе высшей математики. Часть этих свойств мы в той или иной мере обсудили ранее, часть из них наглядно демонстрирует построенный график (см. рис. 42). Например, отсутствие чётности или нечётности функции геометрически связано с отсутствием симметрии графика соответственно относительно оси y или относительно начала координат.

Покажем для примера, как можно доказать возрастание функции $y = 2^x$ при $x > 0$. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Если оба числа — рациональные, то выше мы уже доказали, что в этом случае выполняется неравенство $2^{x_1} < 2^{x_2}$. Пусть x_1 — рациональное, а x_2 — иррациональное число: $x_2 = \alpha$. Рассмотрим последовательность

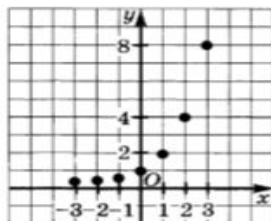


Рис. 41

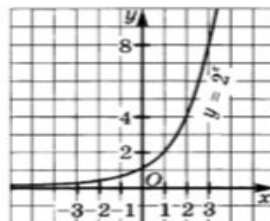


Рис. 42

Рассмотрим теперь функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, составим для неё таблицу значений:

x	0	-1	1	-2	2	-3	3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки $(0; 1)$, $(-1; 2)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $(-2; 4)$, $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, $(-3; 8)$, $\left(3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 44). Они намечают некоторую линию, проведём её — это график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 45).

95

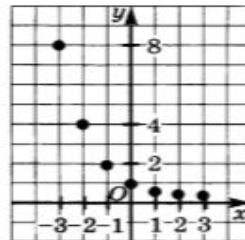


Рис. 44

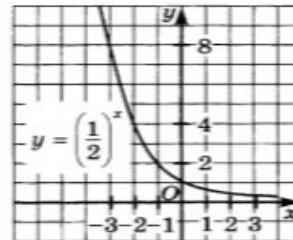


Рис. 45

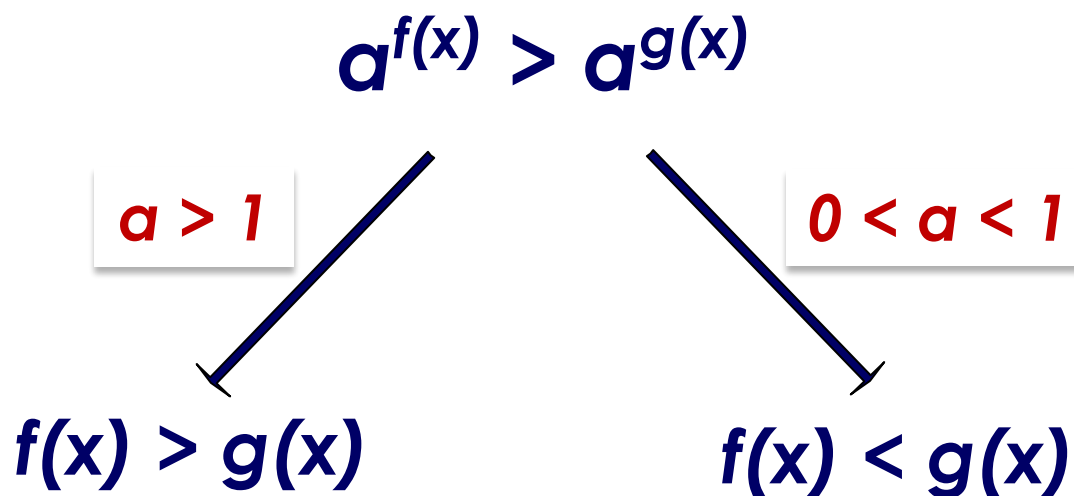
Свойства функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

- 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 2) не является ни чётной, ни нечётной;
- 3) убывает;
- 4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- 6) непрерывна;
- 7) $E(f) = (0; +\infty)$;
- 8) выпукла вниз.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $0 < a < 1$. На рис. 46 в одной системе координат построены графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**



или

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

т.к. функция $y = 2^t$ монотонно
возрастает на $\mathbb{R}$, то

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

Ответ : $(5; +\infty)$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

т.к. функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

монотонно убывает на $\mathbb{R}$, то

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

Ответ : $(2; +\infty)$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad | : (3^{3x}) \quad \text{т.к. } 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2$$

$$\text{Пусть } \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \text{ где } t > 0$$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 2)$$

$$\text{т.к. } t^2 + t + 2 > 0 \text{ для любых } t, \text{ то } t - 1 > 0$$

$$t > 1$$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

т.к. $a = \frac{2}{3} < 1$, то ф-ция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывает на R

$$x < 0$$

Ответ : $(-\infty; 0)$.



§ 13. Показательные неравенства

Решите неравенство:

13.1. а) $2^x \geq 4$; б) $2^x < \frac{1}{2}$; в) $2^x \leq 8$; г) $2^x > \frac{1}{16}$.

13.2. а) $3^x \leq 81$;

в) $5^x > 125$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$;

г) $(0,2)^x \leq 0,04$.

13.3. а) $3^{2x-4} \leq 27$;

в) $5^{4x+2} \geq 125$;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \frac{4}{9}$;

г) $(0,1)^{5x-9} < 0,001$.

13.4. а) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$;

в) $9^{x-1} \geq 9^{-2x+8}$;

б) $0,5^{4x+3} \geq 0,5^{6x-1}$;

г) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-3x-0,5} < \left(\frac{7}{11}\right)^{x+1,5}$

○13.5. а) $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$;

в) $11^{-7x+1} \leq 121^{-2x-10}$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3x+1} \geq \left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$;

г) $0,09^{5x-1} < 0,3^{x+7}$.

○13.6. а) $2^{3x+6} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$;

в) $25^{-x+3} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$;

б) $\left(\frac{7}{12}\right)^{-2x+3} > \left(\frac{12}{7}\right)^{3+2x}$;

г) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-8} < \left(\frac{9}{25}\right)^{-x+3}$.