Тема: Угол между плоскостями. Урок 3

«Решаем С2 ЕГЭ»

Разработала: Куракова Е. В., учитель математики

МБОУ СОШ с УИОП №38

им.Е.А. Болховитинова

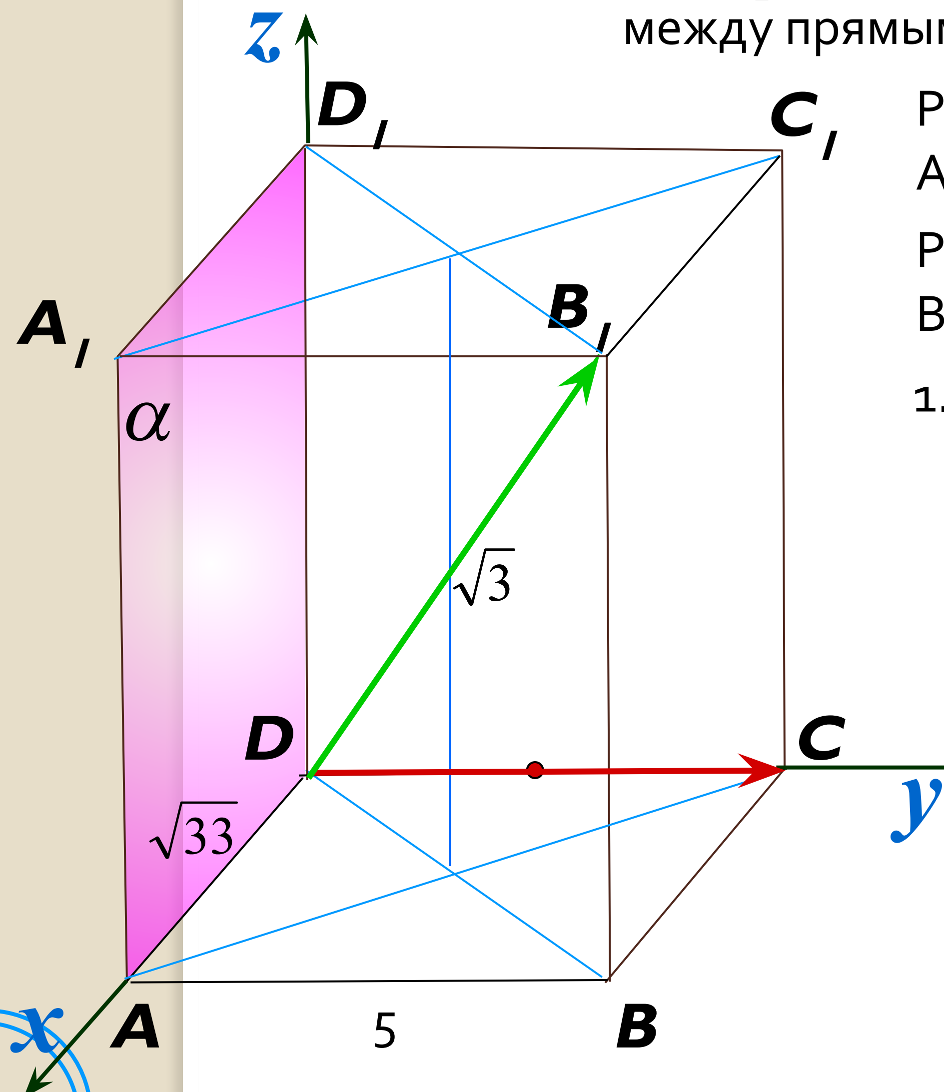
11 класс физико-математического профиля

Цели:

- Повторить понятие угла между плоскостями, нормали к плоскости.
- Закрепить методы введение координат
- Рассмотреть примеры С2 ЕГЭ

Блитц-опрос по терминам

1. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.



Расстояние между прямыми A_1C_1 и BD?

Решим задачу методом координат. Введем нормали к плоскостям.

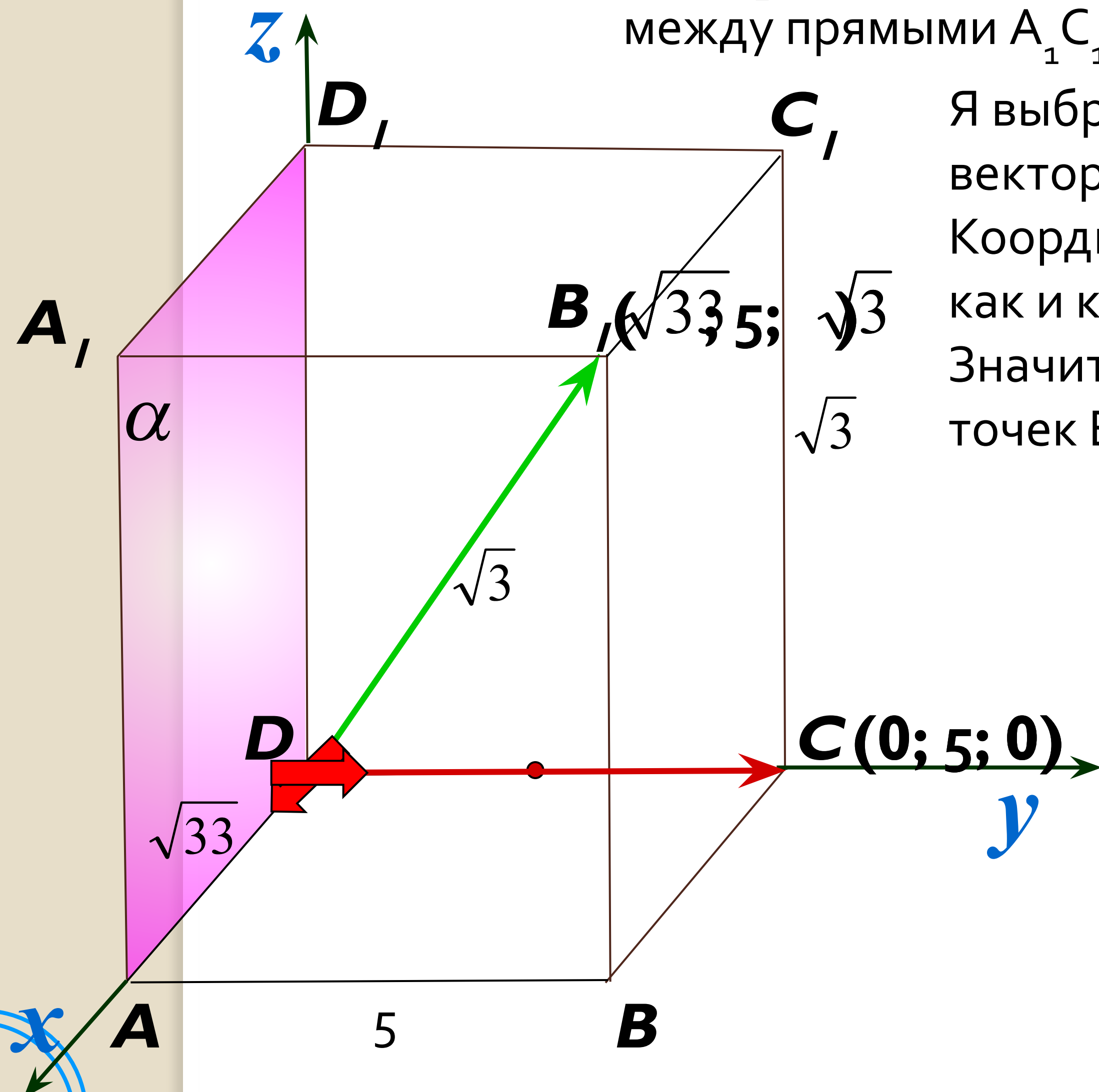
1. Нормаль к плоскости ADD_1

$$\vec{DC} \perp \alpha$$

2. Нормаль ко второй плоскости β, которую я и строить не берусь… Но по условию это сечение проходит перпендикулярно прямой B_1D. Значит, B_1D перпендикуляр к плоскости. Выберем нормаль B_1D.

$$\vec{DB_1} \perp \beta$$

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.



Я выбрала очень удобно нормальные векторы. Ведь это радиус-векторы. Координаты радиус-вектора такие же, как и координаты конца вектора. Значит, нам надо найти координаты точек B_1 и C.

1. $\overrightarrow{DB_1}$

2. $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DB_1}(\sqrt{33};\ 5;\ \sqrt{3})$ $\overrightarrow{DC}(0;\ 5;\ 0)$

3. $$\cos\varphi=\frac{|x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|\sqrt{33}\cdot 0+5\cdot 5+\sqrt{3}\cdot 0\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{33}\right)^2+5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{0^2+5^2+0^2}}$$

$$=\frac{|0+25+0|}{\sqrt{33+25+3}\cdot\sqrt{25}}=\frac{25}{\sqrt{61}\cdot 5}=\frac{5}{\sqrt{61}}.$$

$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{61}}$$

Теперь найдем тангенс.

$$tg^2A+1=\frac{1}{cos^2A}$$

$$tg^2\varphi+1=\frac{1}{\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)^2}$$

$$tg^2\varphi+1=\frac{61}{25}$$

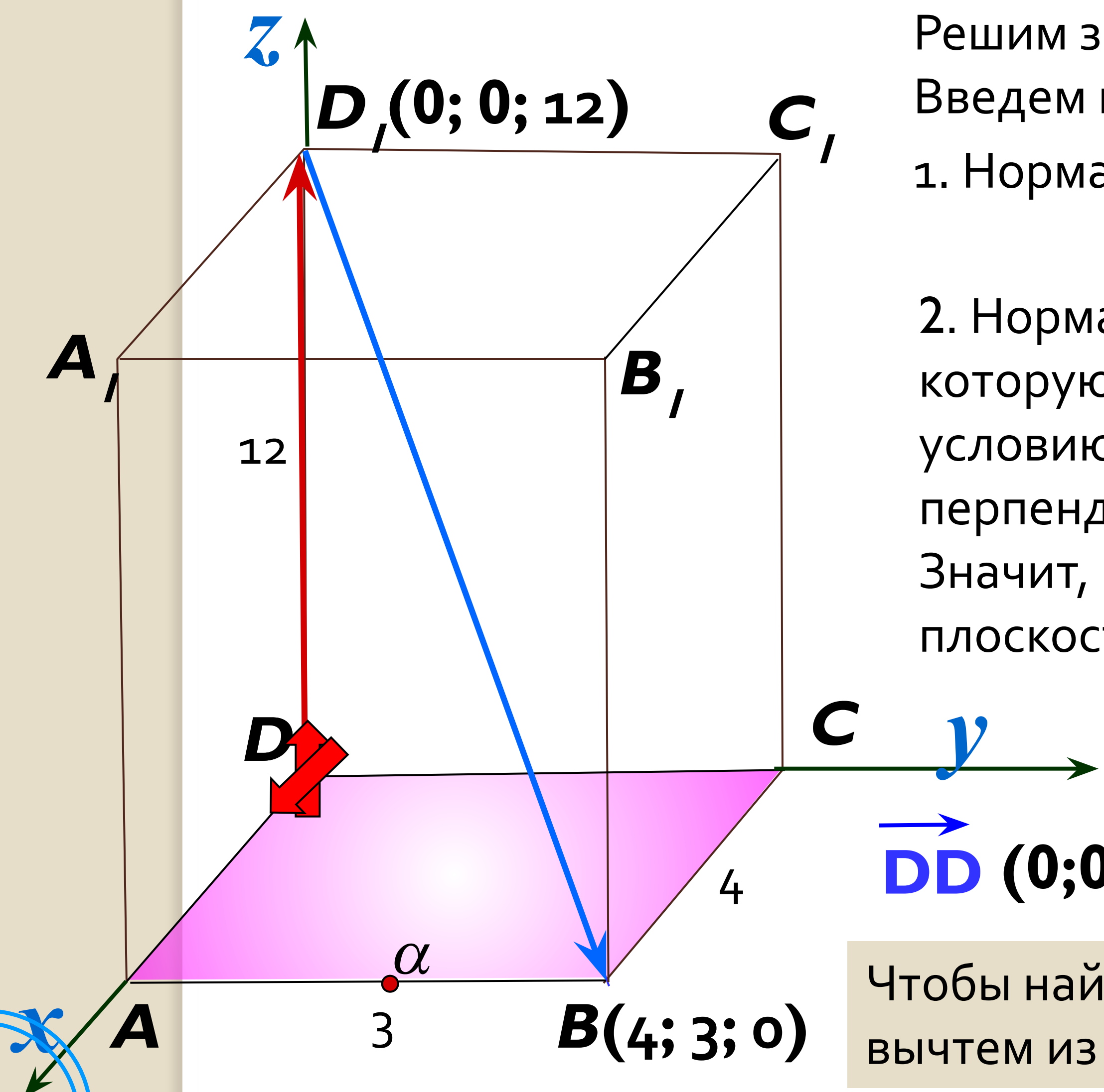
$$tg^2\varphi=\frac{61}{25}-1$$

$$tg^2\varphi=\frac{36}{25}$$

$$tg\varphi=\pm\frac{6}{5}$$ $$tg\varphi=\frac{6}{5}$$

т.к. φ – острый угол

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 3$, $BC = 4$, $AA_1 = 12$. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол образованный этой плоскостью с основанием параллелепипеда.



Решим задачу методом координат. Введем нормали к плоскостям.

1. Нормаль к плоскости ABC

$\overrightarrow{DD_1} \perp \alpha$

2. Нормаль ко второй плоскости β, которую я и строить не берусь… Но по условию это сечение проходит перпендикулярно прямой BD_1. Значит, BD_1 - перпендикуляр к плоскости. Выберем нормаль D_1B.

$\overrightarrow{D_1B} \perp \beta$

$\overrightarrow{DD_1}$ (0;0;12) $\overrightarrow{D_1B}$ (4; 3;-12)

Чтобы найти координаты вектора D_1B, вычтем из конца вектора его начало.

$\overrightarrow{DD_1}$ (0;0;12) $\overrightarrow{D_1B}$ (4; 3;-12)

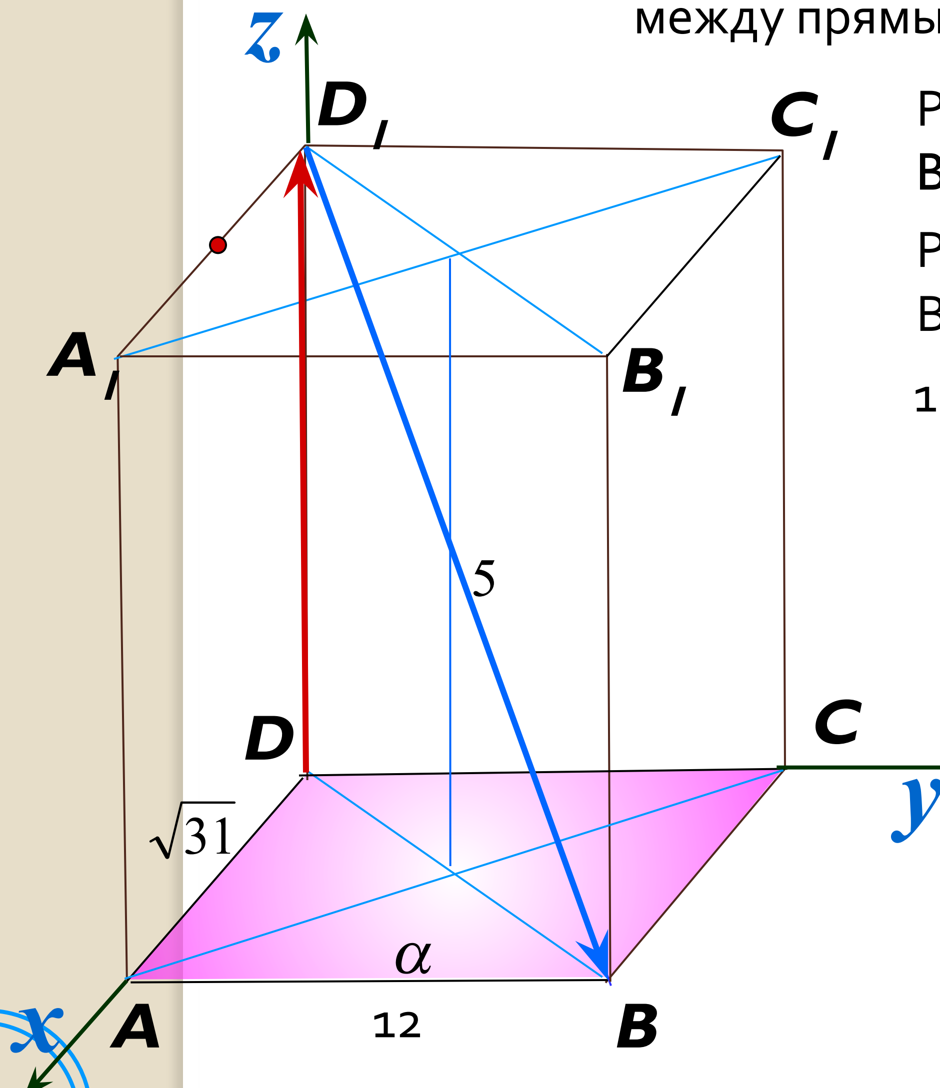
$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{|0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 12 \cdot (-12)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 12^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = \frac{|-144|}{12 \cdot \sqrt{169}} = \frac{\overset{12}{\cancel{144}}}{\cancel{12} \cdot 13} = \frac{12}{13}$$

$$\cos\varphi = \frac{12}{13}$$

$$\textit{Ответ}: \quad \varphi = arc\cos\frac{12}{13}$$

3. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через середину ребра A_1D_1 перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.



Расстояние между прямыми AC и B_1D_1?

Решим задачу методом координат. Введем нормали к плоскостям.

1. Нормаль к плоскости ABC

$\overrightarrow{DD} \perp \alpha$

2. Нормаль ко второй плоскости $, \beta$ которую я и строить не берусь… Но по условию это сечение проходит перпендикулярно прямой BD_1. Значит, BD_1 - перпендикуляр к плоскости. Выберем нормаль D_1B.

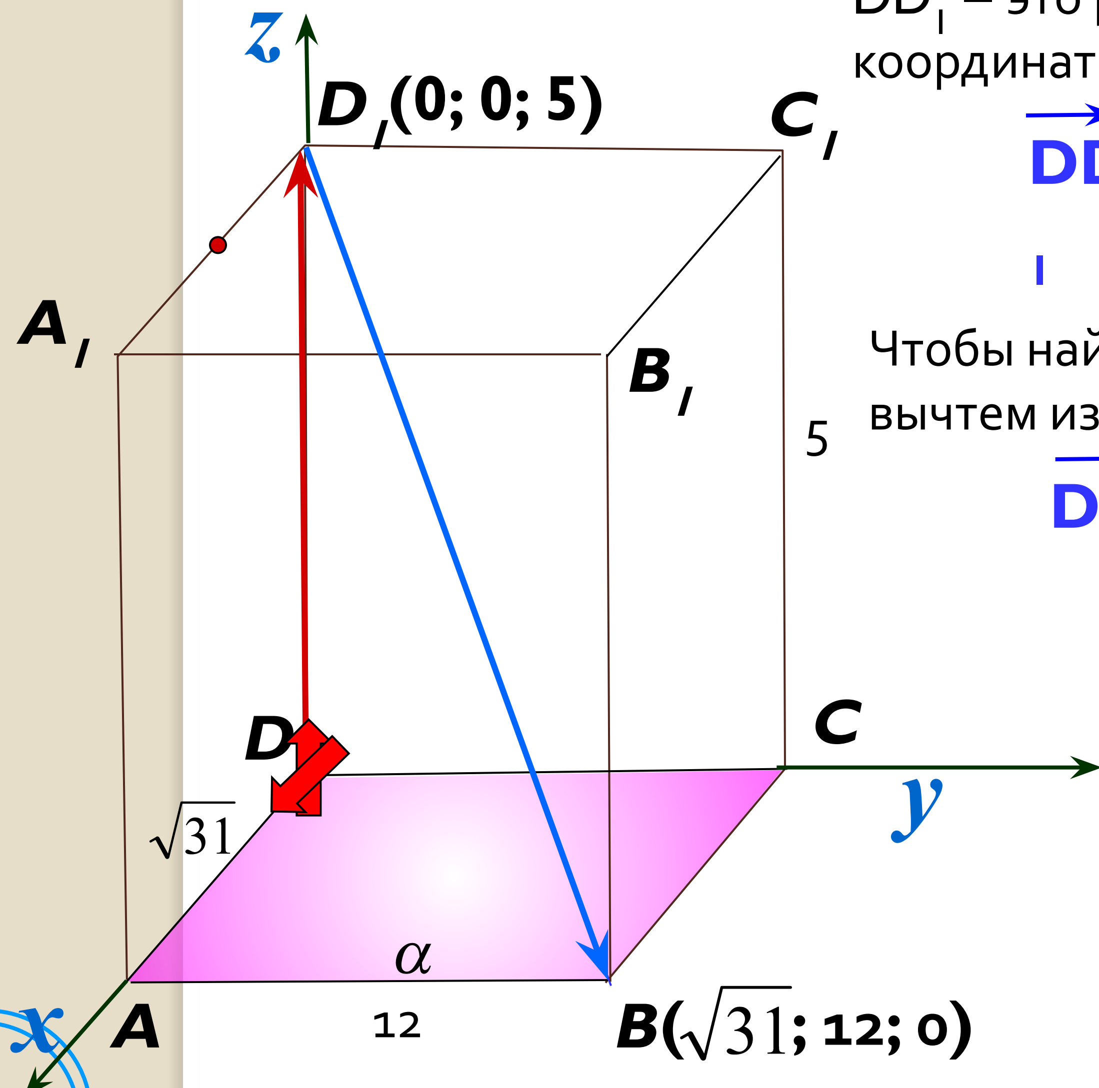
$\overrightarrow{D_1B} \perp \beta$

DD_1 – это радиус-вектор, поэтому его координаты такие же, как и точки D_1

$\overrightarrow{DD_1}$ (0; 0; 5)

Чтобы найти координаты вектора D_1B, вычтем из конца вектора его начало.

$\overrightarrow{D_1B}$ ($\sqrt{31}$; 12; -5)



$\overrightarrow{DD_1}\,(0;\,0;\,5)$ $\overrightarrow{D_1B}\,(\sqrt{31};\,12;\,-5)$

$$\cos\varphi = \frac{\left|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|0 \cdot \sqrt{31} + 0 \cdot 12 + 5 \cdot (-5)\right|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{31}\right)^2 + 12^2 + (-5)^2}} = \frac{\left|0 + 0 + 25\right|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{31 + 144 + 25}}$$

$$= \frac{25}{5 \cdot \sqrt{200}} = \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 100}} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\cdot\sqrt{2}}{\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\textit{Ответ}: \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра:, AB = … Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

В данной задаче построение линейного угла не столь очевидно.

Поэтому применим метод координат.

Найдем вектор нормали плоскости AD_1B_1.

Рассмотрим два вектора этой плоскости:

$\overrightarrow{AD_1}(-12;0;5)$ $\overrightarrow{AB_1}(0;5;5)$

Пусть вектор нормали $\vec{n}\{x;y;z\}$. Вектор, перпендикулярный плоскости, будет перпендикулярен любой прямой, лежащей в этой плоскости. Тогда,

$\overrightarrow{AD_1} \perp \vec{n}$ значит, $\overrightarrow{AD_1} \cdot \vec{n} = 0$

$\overrightarrow{AB_1} \perp \vec{n}$ значит, $\overrightarrow{AB_1} \cdot \vec{n} = 0$

$$\begin{cases} -12x + 0y + 5z = 0 \\ 0x + 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

Выразим через x переменные y и z

$$\begin{cases} -12x + 5z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

«–»

Из (1): $5z = 12x$

$$z = \frac{12}{5}x$$

$$-12x - 5y = 0$$

$$-5y = 12x$$

$$y = -\frac{12}{5}x$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости AD_1B_1, бесконечно много. Выберем из данного множества ненулевой вектор **n**, положив x = 1,

тогда $y = -\frac{12}{5}$, $z = \frac{12}{5}$

Вектор нормали плоскости AD_1B_1:

$\vec{n}\left(1; -\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$

$$\begin{cases} 0x - 5y + 5z = 0 \\ 12x + 0y + 5z = 0 \end{cases}$$

Выразим через x переменные y и z

$$\begin{cases} -5y + 5z = 0 \\ 12x + 5z = 0 \end{cases} \quad «-»$$

Из (2): $5z = -12x$

$$z = -\frac{12}{5}x$$

$$-5y - 12x = 0$$

$$-5y = 12x$$

$$y = -\frac{12}{5}x$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости CD_1B_1, бесконечно много. Выберем из данного множества ненулевой вектор **s**, положив x = 1,

тогда $y = -\frac{12}{5}$, $z = -\frac{12}{5}$

Найдем вектор нормали плоскости CD_1B_1.
Рассмотрим два вектора этой плоскости:

$$\boxed{\overrightarrow{CD_1}(0;-5;5) \qquad \overrightarrow{CB_1}(12;0;5)}$$

Пусть вектор нормали $\vec{s}\{x;y;z\}$.
Вектор, перпендикулярный плоскости, будет перпендикулярен любой прямой, лежащей в этой плоскости. Тогда,

$\overrightarrow{CD_1} \perp \vec{s}$ значит, $\overrightarrow{CD_1} \cdot \vec{s} = 0$

$\overrightarrow{CB_1} \perp \vec{s}$ значит, $\overrightarrow{CB_1} \cdot \vec{s} = 0$

Вектор нормали плоскости CD_1B_1:

$$\vec{s}\left(1; -\frac{12}{5}; -\frac{12}{5}\right)$$

$\vec{n}\left(1; -\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$ $\vec{s}\left(1; -\frac{12}{5}; -\frac{12}{5}\right)$

$$\cos\varphi = \frac{\left|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|1 \cdot 1 + \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) + \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right)\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|1 + \frac{144}{25} + \left(-\frac{144}{25}\right)\right|}{\sqrt{1 + \frac{144}{25} + \frac{144}{25}} \cdot \sqrt{1 + \frac{144}{25} + \frac{144}{25}}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{313}{25}} \cdot \sqrt{\frac{313}{25}}}$$

$$\cos\varphi = \frac{25}{313}$$

$$\cos\varphi = 1 : \frac{313}{25}$$

$$\varphi = \arccos\frac{25}{313}$$

7. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ основания в 2 раза больше бокового ребра. Найдите угол между плоскостью ... ребра. Найдите угол между плоскостью ... гранью BB_1C_1C.

... о угла не столь очевидно. Поэтому применим метод координат.

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 0z = 0 \\ 0x + \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases}$$

Выразим через x переменные y и z

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \quad /:\sqrt{2} \\ \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases}$$

Из (1) $y = x$

$$\sqrt{2}x + z = 0$$

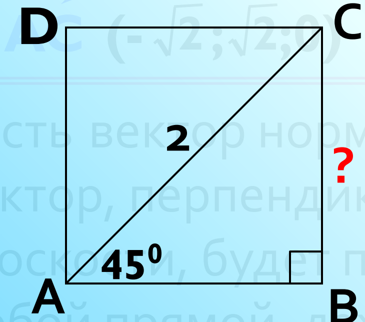
$$z = -\sqrt{2}x$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости ACB_1, бесконечно много. Выберем из данного множества ненулевой вектор **n**,

$$y = x$$
$$z = -\sqrt{2}x$$

положив x = 1, тогда y = 1, z = – $\sqrt{2}$

Если в задаче не дано числовое значение, то можем обозначить боковое ребро «1», тогда диагональ основания равна 2. Найдем сторону основания. Основание – квадрат.



$$\sin 45^0 = \frac{CD}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CD}{2}$$

$$CD = \sqrt{2}$$

$\vec{AC} \perp \vec{n}$ значит, $\vec{AC} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{AB_1} \perp \vec{n}$ значит, $\vec{AB_1} \cdot \vec{n} = 0$

Вектор нормали плоскости ACB_1:

$\vec{n}\,(1;1;-\sqrt{2})$

$\vec{p}\,(0;\sqrt{2};0)$ $\vec{n}\,(1;1;-\sqrt{2})$

$$\cos\varphi = \frac{\left|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|0\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 1+0\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\right|}{\sqrt{0^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = 60^0$$

Домашнее задание

1. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольник ABCD, в котором AB = 5, AD = . Найдите тангенс угла между плоскостью BA_1D_1 и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно .
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB = 3, BC = 4, AA_1 = 12. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол образованный этой плоскостью боковыми плоскостями параллелепипеда.
3. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольник ABCD, в котором AB = 12, AD = . Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через середину ребра A_1D_1 перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.
4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: AB = 5, AD = 12, CC_1 = 5. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1и AD_1B_1.
5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ основания в 2 раза больше бокового ребра. Найдите угол между плоскостью DCB_1и боковой гранью BB_1C_1C.