

Сысуев В.В.

доктор географических наук, профессор

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ

Введение в теорию оптимизации

Географический факультет

Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

v.v.syss@mail.ru

Москва, 2016

Введение в учение о природно-антропогенных ландшафтах

[Николаев, и др., 2008, с. 7]

Основаниями классификации (выделения) природно-антропогенных ландшафтов являются три критерия:

«...а) степень антропогенной трансформации природных ландшафтов...; б) наличие или отсутствие антропогенной регуляции; в) социально-экономические функции, выполняемые ландшафтами».

В соответствии с основными *видами природопользования* среди природно-антропогенных обоснованно выделяются ландшафты:

«...целенаправленно созданные, антропогенно регулируемые:

- 1) сельскохозяйственные, 2) лесохозяйственные,
- 3) водохозяйственные, 4) городские и другие селитебные,
- 5)...

«...для перехода земной цивилизации к устойчивому развитию необходимо решить две взаимосвязанные **ландшафтно-экологические задачи** планетарного масштаба. Первая состоит в **оптимизации** всех существующих **природно-антропогенных ландшафтов с целью преобразования** их **в истинно культурные** (ноосферные). Вторая – в сбережении, уходе и восстановлении естественных природных комплексов, наиболее надежно гарантирующих относительную стабильность природной среды за счет гомеостазиса...

Важнейшим **инструментом проектирования культурного ландшафта** признано **ландшафтное планирование**. Его суть в научном обеспечении **оптимальной природно-хозяйственной организации** ландшафтного пространства на принципах геоэкологической адаптивности»

[Николаев, 2013, с. 284].

I. ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИРОДНО-АНТРОПОГЕННЫХ ЛАНДШАФТОВ

«Проектирование - это начало изменений в окружающей человека искусственной среде»

Дж. К. Джонс

Планирование, проектирование и управление устойчивым **природопользованием и задачи** условной **оптимизации** предполагают наличие одинаковых предпосылок: **имеется цель, которую нужно достичь, учитывая всевозможные ограничения.**

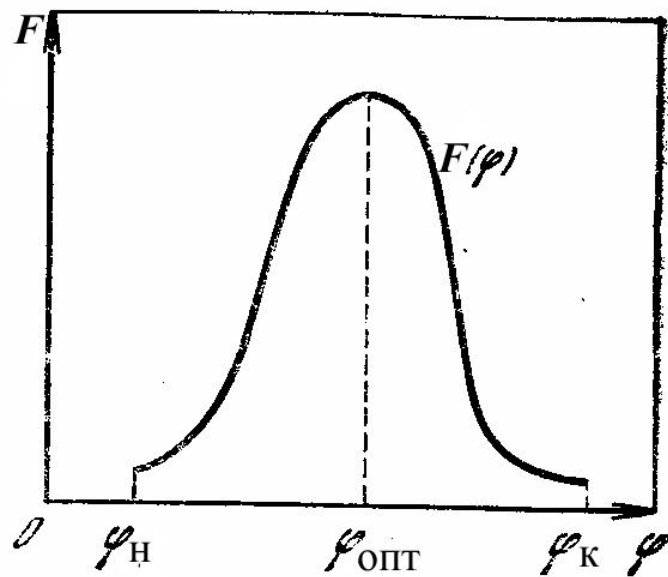
Мощный аппарат решения этих проблем имеет теория оптимизации (оптимального управления).

Выражения, связывающее цель со средствами ее достижения: критерий функционирования, критерий или показатель эффективности, целевая или критериальная функция, **функция цели**

Логический пример оптимизация:

настраивая радиоприемник, мы добиваемся максимальной громкости некоторой радиостанции:

Допустимой областью X является интервал углов ϕ поворота ручки настройки между начальными ϕ_H и конечными значениями ϕ_K . **Целевая функция** — зависимость громкости F от угла ϕ . Путем измерений получим значения целевой функции $F(\phi)$ и начертим ее график. Из графика видно, что наибольшему значению целевой функции соответствует **оптимальный угол** ($\phi_{\text{ОПТ}}$). Математическое выражение (или алгоритм вычисления) целевой функции $F(\phi)$, график которой хорошо совпадает с экспериментальной кривой, и называют **математической моделью**.



Оптимизация - нахождение max (min) целевой функции

Если множество всех вариантов X , а его элементы – x , то сопоставив каждому варианту x из множества X ($x \in X$) число — критерий оптимальности, получим функцию $F(x)$, определенную в области X . Эта функцию, показывающая «качество» выбираемых вариантов, *целевая функция*, а область X — *допустимая область*

Задача оптимизации - поиск минимума целевой функции:

$$F(x) \rightarrow \min_{x \in X}$$

Для решения задач оптимизации необходимо:

А) Составить математическую модель объекта оптимизации

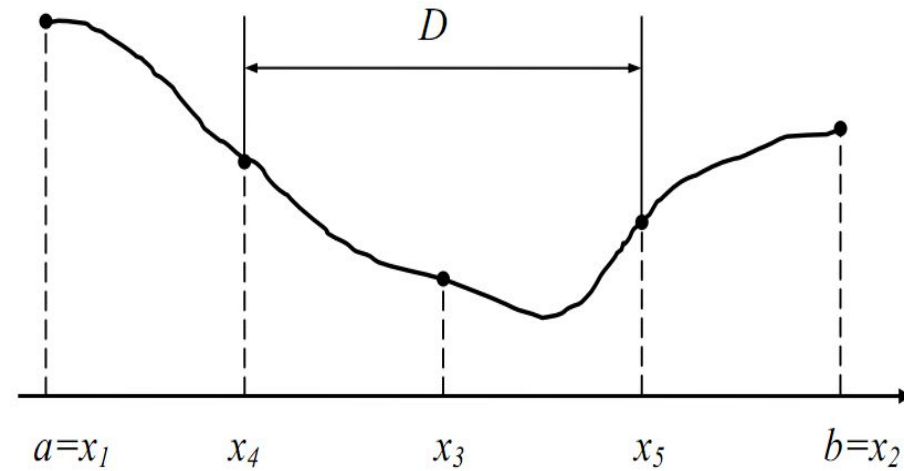
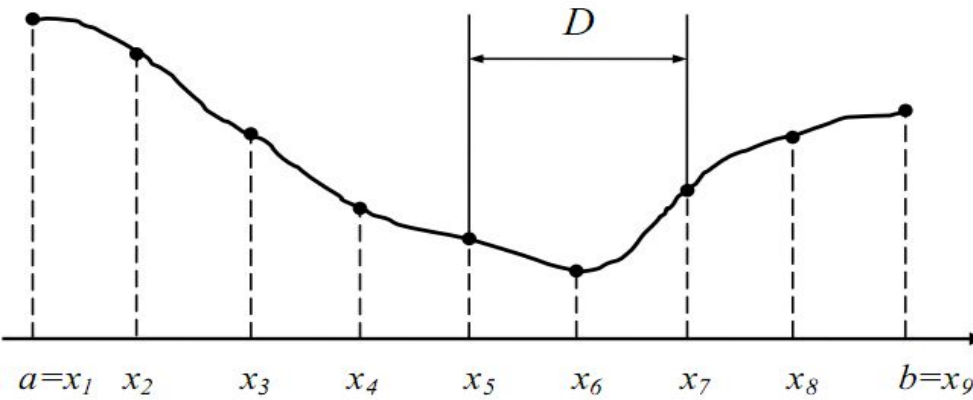
Б) Выбрать критерий оптимальности и составить целевую функцию $F(X)$

В) Установить возможные ограничения, которые должны накладываться на переменные

Г) Выбрать метод оптимизации, который позволит найти экстремальные значения искомых величин

Одномерная оптимизация: 1). Сужение интервала неопределенности

Метод перебора (общего поиска)



Метод деления интервала пополам

Метод «золотого сечения» и др.

2). Методы с использованием производных

Дважды дифференцируемая функция $f(x)$ достигает минимума при $f'(x)=0$, если $f''(x)>0$

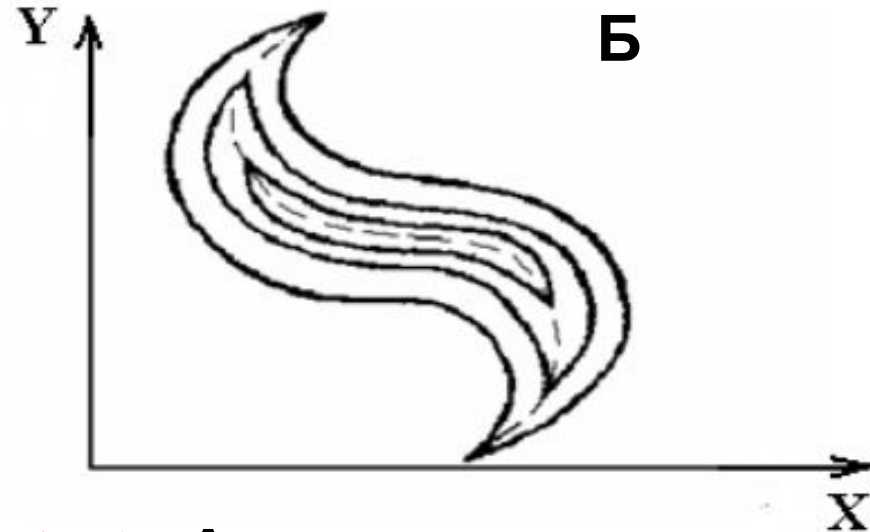
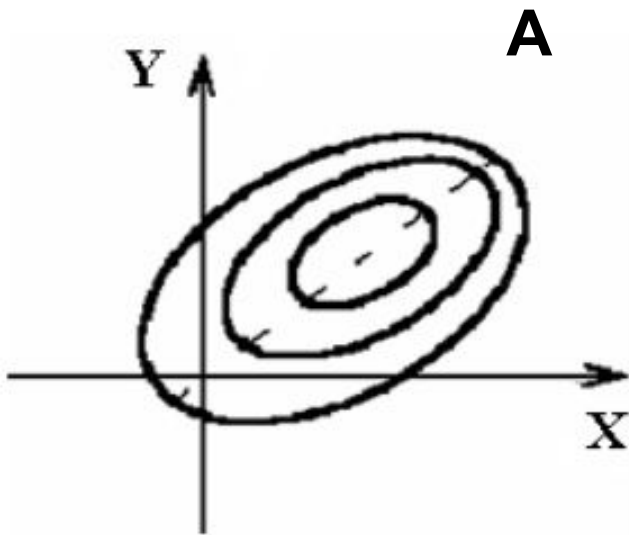
Метод Ньютона-Рафсона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

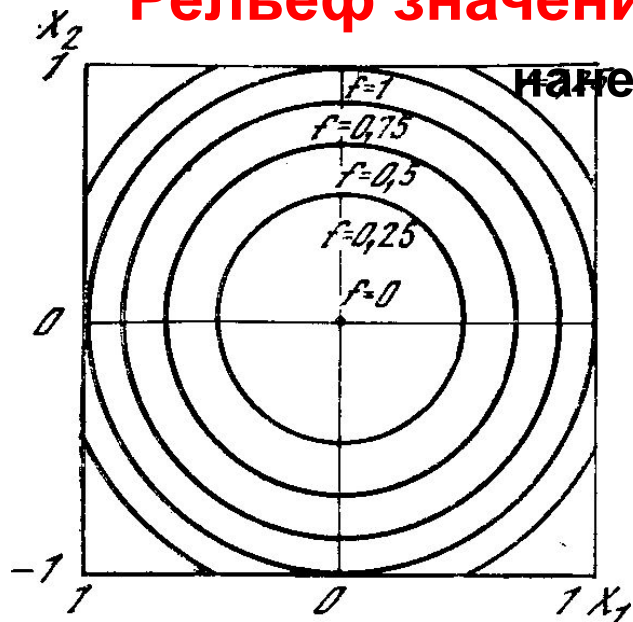
Критерий прекращения итераций

$$\left| \frac{f'(x_{k+1})}{f(x_{k+1})} \right| < \varepsilon$$

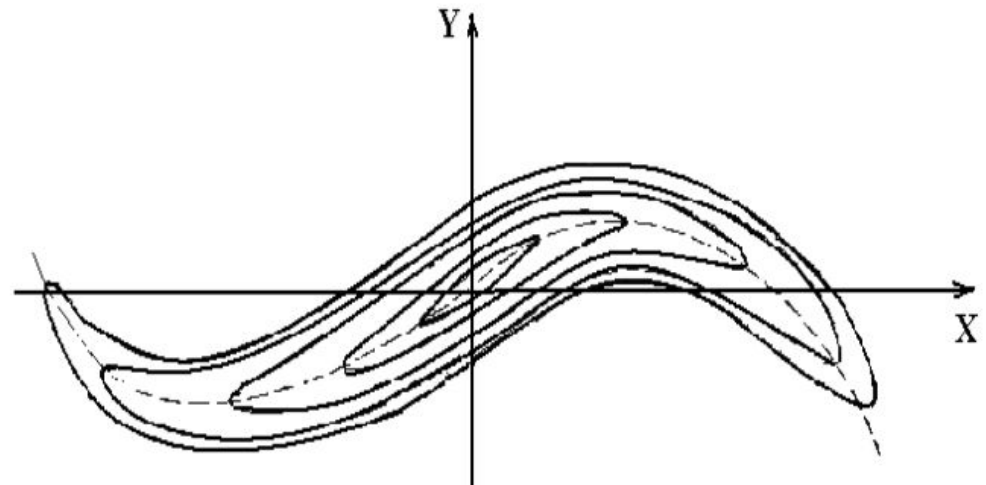
Минимум функции нескольких переменных



Рельеф значений $F(x,y)$: А- котловинный, Б – овражный,
нанесены *линии уровня* $z=F(x,y)$



Рельеф функции $F(x,y)=x^2 + y^2$

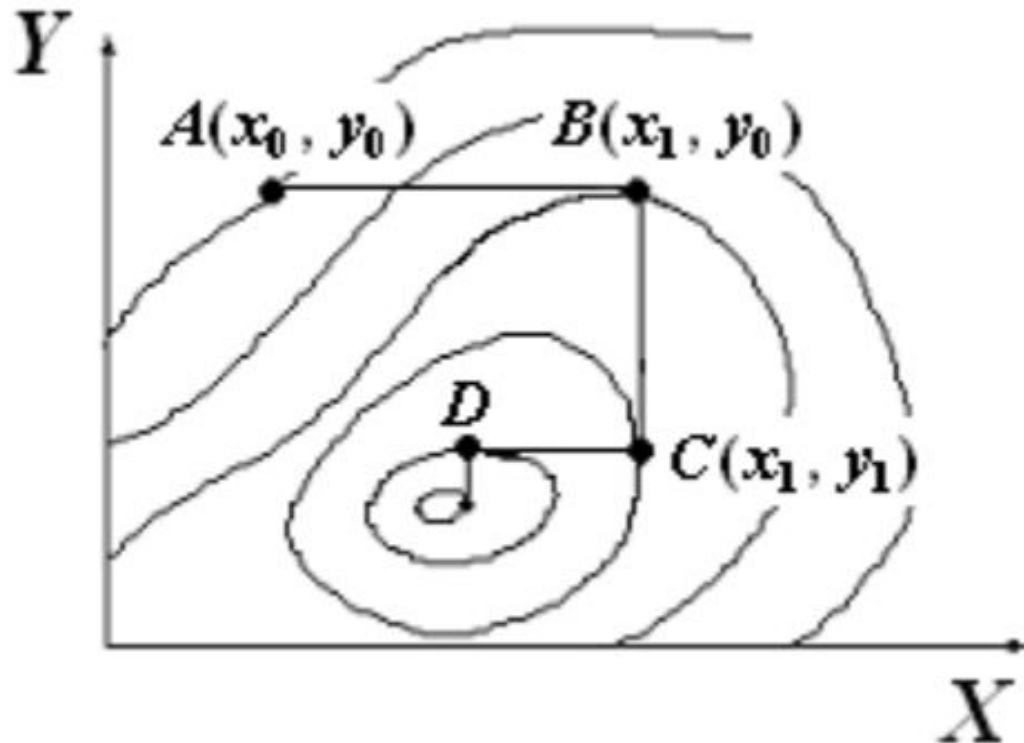


Рельеф функции $F(x,y)=10(y-\sin x)^2+0.1x^2$

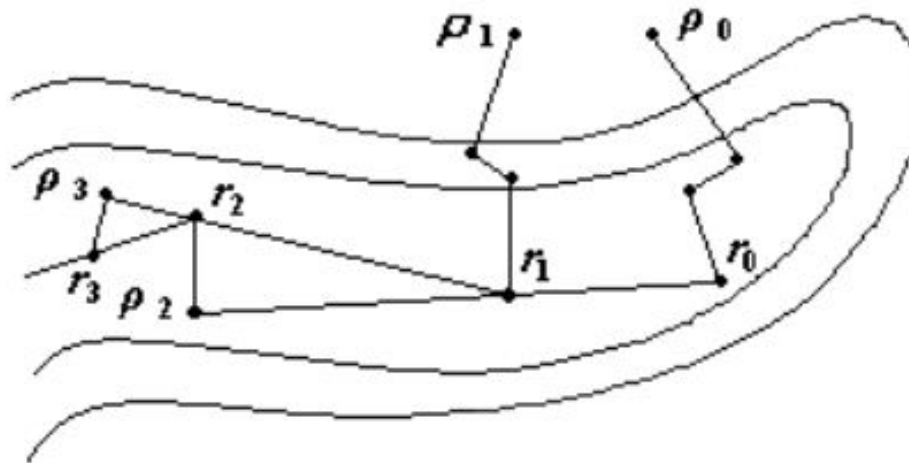
Метод координатного спуска (метод Гаусса)

$F(x,y,z)$ - функция 3-х переменных. Пусть нулевое приближение x_0, y_0, z_0 .

1. Фиксируем значение двух координат $y=y_0, z=z_0$. Функция $f_1 = F(x, y_0, z_0)$ только одной переменной – отыщем ее минимум и обозначим его x_1 .
т.е. сделали шаг из т. (x_0, y_0, z_0) в т. (x_1, y_0, z_0) , и значение $F(x,y,z)$ уменьшилось
2. Из новой точки сделаем спуск по оси y , т.е. найдем минимум $f_2 = F(x_1, y, z_0)$
→ попадем в точку (x_1, y_1, z_0)
3. Третий шаг – спуск по оси z из т. (x_1, y_1, z_0) в т. (x_1, y_1, z_1) – цикл или первая итерация завершена



Метод оврагов



ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ [Канторович, 1939]

1. Задача об использовании сырья

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		Π_1	Π_2
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Доход		c_1	c_2

Виды сырья	Запасы сырья	Виды прордукции	
		Π_1	Π_2
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Доход		7	5

Если предприятие выпускает x_1 единиц продукции вида Π_1 и x_2 единиц вида Π_2

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 19 - 2x_1 - 3x_2 \\ 0 \leq 13 - 2x_1 - x_2 \\ 0 \leq 15 - 3x_2 \\ 0 \leq 18 - 3x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \\ x_6 = 18 - 3x_1 \end{cases}$$

$$F = 7x_1 + 5x_2$$

Найти $\min F = -7x_1 - 5x_2$

основная задача линейного программирования

Геометрический смысл основной задачи линейного программирования

Требую неотрицательности всех неизвестных
приходим к системе
неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ 19 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ 13 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ 15 - 3x_2 \geq 0 \\ 18 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = -7x_1 - 5x_2$$

**многоугольник решений
системы неравенств**

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & (I) \\ x_2 = 0 & (II) \\ 19 - 2x_1 - 3x_2 = 0 & (III) \\ 13 - 2x_1 - x_2 = 0 & (IV) \\ 15 - 3x_2 = 0 & (V) \\ 18 - 3x_1 = 0 & (VI) \end{cases}$$

$$C = -7x_1 - 5x_2$$

$$P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$$

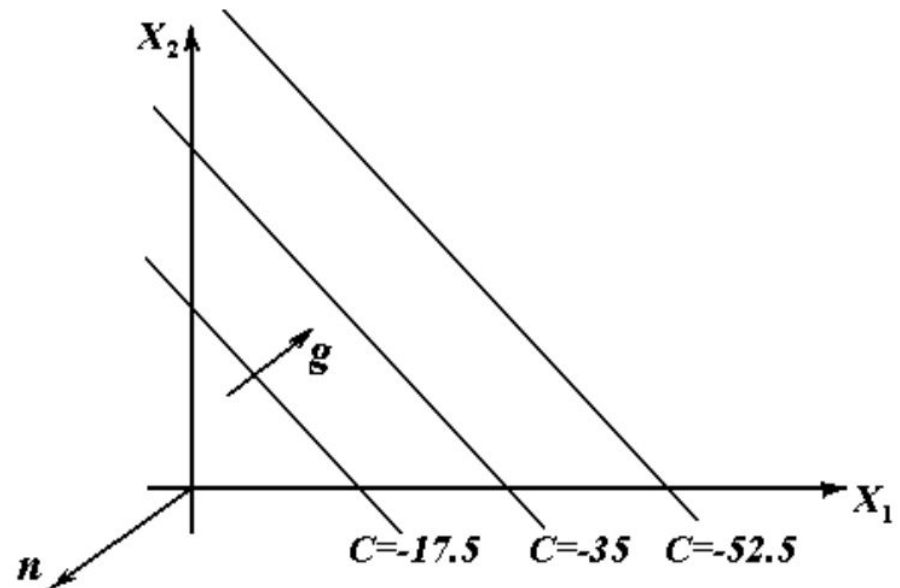
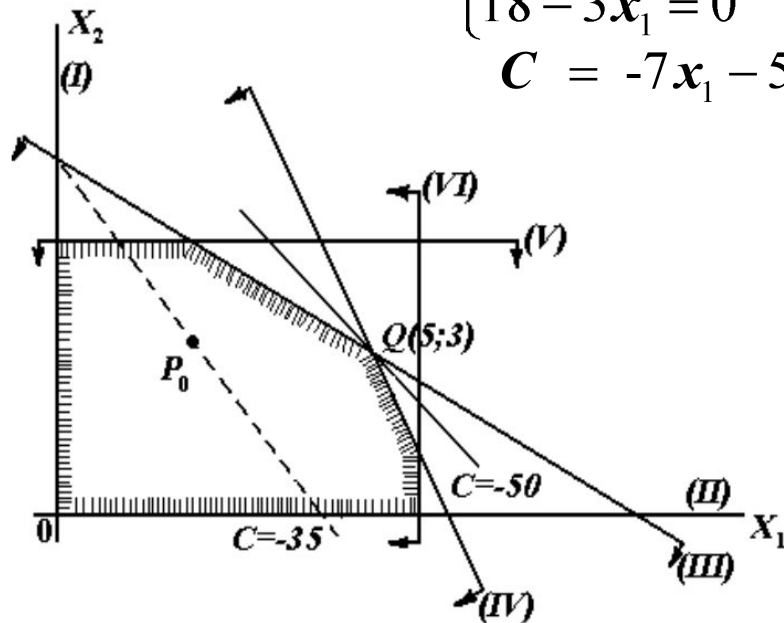
$$C_0 = -7x_1^{(0)} - 5x_2^{(0)}$$

Оптимальная точка $Q(5, 3)$

$$F_{1\min} = -7 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = -50$$

Оптимальное решение задачи

$$x_1 = 5, x_2 = 3.$$



ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2. Транспортная задача

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i = \sum b_j$

a_1, a_2 - ед. груза на станциях отправления,
 b_1, b_2, b_3 груза на станциях назначения,
 c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза
 x_{ij} количество ед. груза, предназначенного к отправке

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i = \sum b_j$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} = b_3 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 \end{array} \right.$$

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij}x_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

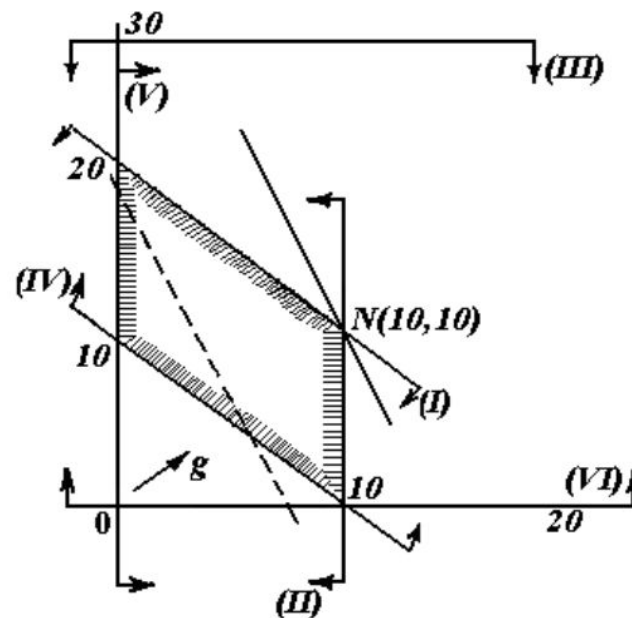
Численный пример транспортной задачи

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$20=a_1$
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$30=a_2$
Потребность в грузе	$10=b_1$	$30=b_2$	$10=b_3$	$\sum a_i = \sum b_j$

$$\begin{cases} 20 - x_{11} - x_{12} \geq 0 & (I) \\ 10 - x_{11} \geq 0 & (II) \\ 30 - x_{12} \geq 0 & (III) \\ -10 + x_{11} + x_{12} \geq 0 & (IV) \\ x_{11} \geq 0 & (V) \\ x_{12} \geq 0 & (VI) \end{cases}$$

$$F = 330 - 2x_{11} - x_{12}$$

Многоугольник решений



Оптимальное решение в точке $N(10, 10)$

$$x_{11} = 10, x_{12} = 10, F_{\min} = 300.$$

$$\begin{cases} x_{13} = 20 - x_{11} - x_{12} = 0 \\ x_{21} = 10 - x_{11} = 0 \\ x_{22} = 30 - x_{12} = 20 \\ x_{23} = -10 + x_{11} + x_{12} = 10 \end{cases}$$

Задача рационального распределения пород деревьев

по соответствующим им ТУМ [].

Основная задача линейного программирования

Найти максимум целевой функции

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j(\omega) x_j \Rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях:

ограничения на имеющиеся природные ресурсы

$$\sum_{j=1}^n a_{pj}(\omega) x_j \leq b_p(\omega) \quad (2)$$

выполнения предъявляемых к насаждениям требований

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}(\omega) x_j \geq b_k(\omega)$$

и неотрицательности переменных:

$c_j(\omega)$ – запас, прирост или другая специфическая функция j -ой породы в возрасте количественной спелости;

x_j – доля участия j -ой породы в данных ТУМ $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$,

$a_{pj}(\omega)$ – норма потребности j -ой породы в p -ом ресурсе;

$b_p(\omega)$ – количество имеющихся p -ых ресурсов;

$a_{kj}(\omega)$ – нормы требуемых от насаждения дополнительных специфических функций (средообразующих, биоразнообразия, защитных и др);

$b_k(\omega)$ – оценки требований к этим функциям;

ω – количество выделов.

Географические ограничения по ресурсам в задачах оптимизации производственных процессов

[Нестеров, Бредихин, 1970]

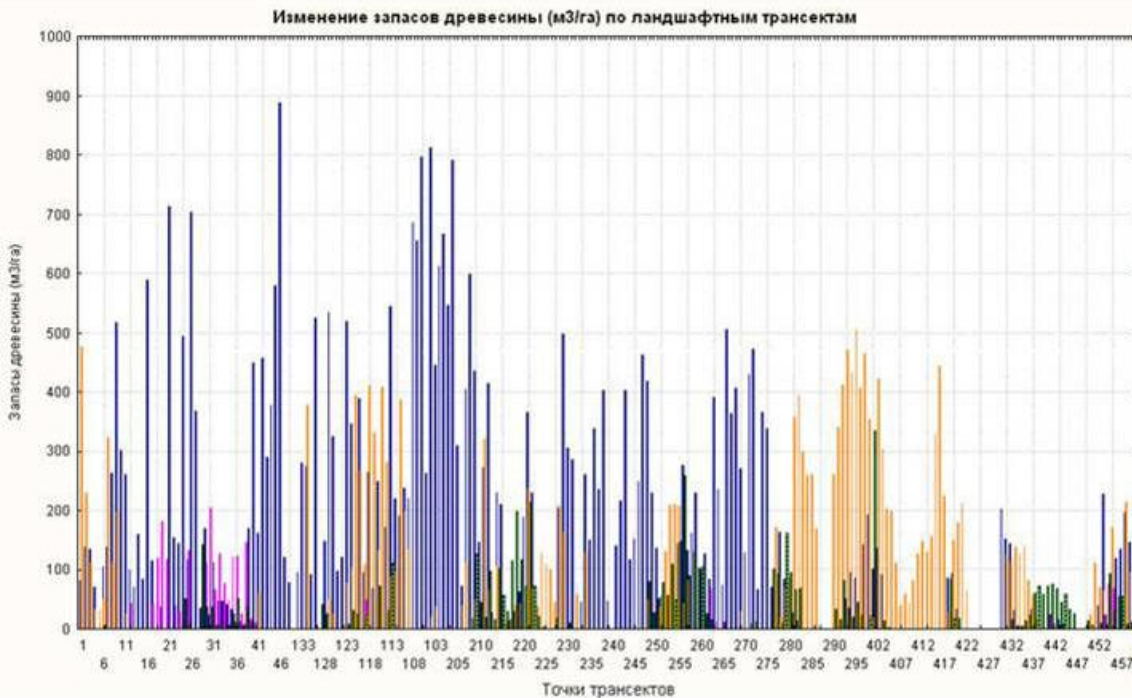
№	Наименование	Номера районов			
		1	2	3	4
1	Солнечная радиация, ккал/см² вегет. период	60	65	80	90
2	Доступная вода, сотни тонн/га	340	300	250	115
3	Азот, кг/га	54	60	100	50
4	Фосфор, кг/га	12	15	27	16
5	Калий, кг/га	50	54	60	60
6	Почвы	дерново- подзолист. супесчаная	дерново- подзолист среднесугл	чернозем выщелоч. легкосугл	Темнокаш тановая среднесугл
7	Σt^0	2150	2200	2750	3000
8	pH	5,2	5,5	6,3	7,5

Биоэкологические коэффициенты a_{pj} и коэффициенты c_j функционала максимальной продуктивности для оптимизации состава древесных пород на дерново-среднеподзолистых почв на покровных суглинках [Нестеров, Бредихин, 1970]

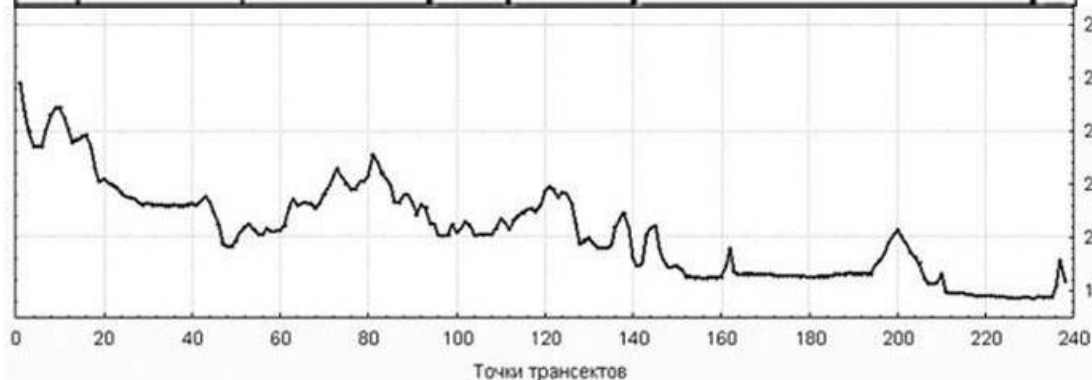
Наименования ресурсов и условий		Древесные породы (переменные)							Ограничения b_p
		Сосна x_1	Ель x_2	Бер. x_3	Дуб x_4	Осина x_5	Липа x_6	Листв. x_7	
1	Солнечная радиация	6,8	3,1	7,2	28,8	2,9	8,7	8,4	≤ 82
2	Доступная влага	31,5	13,0	54,1	78,4	30,0	55,4	22,7	≤ 300
3	Азот	3,7	2,1	7,2	9,4	3,8	8,2	2,7	$\leq 46,4$
4	Фосфор	1,3	1,1	1,9	2,0	1,0	1,1	2,4	$\leq 21,0$
5	Калий	2,4	1,8	3,4	6,2	2,2	4,8	1,7	$\leq 49,8$
6	Стоимость лесокультур	1,3	1,3	1,0	2,0	0,9	1,0	1,3	≤ 20
7	Энтомоустойчивость	1,0	0,9	0,9	0,8	0,6	0,6	0,9	$\geq 5,2$
8	Пожароустойчивость	0,7	0,7	1,0	1,0	1,0	1,0	0,8	$\geq 4,2$
9	Газоустойчивость	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	$\geq 1,8$
10	Фитонцидность	3,2	3,0	5,0	4,0	3,0	5,5	5,5	≥ 18
11	Ландшафтно-эстетические свойства	4,5	4,0	4,5	4,0	3,0	4,0	4,5	≥ 24
Коэф-ты c_j функционала максимального прироста		1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	

При решении задачи (1)-(2) с условиями ограничения на ресурсы и коэффициентами функционала цели «достижение максимального прироста» из таблиц получена **максимальная продуктивность $19,3 \text{ м}^3/\text{га}$ в год при оптимальном составе древостоя 85% ели и 15% осины.**

Решая ту же задачу на **максимальный доход** получили максимальную валовую продукцию на **$77,8 \text{ у.е.}$ при наличии состава древостоя 94,5% ели и 5,5% дуба.**



I			III	II	III	II
Ia	Ia	Ia	IIIa	IIa	IIIa	IIa



Оптимизация лесопользования [В.Г. Нестеров, М.А. Бредихин, 1971]. Основная задача линейного программирования в вероятностной постановке

$$M \left(\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{\ln} c_{ks}(\omega) x_{ks} \right) \Rightarrow \max_{\substack{\text{неотрицательных} \\ \text{переменных}}} \quad x_{ks} \geq 0, k, K, s, S;$$

Найти максимум математического ожидания целевой функции

$C_{ks}(\omega)$ - чистый доход с дисконтированием затрат с помощью нормы эффективности вложений:

$$c_{ks}(\omega) = \sum_{t=u}^{T_{ks}} \frac{D_{ks}^t}{(1+E)^{t-u}} - \sum_{t=u}^{T_{ks}} \frac{Z_{ks}^t}{(1+E)^{t-u}}$$

$D_{ks}^t(\omega)$ - доход от реализации s -го варианта в k -м участке в t году;
 $Z_{ks}^t(\omega)$ - затраты на проведение s -го варианта в k -м участке в t -м году;
 E - норма эффективности вложений; u - год, к которому приводится значение показателя; t - рассматриваемый год; T_{ks} - время, в течение которого будет получен эффект от проведения s -го варианта в k -м участке.

Условия ограничения:

1. По удовлетворению потребностей экономики в лесной продукции

$$P \left(\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{\ln} a_{rks}(\omega) x_{ks} \geq b_r(\omega) \right) \geq a_r, r, R;$$

2. По распределению лимитированных ресурсов

$$P \left(\sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{\ln} a_{iks}(\omega) x_{ks} \geq L_i(\omega) \right) \geq a_i, i, I_i;$$

3. По использованию других ресурсов

$$P \left(\sum_{s=1}^{\ln} a_{iks}(\omega) x_{ks} \geq b_{ik}(\omega) \right) \geq a_i, i, I - I_1, k, K;$$

где: x_{ks} - доля использования s -го варианта в k -м участке;

$a_{rks}(\omega)$ - объем получения r -го вида лесной продукции в k -м участке при s -м варианте;

$b_r(\omega)$ - потребности экономики в r -м виде лесной продукции;

$a_{iks}(\omega)$ - норма затрат i -го ресурса на проведение s -го варианта в k -м участке;

$L_i(\omega)$ - объем i -го вида лимитированных ресурсов;

$b_{ik}(\omega)$ - объем i -го вида ресурсов в k -м участке;

I - множество всех ресурсов;

I_1 - множество лимитированных ресурсов;

R - множество видов лесной продукции;

a_r, a_i - заданные вероятности соблюдения ограничений по удовлетворению потребностей и наличию ресурсов;

$c_{ks}(\omega)$ - чистый доход от проведения s -го варианта в k -м участке.

2. Задачи оптимального управления природопользованием

Система, точнее - **динамическая система** (которая развивается, эволюционирует во времени) в каждый момент времени **пребывает в одном из некоторого числа** возможных **состояний**.

Смена состояний системы с течением времени и составляет её **развитие или функционирование**.

Предполагается, что **состояние** динамической системы в каждый момент времени может быть **однозначно охарактеризовано** определенным конечным **набором n числовых параметров или функций состояния**.

Управление — это есть **воздействие, способное изменить текущее состояние**, а значит и все последующее развитие системы.

Функционированием многих **природно-антропогенных систем** можно (необходимо) управлять.

Постановка задачи оптимального управления включает:

1. **Систему дифференциальных уравнений**, описывающих поведение (функционирование) данного объекта и
2. **Критерий оптимальности** (функционал), который следует максимизировать или минимизировать,
3. **Выбор управляющих переменных.**
4. **Введение ограничений на переменные и граничные условия**
5. **Формулировка принципа максимума Л.С. Понтрягина.** Этот принцип - необходимое условие существования оптимального управления динамическими системами, принимает разный вид в зависимости от задачи. В его формулировке участвуют функции специального вида – гамильтониан и сопряженные переменные. Существует схема применения принципа максимума, в общем случае его использование требует высокой математической квалификации.

Решением задачи оптимального управления является **оптимальный процесс**, т.е. оптимальное управление ***и*** соответствующая ему **оптимальная траектория функционирования системы**.

Оптимальное управление лесопользованием. Простейшая модель

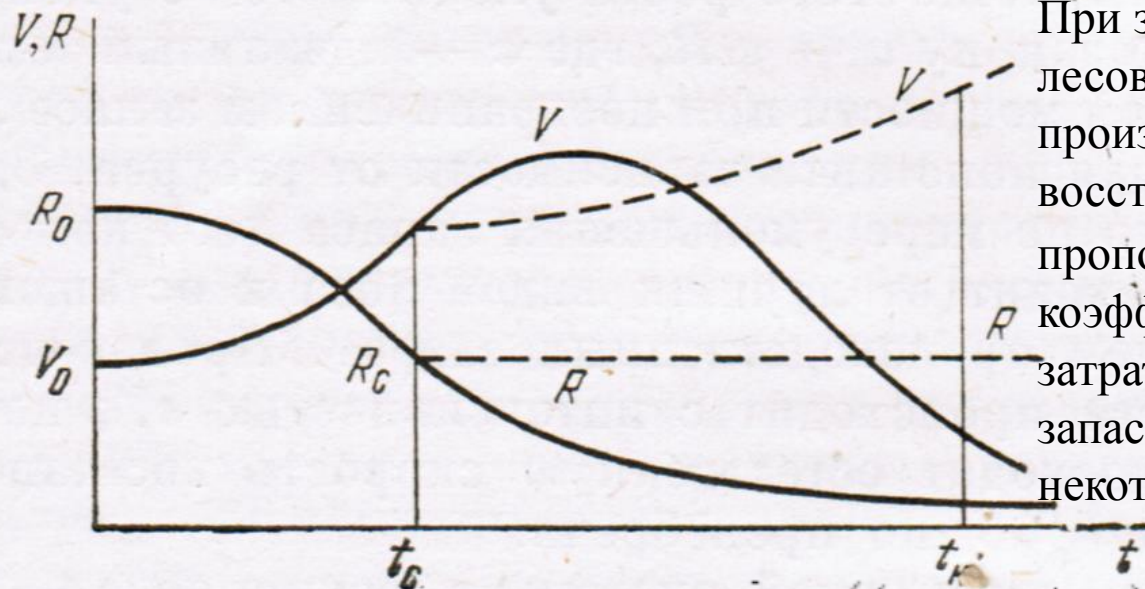
$$\begin{cases} \dot{V} = (a - g/R)V, \\ \dot{R} = -cV \end{cases}$$

с начальными условиями

$$V(0) = V_0, \quad R(0) = R_0$$

V – мощность лесоперерабатывающего предприятия,
 R – запас леса на выделенной территории. Доля доходов тратится на рост производства; темп этого роста уменьшается с уменьшением запаса леса: $a - g/R$, a – максимальный темп роста производственной мощности при неограниченном запасе леса $R = \infty$, g – некоторая константа зависимости от ресурса. cV – интенсивность потребления леса, которая значительно превосходит естественную скорость лесовосстановления

Если запас R_0 достаточно велик, так что $g/R \ll a$ (Решение сплошные линии)



При затрате доли средств, на лесовосстановление, снижается рост производства на величину u . Скорость восстановления леса считаем пропорциональной u с коэффициентом α (эффективность затрат). Если u удастся задать так, что запас стабилизируется $\dot{R} = 0$ на некотором уровне R_c тогда:

$$\dot{V} = ((a - g/R_c) - (c/\alpha))V, \quad u = (c/\alpha)V,$$

Решение – пунктирные линии

Оптимальное управление вырубкой плакорных пихтовых лесов Приангарья

$$\dot{S}_i = \sum_j \alpha_{ji} S_j - \sum_j \alpha_{ij} S_i - u_i - u_{Ni} - u_{vi} - u_{pi}$$

Оптимальное управление рубками:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= AS - Bu - DSV - LSu_v, \\ \dot{V} &= u_v, \\ V(0) &= V_0, \quad S(0) = S_0, \quad S(t) \geq 0, \\ 0 &\leq \sum_i u_i w_i \leq V, \quad u_v \geq 0, \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^T \left(\gamma' u - bu_v - cV - \beta |S - S^*|^2 \right) dt \rightarrow \max$$

S_i , площади занятые i -м типом леса; $\alpha_{ji} = (\Delta \tau_{ji})^{-1}$ интенсивность перехода из j -го состояния в i -е состояние (тип леса), определяется по времени $\Delta \tau_{ji}$ необходимому для смены типа леса; u_i , u_{Ni} — интенсивность изменения площади вырубки и потери лесных площадей в результате пожаров; u_v , u_p — потери лесной площади на расширение мощности предприятия и инфраструктуры
 V - мощность лесозаготовительного предприятия, v - выпуск продукции, u_i — площадь, вырубаемая в каждом типе леса. стоимости древостоев, вырубаемых с площади u , входят потери прибыли на увеличение мощности предприятия u_v и на штрафы за нарушение экологических условий (равновесия) $\beta |S - S^*|^2$

Блок-схема динамической системы лесопользования разновозрастным древостоем



Постановка задачи оптимального управления лесопользованием

[Андреева, Шилова, 2014]

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y, z) - \gamma(z)x - fx, \\ \dot{y} = fx - (q + d)y - u_1, \\ \dot{z} = qy - hz - u_2, \end{cases}$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} x(0) &= X_0, \quad y(0) = Y_0, \quad z(0) = Z_0; \\ x(T) &\geq X_T, \quad y(T) \geq Y_T, \quad z(T) \geq Z_T. \end{aligned}$$

Функции управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ - скорость вырубki деревьев среднего и старшего возрастов: $0 \leq u_k(t) \leq \alpha_k$, $k = 1, 2$, $t \in [0, T]$;

$$0 \leq \sum_{k=1}^2 u_k(t) \leq \alpha_k, \quad t \in [0, T],$$

Цель управления - максимизация функционала $J(u)$ - прибыль, полученную от продажи вырубленного леса:

$$J(u) = \int_0^T \sum_{i=2}^3 [\rho_i(y, z) - c_i(y, z)] u_i dt + b_1 y(T) + b_2 z(T) \rightarrow \max,$$

где: $\rho_i(y, z)$, $c_i(y, z)$ - стоимость реализованной древесины и себестоимость затрат на выращивание и рубки

Решение задачи оптимального управления лесопользованием

Задача минимизации функционала с критериями выполнения конечных условий:

$$J(u) = - \int_0^T \sum_{i=2}^3 [\rho_i(y, z) - c_i(y, z)] u_i dt - b_1 y(T) - b_2 z(T) + M_1 \left(\max(0, Y_T - y(T)) \right)^2 + M_2 \left(\max(0, Y_T - y(T)) \right)^2 + M_3 \left(\max(0, Z_T - z(T)) \right)^2 \rightarrow \min.$$

Строится функция Понтрягина из функций специального вида (гамильтониана H и сопряженных переменных p_i) и функция переключения

$$H(t, x, y, z, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 \left(\sum_{i=2}^3 [\rho_i(y, z) - c_i(y, z)] u_i \right) + (p_1(t), \rho z - \gamma(z)x - fx) + (p_2(t), fx - (q + d)y - u_1) + (p_3(t), qy - hz - u_2);$$

$$\varphi_k(t) = \rho_k + c_k(y, z) + p_{k+1}(t), k = 1, 2.$$

Пусть $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$ локально-оптимальный процесс сформулированной задачи, тогда оптимальное управление определяется условием:

$$\bar{u}_k = \begin{cases} 0, & \varphi_k(t) < 0 \\ \alpha_k, & \varphi_k(t) > 0 \\ [0, \alpha_k], & \varphi_k(t) = 0, \quad k = 2, 3, \end{cases}$$

Сопряженные функции $p_k, k=1, 2, 3$ являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = p_1(t)(az^4 + b - f) - p_2(t)f; \\ \dot{p}_2(t) = -\mu_1 u_1 + p_2(t)(q + d) - p_3(t)q; \\ \dot{p}_3(t) = -\mu_2 u_2 - p_1(t)(\rho - 4az^3 x) - p_3(t)h \end{cases}$$