

# *Предел последовательности.*

Математика

**10 класс**



# Последовательность

## Определение 1.

Функцию вида  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{N}$  называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают  $y = f(n)$  или  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ , или  $(y_n)$ .

$(a_n)$  – последовательность

$a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_n$  – члены последовательности

Первый  
член послед.

n-ый  
член послед.



# Способы задания числовой последовательности

## 1. Словесный способ.

*Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.*

*Пример 1. Последовательность простых чисел:*

**2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,... .**

*Пример 2. Произвольный набор чисел:*

**1,4,12,25,26,33,39,... .**

*Пример 3. Последовательность четных чисел:*

**2,4,6,8,10,12,14,16,... .**



# Способы задания числовой последовательности

## 2. Аналитический способ.

*Любой  $n$ -й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.*

*Пример 1.* Последовательность четных чисел:  $y = 2n$ .

*Пример 2.* Последовательность квадратов натуральных чисел:  
 $y = n^2$ .

*Пример 3.* Стационарная последовательность:  $y = C$   
 $C, C, C, C, \dots, C, \dots$

*Пример 4.* Последовательность  $y = n^2 - 3n$   
 $-2, -2, 0, 4, 10, \dots$

*Пример 5.* Последовательность  $y = 2^n$   
 $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$



# Способы задания числовой последовательности

## 3. Рекуррентный способ.

*Указывается правило, позволяющее вычислить  $n$ -й элемент последовательности, если известен ее предыдущий элемент.*

Пример 1.  $a_1 = 3$      $a_{n+1} = a_n^2$

$$\begin{array}{ll} a_1 = 3 & a_3 = 9^2 = 81 \\ a_2 = 3^2 = 9 & a_4 = 81^2 = 6561 \end{array}$$

Пример 2. Арифметическая прогрессия  $a_{n+1} = a_n + d$ ,  
 $d$  - разность арифметической прогрессии.

Пример 3. Геометрическая прогрессия  $b_{n+1} = b_n q$ ,  
 $q$  — знаменатель геометрической прогрессии.



## Примеры последовательностей.

Продолжите ряд: 1, 10, 3, 9, 5, 8, 7, 7, 9, 6...

Ответ: Ряд состоит из двух частей: числа на нечетных местах: 1, 3, 5, 7, 9...; числа на четных местах: 10, 9, 8, 7

Продолжите ряд 77, 49, 36, 18...

Ответ: Перемножаются две цифры, входящие в предыдущее число



# Числа Фибоначчи.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610..

Элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.



Леонардо Фибоначчи - итальянский математик.

(родился около 1170 — умер после 1228),

Последовательность Фибоначчи рекуррентно задать легко, а аналитически — трудно.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

## Определение 2.

Последовательность  $(y_n)$ , называют **ограниченной сверху**, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность  $(y_n)$  **ограничена сверху**, если существует число  $M$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \leq M$ . Число  $M$  называют **верхней границей последовательности**.

Например:  $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$

Верхняя граница -  $-1$



## Определение 3.

Последовательность  $(y_n)$ , называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность  $(y_n)$  **ограничена снизу**, если существует число  $m$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \geq m$ . Число  $m$  называют **верхней границей последовательности**.

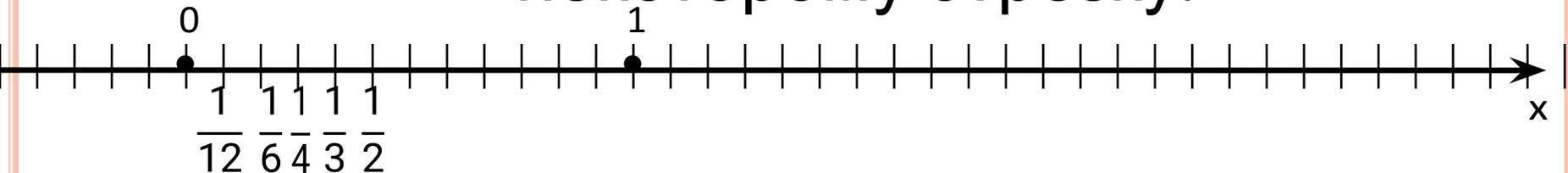
Например:  $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$

Нижняя граница - 1



Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее **называют ограниченной последовательностью**.

Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку.



$$y_n = \frac{1}{n} - \text{ограниченная последовательность}$$

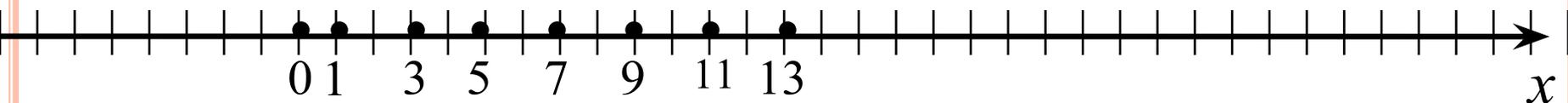
$$y_n \in [0; 1]$$





Члены последовательности  $(y_n)$  как бы «сгущаются» около точки 0. Говорят последовательность  $(y_n)$  *сходится*.

$$y_n = 2n - 1$$



У последовательности  $(y_n)$  такой «точки сгущения» нет. Говорят последовательность  $(y_n)$  *расходится*.



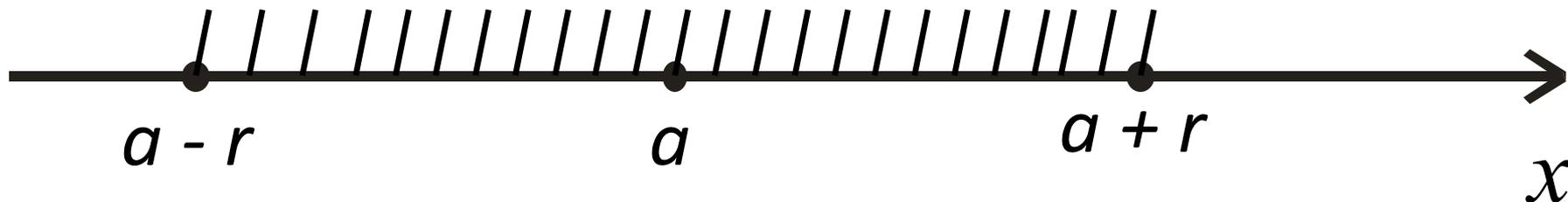
## Определение 6.

Число  $b$  называют **пределом** **последовательности**  $(y_n)$ , если в любой заранее выбранной окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

$$y_n \rightarrow b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Читают: *предел последовательности  $(y_n)$  при стремлении  $n$  к бесконечности равен  $b$  или предел последовательности  $(y_n)$  равен  $b$ .*

# Понятие предела числовой последовательности геометрически



«окрестность»:

интервал  $(a - r; a + r)$  называется **окрестностью точки  $a$** , а число  $r$  – **радиусом окрестности**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0; \quad |q| < 1$$

*Если  $|q| > 1$ , то последовательность  $y_n = q^n$  расходится.*

*Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$$



# Свойства сходящихся последовательностей.

**Свойство 1.** Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

**Свойство 2.** Если последовательность сходится, то она ограничена.

**Свойство 3.** Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.  
( теорема Вейерштрасса).



# «ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ».

## ▣ Теорема

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ , то

*предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c ;$$

*предел произведения равен произведению*

*пределов:*  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc ;$

*предел частного равен частному пределов:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c} , c \neq 0 ;$$

*постоянный множитель можно вынести*

*за знак предела:*  $\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = kc .$



**ВНИМАНИЕ!**

**Для любого натурального показателя  $m$  и любого коэффициента  $k$  справедливо соотношение.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{n^m} \right) = 0$$

