

Транспортные задачи

План:

- 1. Постановка задачи*
- 2. Экономико-математическая модель задачи*
- 3. Пример составления ЭММ транспортной задачи.*

1. Постановка задачи

Транспортная задача - одна из наиболее распространенных специальных задач линейного программирования.

Первая строгая постановка транспортной задачи принадлежит Ф. Хичкоку (1941 г.), поэтому в зарубежной литературе ее называют проблемой Хичкока.



Первый точный метод решения ТЗ разработан Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным в 1949 г.

Под названием «**транспортная задача**» объединяется широкий круг задач с единой математической моделью.



Матрица системы ограничений ТЗ настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы.

Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

Общим для ТЗ является распределение ресурсов, находящихся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов.

Критерии оптимальности:

1. *Критерий стоимости* (минимум затрат на реализацию плана перевозок);
2. *Критерий времени* (минимум времени) и др.

Задачи, относящиеся к транспортным:

- прикрепление потребителей ресурса к производителям;
- привязка пунктов отправления к пунктам назначения;
- взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направлений;
- отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования;
- оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами-изготовителями и др.

2. Экономико-математическая модель транспортной задачи

Дано:

- Множество I , включающее m пунктов отправления груза, имеющегося в количествах a_i ($i=1 \dots m$)
- Множество J , включающее n пунктов потребления, в каждом из которых имеется спрос на данный груз в количестве b_j ($j=1 \dots n$)
- Затраты c_{ij} на перевозку единицы груза между пунктами i и j

Найти:

- План перевозок $X = (x_{ij})$, согласно которому груз из пунктов отправления перевозится в пункты потребления с минимальными транспортными издержками, а спрос удовлетворяется полностью.

Целевая функция:

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Условия удовлетворения спроса:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1 \dots n$$

Условия полного вывоза груза:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1 \dots m$$

Условия неотрицательности:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$$

Условие задачи можно представить в виде таблицы поставок.

Потребители Поставщики	B_1	B_2	...	B_n	Запасы (объемы отправления)
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	...	b_n	

Транспортная задача называется **закрытой**, если суммарный объем отправляемых грузов равен суммарному объему потребности в этих грузах по пунктам назначения, т.е.

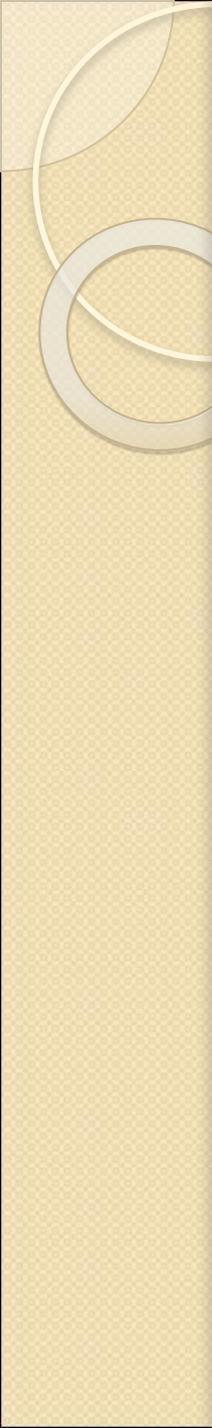
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

В противном случае, ТЗ называется **открытой**.

Открытую задачу необходимо привести к закрытой форме.

В случае, если:

- потребности по пунктам потребления превышают запасы пунктов отправления, то вводится фиктивный поставщик с недостающим объемом отправления;
- запасы поставщиков превышают потребности потребителей, то вводится фиктивный потребитель с необходимым объемом потребления.



Варианты, связывающие фиктивные пункты с реальными, имеют нулевые оценки.

После введения фиктивных пунктов задача решается как закрытая.

Особенности ТЗ:

- распределению подлежат однородные ресурсы;
- условия задачи описываются только уравнениями;
- все переменные выражаются в одинаковых единицах измерения;
- во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице;
- каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.



Транспортные задачи могут решаться симплекс-методом.

Однако перечисленные особенности позволяют для транспортных задач применять более простые методы решения.

3. Пример

4 предприятия для производства продукции используют некоторое сырьё. Спрос на сырьё каждого из предприятий соответственно составляет: 120, 50, 190 и 110 у.ед.

Сырьё сосредоточено в трёх местах. Предложения поставщиков сырья равны: 160, 140 и 170 у.ед.

На каждое предприятие сырьё может завозиться от любого поставщика.

Тарифы перевозок известны и задаются матрицей

$$C = \begin{Bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{Bmatrix}$$

C_{ij} - тариф на перевозку сырья от i -го поставщика j -му потребителю.

Тариф – стоимость перевозки единицы сырья.

Требуется составить план перевозок, при котором общая стоимость перевозок минимальна.

Построение ЭММ задачи

Пусть X_{ij} - количество сырья, перевозимого от i -го поставщика j -му потребителю.