

Методы оптимизации. Метод Ньютона.

выполнил: студент группы 3161

Николаев Р.С.

Санкт-
Петербург
2017

- ▶ Оптимизация - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.
- ▶ Термином "оптимизация" в литературе обозначают процесс или последовательность операций, позволяющих получить уточненное решение.
- ▶ Конечная цель оптимизации - отыскание наилучшего или "оптимального" решения

Постановка задачи оптимизации

Этап I. Установление границ подлежащей оптимизации системы.

Этап II. Выбор количественного критерия, позволяющего выявить наилучший вариант, называемого характеристическим критерием.

Этап III. Определение внутрисистемных переменных, через которые выражается характеристический критерий.

Этап IV. Построение модели, которая описывает взаимосвязь внутрисистемных переменных.

Методы одномерной оптимизации

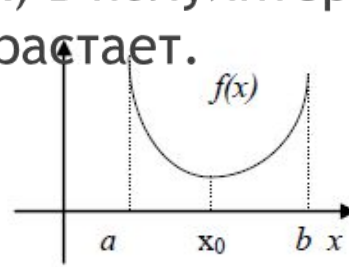
Задача сводится к поиску наибольшего или наименьшего значения скалярной действительной функции $f(x)$

Методы одномерной оптимизации разделяются на подклассы по следующим принципам:

- использование в процессе поиска экстремума информации о самой функции, так как в ряде задач целевая функция задана таким образом, что точных значений производных найти нельзя (только оценить).
- использование в процессе поиска экстремума информации о самой функции или ее производных.
- по виду целевой функции (методы решения одно- и многоэкстремальных задач).

➤ **Монотонность функции.** Функция $f(x)$ является монотонной на интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, если функция монотонно возрастающая или $f(x_1) > f(x_2)$, если функция монотонно убывающая.

Унимодальность. Функция $f(x)$ является унимодальной на отрезке, если она монотонна по обе стороны от единственной на отрезке точки x_0 , то есть функция $f(x)$ в полуинтервале $[a, x_0)$ убывает, а в полуинтервале $(x_0, b]$ возрастает.



Определение глобального минимума. Функция $f(x)$, определённая на множестве D достигает глобального минимума в точке $x^* \in D$, если $f(x^*) < f(x)$ для всех $x \in D$.

Определение локального минимума. Функция $f(x)$, определённая на множестве D имеет локальный минимум в точке $x^* \in D$, если существует такая ε -окрестность точки x^* , что для всех x из этой ε -окрестности $f(x^*) < f(x)$.

Методы с использованием информации о производной функции

$$\Delta_* \approx \sqrt{\frac{2\Delta_f}{f''(x_*)}} \quad - \text{ абсолютная погрешность нахождения точки } x^* \text{ методом прямого поиска}$$

При нахождении точки x^* происходит потеря примерно половины верных значащих цифр, с которыми можно вычислить приближенное значение минимизирующей функции.

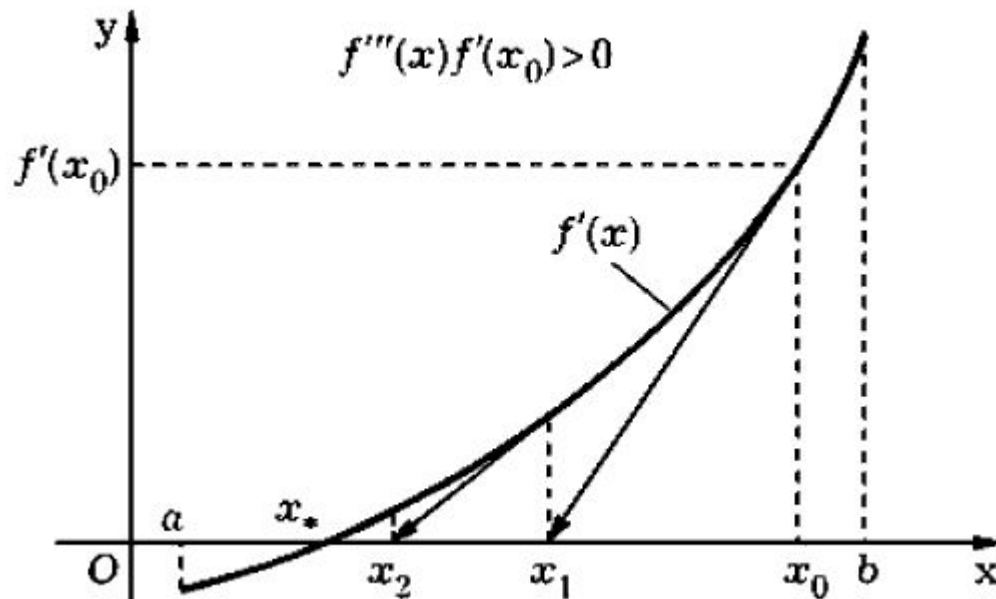
$$\Delta'_* = \frac{\Delta_{f'}}{f''(x_*)} \quad - \text{ абсолютная погрешность нахождения точки } x^* \text{ методом с использованием производной функции}$$

При нахождении точки x^* можно сохранить все верные значащие цифры, с которыми можно вычислить значение производной функции.

Метод Ньютона (метод касательных)

Если строго унимодальная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на этом отрезке, то точку $x^* \in [a, b]$ минимума этой функции можно найти путем решения уравнения $f'(x) = 0$

1. Выбор начальной точки x_0
2. Линеаризация функции $f'(x)$
3. Выбор следующей точки приближения x_1
4. Вычисление остальных точек итерационной последовательности $x_{k+1} = x_k - \frac{f''(x_k)}{f'''(x_k)}$



Метод Ньютона (метод касательных)

Условия надежной работы метода Ньютона:

- $f''(x)$ в некоторой окрестности искомой точки x^* сохраняла знак;
- начальная точка x_0 должна выбираться из той самой окрестности.

Достаточное условие монотонной сходимости:

Постоянство в интервале между точками x_0 и x^* знака производной $f'''(x)$ и совпадение его со знаком $f'(x)$

$$|x^* - x_k| \leq \frac{|x^* - x_{k-1}|^2}{C},$$

$$C = 2 \frac{\min |f''(x)|}{\max |f'''(x)|}$$

$$|x_k - x_*| < |x_{k-1} - x_k|$$

Пример использования метода Ньютона

Найдем точку x_* наименьшего значения функции

$f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ на отрезке $[1, 4]$

1. Найдем производные

$$f'(x) = 2x - 16/x^2, \quad f''(x) = 2 + 32/x^3 \quad \text{и} \quad f'''(x) = -96/x^4$$

2. Выберем $x_0 = 1$ и вычислим $f'(x_0) = -14$, $f''(x_0) = 34$.

3. Вычислим

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 1 - \frac{-14}{34} \approx 1,4118.$$

$$x_2 \approx 1,8010, \quad x_3 \approx 1,9790, \quad x_4 \approx 1,9998$$

$$4 \quad |x_4 - x_*| \leq |x_3 - x_4| \approx 0,0208$$

5 в силу того что последовательность $\{x_k\}$ возрастает точка x_* должна лежать в интервале

$$\cdot (x_4, x_4 + 0,0208) = (1,9998, 2,0206)$$

$$6 \quad f'(1,9998) \approx -0,0012 < 0, \quad f'(2,0206) \approx 0,1223 > 0,$$

• $f'(x) = 0$ в интервале $(1,9998, 2,0206)$ имеет корень, являющийся точкой минимума функции $f(x)$