Лекция 2.8.

12.1.5. Дифференциальные уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right).$

- Рассмотрим два случая.
- 1) Если $aB - bA \neq 0,$ производят замену переменных

$$\bar{x} = x - x_0, \quad \bar{y} = y - y_0,$$

где x_0, y_0 находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ Ax + By + C = 0, \end{cases} \qquad x_0 = -\frac{cB - bC}{aB - bA}, \quad y_0 = -\frac{aC - cA}{aB - bA}.$$

- В результате дифференциальное уравнение сводится к однородному уравнению.

2) Если $aB - bA = 0,$ **производят замену переменных**

$$\begin{cases} \overline{x} = x, \\ \overline{y} = ax + by. \end{cases}$$

- **В результате дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.**

Примеры. 1) $$y' = \frac{-7x+3y-2}{-3x+4y-5}.$$

$$aB - bA = -19 \neq 0.$$

- **Первый случай.**

$$x_0 = \frac{-8+15}{19} = \frac{7}{19}, \quad y_0 = \frac{35-6}{19} = \frac{29}{19}.$$

$$\begin{cases} \overline{x} = x - \dfrac{7}{19}, \\ \overline{y} = y - \dfrac{29}{19}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \overline{x} + \dfrac{7}{19}, \\ y = \overline{y} + \dfrac{29}{19}. \end{cases}$$

$$\overline{y}' = \frac{-7\overline{x} + 3\overline{y} - \dfrac{7\cdot 7}{19} + \dfrac{3\cdot 29}{19} - 2}{-3\overline{x} + 4\overline{y} - \dfrac{3\cdot 7}{19} + \dfrac{4\cdot 29}{19} - 5} = \frac{-7\overline{x} + 3\overline{y}}{-3\overline{x} + 4\overline{y}}.$$

- **Дифференциальное уравнение свелось к однородному дифференциальному уравнению.**

2) $$y' = \frac{-x + y - 2}{x - y}. \qquad aB - bA = -1(-1) - 1\cdot 1 = 0.$$

- **Второй случай** $\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = -x + y, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \bar{x}, \\ y = \bar{y} + x, \end{cases}$ $y' = \bar{y}' + 1.$
- **Дифференциальное уравнение примет вид**

$$\bar{y}' + 1 = \frac{\bar{y} - 2}{-\bar{y}} = \frac{2}{\bar{y}} - 1$$ **или** $$\bar{y}' = \frac{2}{\bar{y}} - 2.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\bar{y}' = 2\frac{1 - \bar{y}}{\bar{y}}, \qquad \int \frac{-\bar{y}d\bar{y}}{1 - \bar{y}} = -2\int dx + C, \qquad \int \frac{(1 - \bar{y} - 1)d\bar{y}}{1 - \bar{y}} = -2x + C,$$

$$\bar{y} + \ln|1 - \bar{y}| = -2x + C, \qquad -x + y + \ln|1 + x - y| = -2x + C.$$

Окончательно $$y + \ln|1 + x - y| = -x + C.$$

12.1.6. Линейные дифференциальные уравнения.

- **Определение.** Дифференциальное уравнение вида $$y' + p(x)y = q(x),$$ т.е. линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y' называется линейным.

- Для решения такого типа уравнений рассмотрим два метода: *метод Лагранжа* и *метод Бернулли.*

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной). $y' + p(x)y = q(x).$

- Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение $y' + p(x)y = 0.$ Это уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C.$

Решение уравнения $y = Ce^{-\int p(x)dx}.$ Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет такой же вид, но C считается функцией $C = C(x),$ т.е. $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$ Найдем производную

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)$$

и подставим в исходное уравнение y и $y'.$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right).$$

Метод Бернулли (метод замены переменной). $y' + p(x)y = q(x).$

- Представим неизвестную функцию как произведение двух функций $y = uv,\ \ y' = u'v + uv'.$ Подставим в исходное уравнение y и $y'.$ Получим

$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$

Потребуем, чтобы функция v была такой, что выражение

$$\left(v' + p(x)v\right)$$

тождественно равнялось нулю.

Тогда исходное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными

$$\left(v' + p(x)v\right) = 0 \quad \text{и} \quad u'v = q(x).$$

Решим их последовательно.

- 1) $v' + p(x)v = 0,$ $\qquad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx,$

$\ln v = -\int p(x)dx,$ $\qquad v = e^{-\int p(x)dx}.$

- 2) $u'v = q(x),$ $\qquad u'e^{-\int p(x)dx} = q(x),$

$du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$ $\qquad u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Уравнение Бернулли.

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^m,$$
$$m \neq 0,\ m \neq 1.$$

- **Пример.** 1) Метод Лагранжа: $3(xy' + y) = xy^2,\ y(1) = 3.$

$$xy' + y = 0,$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y,\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + \ln C,\ \ln|y| = -\ln|x| + \ln C,\ y = \frac{C}{x}.$$

$$y = \frac{C(x)}{x},\ y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.\ 3\left(x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x}\right) = x\frac{C^2(x)}{x^2},$$

$$3C'(x) = \frac{C^2(x)}{x}, \qquad 3\int\frac{dC(x)}{C^2(x)} = \int\frac{dx}{x} + \ln C_1,\ -3\frac{1}{C(x)} = \ln|C_1x|.$$

$$y = -\frac{3}{x\ln|C_1x|},\ 3 = -\frac{3}{\ln|C_1|},\ \ln|C_1| = -1,\quad C_1 = e^{-1},\ y = -\frac{3}{x(\ln|x| - 1)}.$$

1) Метод Бернули:

$$3\left(xy'+y\right)=xy^2,\ \ y\left(1\right)=3.$$

$$y=uv,\ \ y'=u'v+uv'.$$

- $3xu'v+3xuv'+3uv=xu^2v^2,\ \ 3xu'v+3u\left(xv'+v\right)=xu^2v^2.$

$$xv'+v=0,\qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\ \ \ln|v|=-\ln|x|,\ \ v=\frac{1}{x}.$$

$$3xu'v=xu^2v^2,\ \ 3xu'\frac{1}{x}=xu^2\frac{1}{x^2},\qquad 3u'=\frac{u^2}{x},$$

$$3\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\ \ -3\frac{1}{u}=\ln|Cx|,\qquad u=-\frac{3}{\ln|Cx|}.$$

$$y=-\frac{3}{x\ln|Cx|},\ \ 3=-\frac{3}{\ln|C|},\ \ \ln|C|=-1,\ \ C=e^{-1},\ \ y=-\frac{3}{x\left(\ln|x|-1\right)}.$$

12.1.7 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

- **Определение.** Если левая часть уравнения

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то это уравнение называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

- Это выполняется, если $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области и
- $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$du(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

$$du(x, y) = 0,\ u(x, y) = C,$$

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C.$$

$$\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0.$$

Примеры. 1)

- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y, \ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y.$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y),$
- $$u = \int\left(e^x + y + \sin y\right)dx + C(y) = e^x + xy + x\sin y + C(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y) = Q(x, y) = x + x\cos y + e^y,$$

$$C'(y) = e^y, \ C(y) = e^y, \qquad e^x + xy + x\sin y + e^y = C_1.$$

2) $$\left(x+y-1\right)dx+\left(e^{y}+x\right)dy=0.$$

- $$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$ $$\int_{x_0}^{x} P\left(x,y\right)dx+\int_{y_0}^{y} Q\left(x_0,y\right)dy=C.$$
- **Положим** $x_0=y_0=0.$

$$\int_{0}^{x}\left(x+y-1\right)dx+\int_{0}^{y} e^{y}dy=C,\ \left.\left(\frac{x^2}{2}+yx-x\right)\right|_{o}^{x}+\left.e^{y}\right|_{0}^{y}=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+yx-x+e^{y}-1=C,\qquad \frac{x^2}{2}+yx-x+e^{y}=C.$$

Интегрирующий множитель.

- Если $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, то вводят интегрирующий множитель такой $\mu = \mu(x, y)$, что $\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$.
- 1) Если $\mu = \mu(x)$, то
$$\mu = e^{\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{Q} dx}.$$
- 2) Если $\mu = \mu(y)$, то
$$\mu = e^{-\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{P} dy}.$$

Пример. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0.$

- $$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y.$$

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1,$$

$$\mu = e^{\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{Q}dx} = e^{\int dx} = e^{x}.$$

$$e^{x}(x\cos y - y\sin y)dy + e^{x}(x\sin y + y\cos y)dx = 0.$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = e^{x}(x\cos y + \cos y - y\sin y),\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + e^{x}\cos y,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

$$e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+e^{x}\left(x\sin y+y\cos y\right)dx=0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right),$$

$$u=\int e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+C\left(x\right)=xe^{x}\sin y+ye^{x}\cos y-e^{x}\sin y+C\left(x\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\sin y+xe^{x}\sin y+e^{x}y\cos y-e^{x}\sin y+C'\left(x\right)=e^{x}\left(x\sin y+y\cos y\right),$$

$$C'\left(x\right)=0,\ \ C=const.$$

$$u=xe^{x}\sin y+ye^{x}\cos y-e^{x}\sin y=C.$$