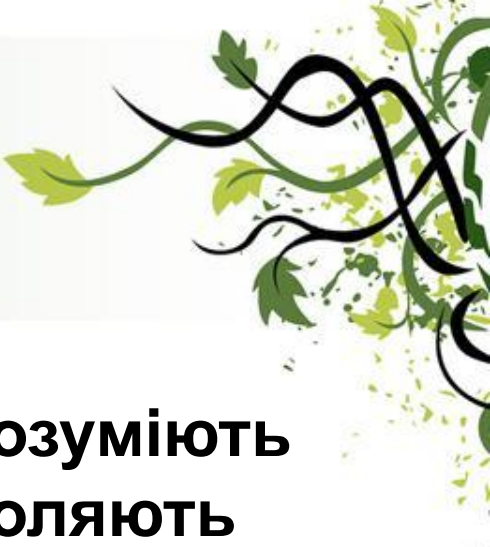




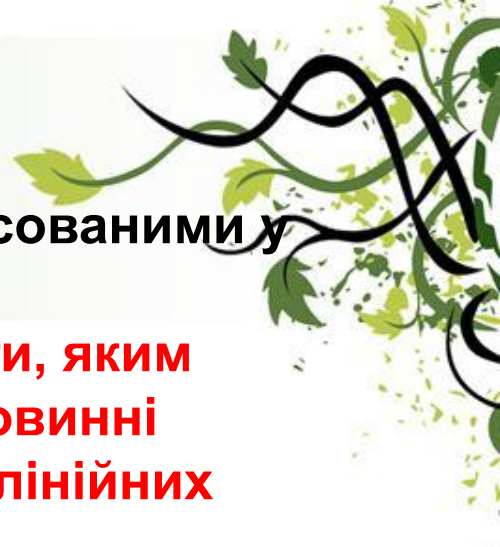
# Моделювання економічних систем і процесів для вирішення задач методами лінійного програмування

*к.е.н., доцент Тимошевський В.В.*



**Під методами лінійного програмування розуміють такі програми математичних дій, які дозволяють відшукати оптимальні вирішення різних економічних задач, умови яких виражені у вигляді системи лінійних рівнянь або нерівностей, а цільова установка – у вигляді лінійної функції.**





Методи лінійного програмування можуть бути застосованими у випадках, коли задовольняються наступні умови:

**1) всі економічні, технологічні, соціальні і інші вимоги, яким повинні відповідати оптимальні вирішення задач, повинні допускати їх математичне формулювання у вигляді лінійних рівнянь і нерівностей;**

**2) система лінійних рівнянь і нерівностей, яка характеризує всі умови задачі, повинна мати багатоваріантність вирішень;**

**3) цільова установка по вирішенню проблеми повинна бути економічно чітко сформульована і допускати запис у вигляді лінійної функції з числовим виразом коефіцієнтів при змінних пошукових величинах.**

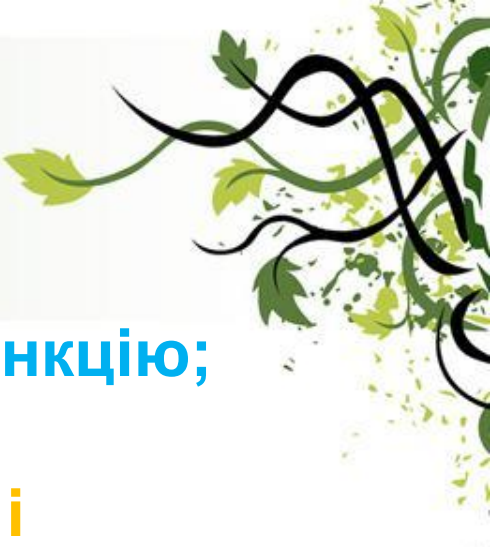


рийнято  
мерують по  
домими).

A decorative graphic in the bottom right corner featuring a stylized green butterfly with yellow and white patterns on its wings, surrounded by green leaves and a trail of black dots.

[illegible]





Економіко-математична модель включає:

- 1) лінійну форму змінних, або цільову функцію;
- 2) функціональні обмеження змінних, які представлені системою лінійних рівнянь і нерівностей, що формують умову задачі;
- 3) обмеження невід'ємності змінних величин.

I.  $C_{(\text{екстр.})} = \sum_{j=1}^n c_j x_j$  – цільова функція;

II. 
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq B_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n v_{ij} x_j = Q_i & (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

III.  $x_j \geq 0,$





# ЗАДАЧА



При розробці проекту землеустрою фермерського господарства в процесі землевпорядного обстеження встановлено, що рілля площею 400.0 га можливо трансформувати в сіножаті та культурні зрошувані пасовища (КЗП). Для безперебійного забезпечення зеленими кормами поголів'я ВРХ необхідно, щоб площа КЗП була не менше 280.0 га.

**EXAMPLE**



# Ресурси, які є в господарстві для цілей трансформації угідь і норми затрат ресурсів на одиницю трансформованої площі

| № п/ч | Назва затрат на 1 га трансформації             | Одиниці виміру | Трансформація в: |      | Ресурси на проведення трансформації |
|-------|------------------------------------------------|----------------|------------------|------|-------------------------------------|
|       |                                                |                | Ріллю богарну    | КЗП  |                                     |
| 1     | Грошових ресурсів                              | грн.           | 320              | 500  | 180000                              |
| 2     | Трудових ресурсів                              | люд.-год.      | 20               | 30   | 13000                               |
| 3     | Мінеральних добрив                             | ц.д.р.         | 31,5             | 16,0 | 10000                               |
| 4     | Вапно для вапнування                           | ц              | 40               | 35   | 17000                               |
| 5     | Механізованих затрат                           | маш/днів       | 41,5             | 30,2 | 15000                               |
| 6     | Вартість валової продукції, одержуваної з 1 га | грн.           | 245              | 175  |                                     |



## **Завдання:**

**Знайти таке поєднання сіножатей та культурних зрошуваних пасовищ, щоб при раціональному вкладенні ресурсів, які є в господарстві, одержати максимальний вихід валової продукції в грошовому виразі.**



## 1. Невідомими в задачі позначимо:

**X1** – площа ріллі, що трансформується в сіножаті (га);

**X2** - площа ріллі, що трансформується в КЗП (га).



## 2. Ресурсами в задачі є:

- b1** – площа ріллі, наміченої для трансформування в інші угіддя (га);
- b2** – грошові ресурси, які виділені на трансформацію (грн);
- b3** – трудові ресурси, виділені на трансформацію (люд.-год.);
- b4** – мінеральні добрива, виділені на трансформацію (ц.д.р.);
- b5** – вапно, призначене для вапнування угідь, які трансформуються (ц);
- b6** – механізовані ресурси, які можна використати на трансформацію (маш.-дн.);
- b7** – мінімально необхідна площа КЗП (га).



## Техніко-економічними коефіцієнтами в задачі позначимо:

- $a_{11}$  – площа 1 га ріллі, трансформованої в 1 га сіножать (га);
- $a_{12}$  – площа 1 га ріллі, трансформованої в 1 га культурних зрошуваних пасовищ (га);
- $a_{21}$  – грошові затрати на трансформацію 1 га ріллі в сіножаті (грн/га);
- $a_{22}$  – грошові затрати на трансформацію 1 га ріллі в КЗП (грн/га);
- $a_{31}$  – затрати трудових ресурсів на трансформацію 1 га ріллі в сіножаті (люд.-год/га);
- $a_{32}$  – затрати трудових ресурсів на трансформацію 1 га ріллі в КЗП (люд.-год/га);
- $a_{41}$  – норма внесення мінеральних добрив на 1 га сіножать при трансформації (ц.д.р./га);
- $a_{42}$  – норма внесення мінеральних добрив на 1 га КЗП при трансформації (ц.д.р./га);
- $a_{51}$  – норма внесення вапна на 1 га сіножать при трансформації (ц/га);
- $a_{52}$  – норма внесення вапна на 1 га КЗП при трансформації (ц/га);
- $a_{61}$  – механізовані затрати на 1 га ріллі трансформованої в сіножаті (маш.-дн./га);
- $a_{62}$  – механізовані затрати на 1 га ріллі трансформованої в КЗП (маш.-дн./га);
- $a_{72}$  – одинця виміру ріллі, що трансформується в КЗП (га).



## Техніко-економічні коефіцієнти при невідомих в цільовій функції позначимо:

**с1** – вартість валової продукції, одержуваної з 1 га сіножаті (грн/га);

**с2** – вартість валової продукції, одержуваної з 1 га КЗП (грн/га).

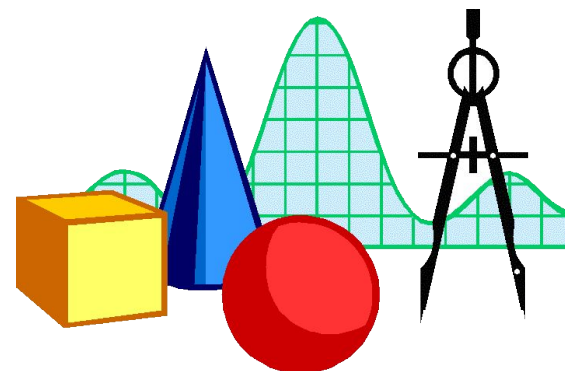


З урахуванням введених позначень економіко-математична модель задачі в розгорнутому вигляді буде мати вигляд:

Знайти:

$F_{\max} = c_1X_1 + c_2X_2$ , при умовах:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 < b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 < b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 < b_3 \\ a_{41}X_1 + a_{42}X_2 < b_4 \\ a_{51}X_1 + a_{52}X_2 < b_5 \\ a_{61}X_1 + a_{62}X_2 < b_6 \\ a_{72}X_2 > b_7 \\ x_1 > 0; x_2 > 0. \end{array} \right.$$



В розгорнутий запис економіко-математичної моделі підставимо значення техніко-економічних коефіцієнтів і ресурсів:

$$F_{\max} = 245x_1 + 175x_2, \text{ при умовах:}$$

$$x_1 + x_2 < 400$$

$$320x_1 + 500x_2 < 186000$$

$$20x_1 + 30x_2 < 13000$$

$$31.5x_1 + 16x_2 < 10000$$

$$40x_1 + 35x_2 < 17000$$

$$41.5x_1 + 30.2x_2 < 15000$$

$$x_2 > 280$$

$$x_1 > 0; \quad x_2 > 0.$$



# Алгоритм графічного методу

Будуємо прями, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях знаків нерівностей на знаки рівностей



Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі



Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування



Будуємо графік цільової функції та рухаючи його знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набуває свого екстремального значення.



Визначаємо координати точки, в якій функція мети набуває свого максимального чи мінімального значення і обчислюємо значення даної функції в цій точці



В системі нерівностей замінюємо нерівності на рівняння та визначаємо координати точок схрещення прямих з осями ординат і абсцис для побудови прямих в прийнятій системі координат на площині:

$$F_{\max} = 245x_1 + 175x_2, \text{ при умовах:}$$

$$x_1 + x_2 = 400$$

$$320x_1 + 500x_2 = 186000$$

$$20x_1 + 30x_2 = 13000$$

$$31.5x_1 + 16x_2 = 10000$$

$$40x_1 + 35x_2 = 17000$$

$$41.5x_1 + 30.2x_2 = 15000$$

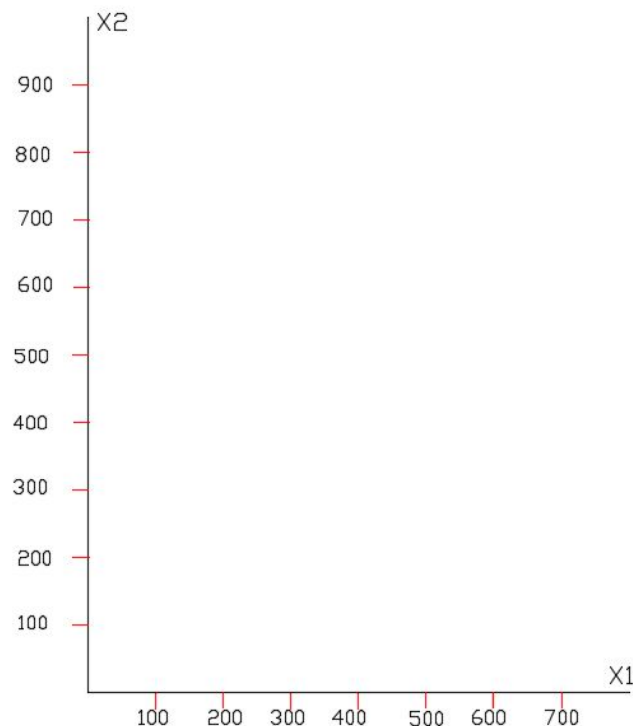
$$x_2 = 280$$

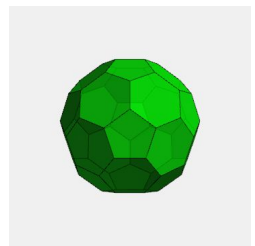
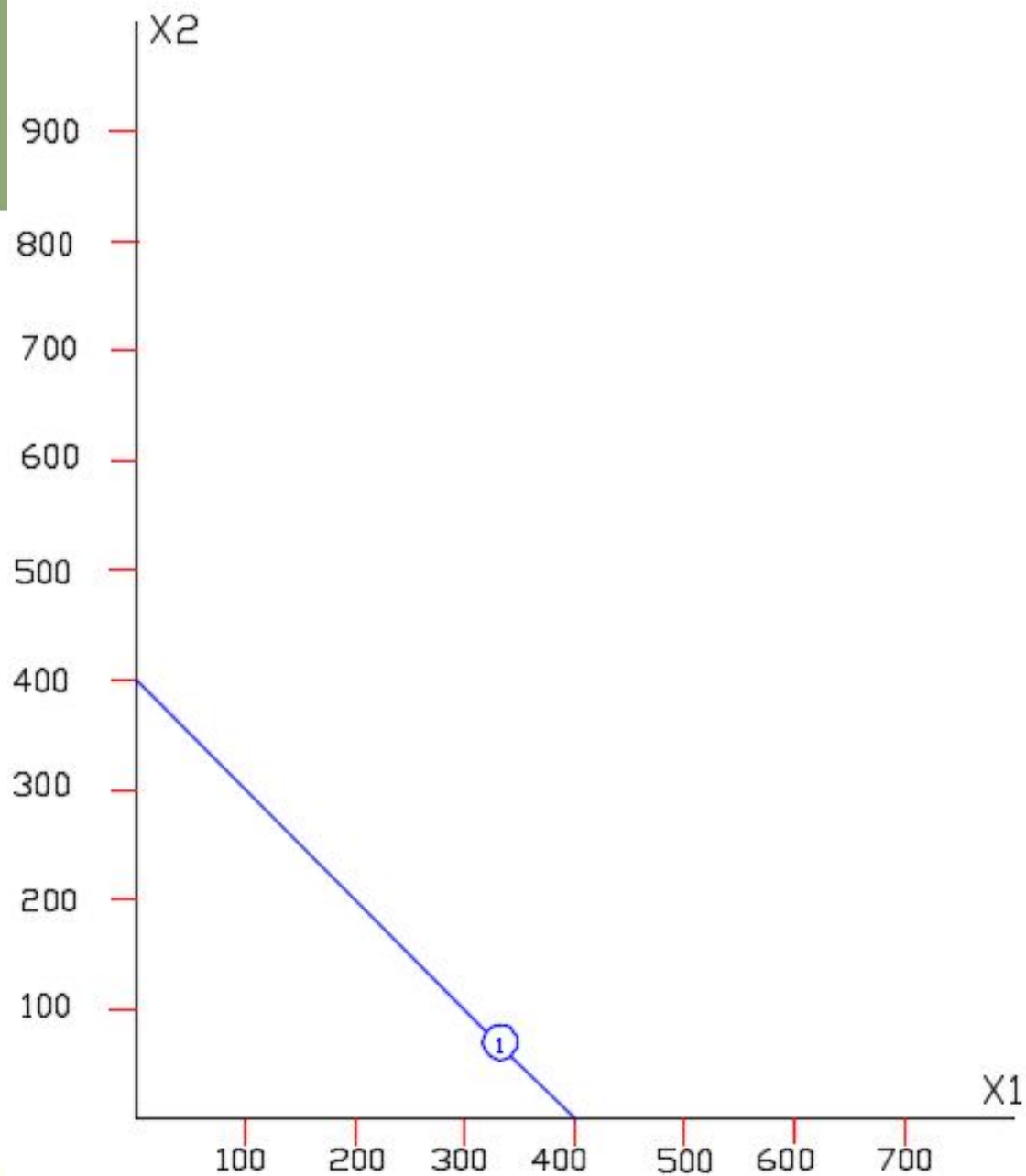
| № рівнян-<br>ня | Перетин з осями                         |                                         |
|-----------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
|                 | OX <sub>1</sub> (при x <sub>2</sub> =0) | OX <sub>2</sub> (при x <sub>1</sub> =0) |
| Граничні прямі  |                                         |                                         |
| 1               | 400                                     | 400                                     |
| 2               | 581.25                                  | 372                                     |
| 3               | 650,0                                   | 433,3                                   |
| 4               | 317,5                                   | 625,0                                   |
| 5               | 425,0                                   | 485,7                                   |
| 6               | 351,4                                   | 496,7                                   |
| 7               | 0                                       | 280                                     |

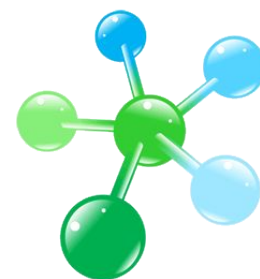
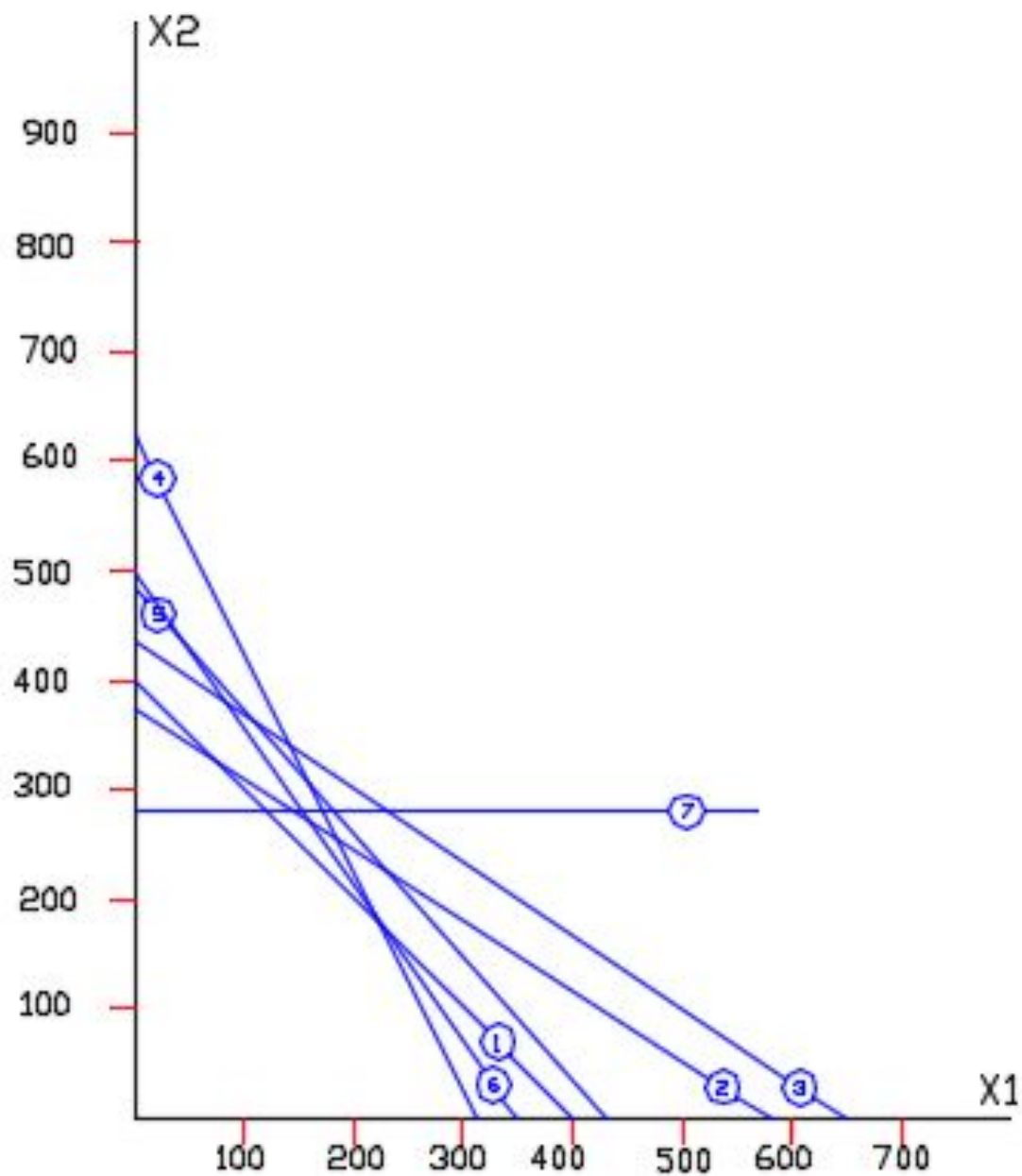
Значення цільової функції задається довільно, але при цьому координати точок схрещення одержаної прямої з осями  $B_{x_1}$  і  $B_{x_2}$  повинні мати той же порядок, що і координати точок схрещення граничних прямих.

| № рівнян-<br>ня | Перетин з осями         |                         |
|-----------------|-------------------------|-------------------------|
|                 | $OX_1$ (при $x_2 = 0$ ) | $OX_2$ (при $x_1 = 0$ ) |
| Граничні прями  |                         |                         |
| 1               | 400                     | 400                     |
| 2               | 581,25                  | 372                     |
| 3               | 650,0                   | 433,3                   |
| 4               | 317,5                   | 625,0                   |
| 5               | 425,0                   | 485,7                   |
| 6               | 351,4                   | 496,7                   |
| 7               | 0                       | 280                     |

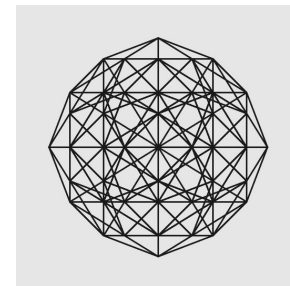
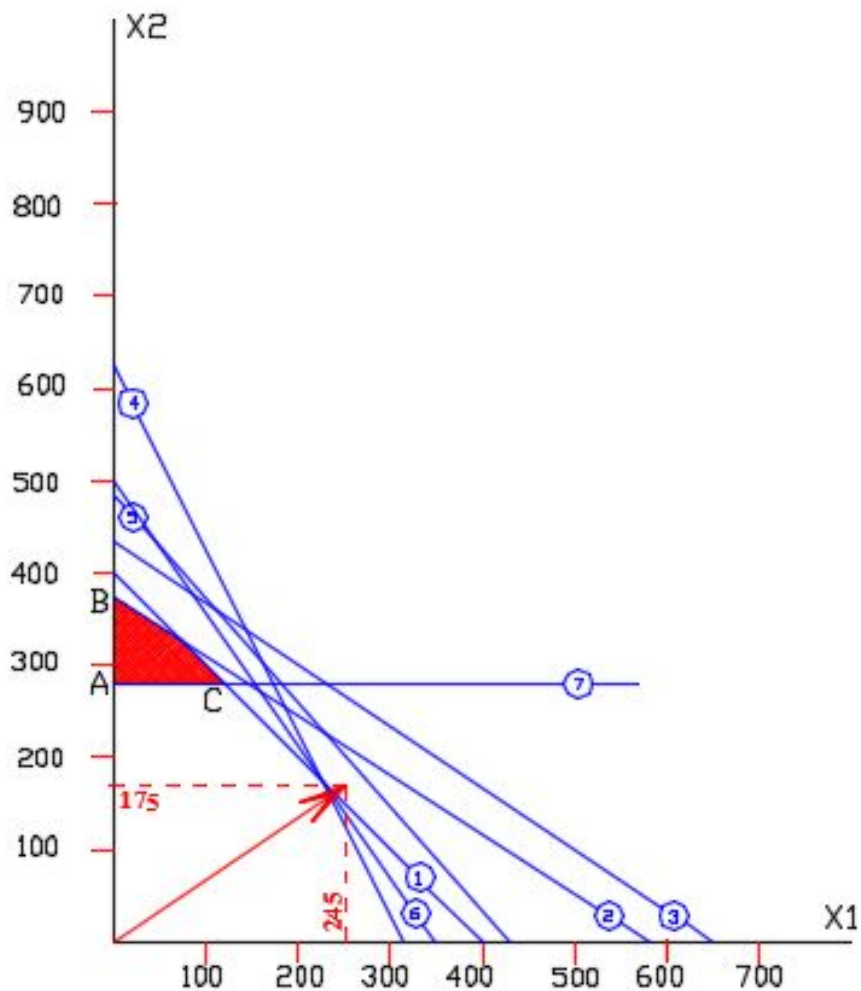
Користуючись даними таблиці на кресленні проводимо оцифровку  $B_{x1}$  і  $B_{x2}$  та будуємо за координатами прямі, які відбивають межі півплощин з допустимими і недопустимими значеннями координат  $x_1$  і  $x_2$  для системи обмежень в даній задачі.

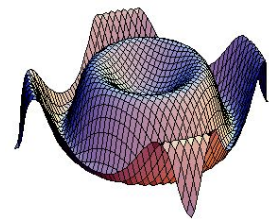
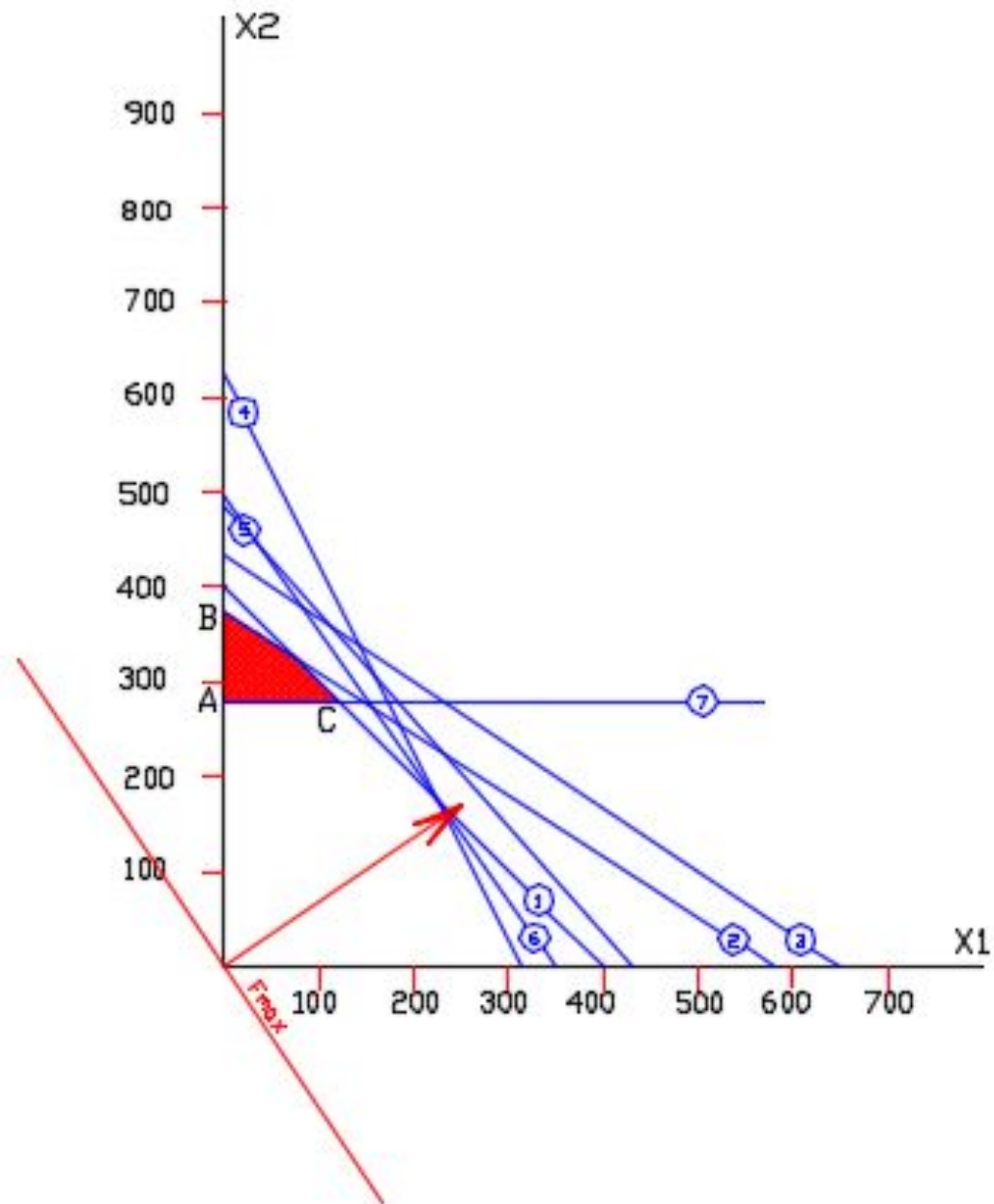






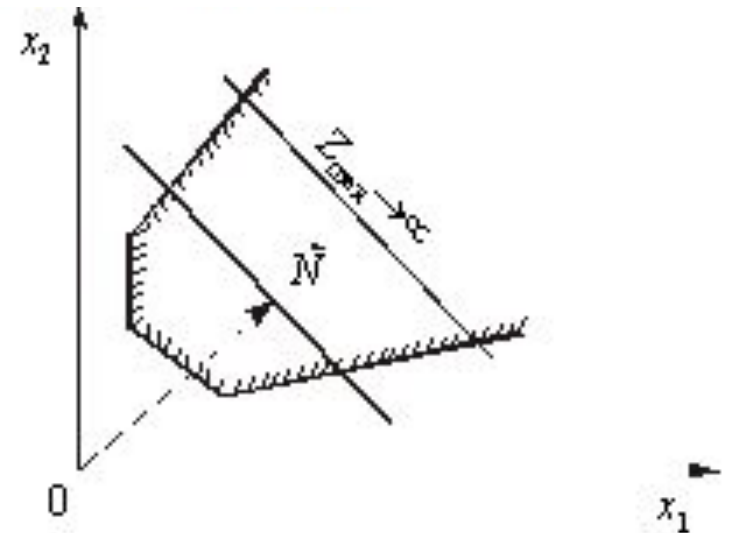
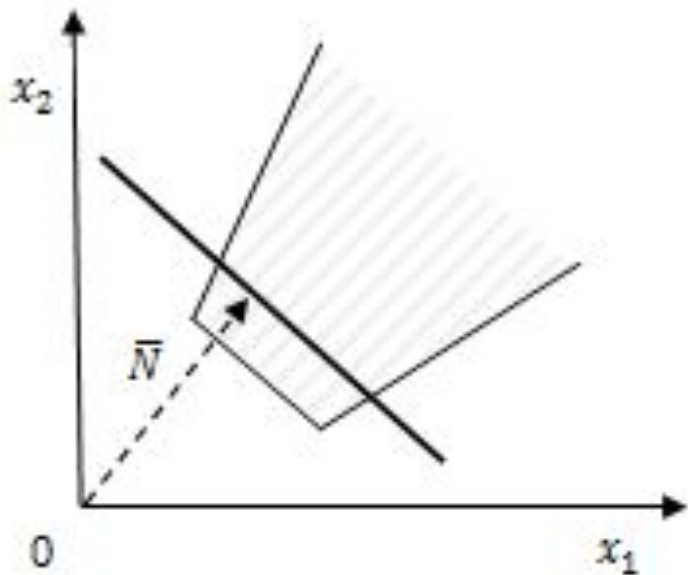
# Будуємо вектор цільової функції за значеннями коефіцієнтів $C_1$ та $C_2$





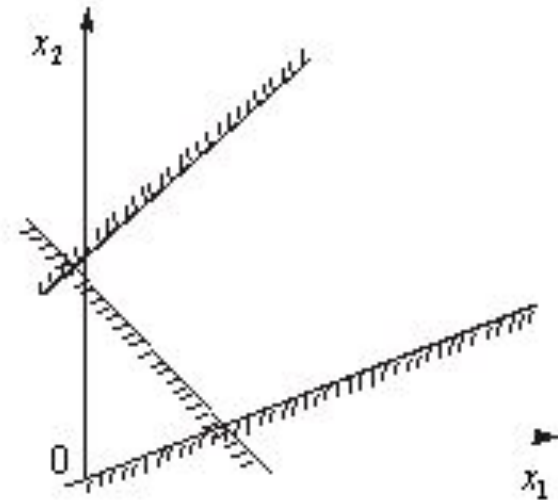
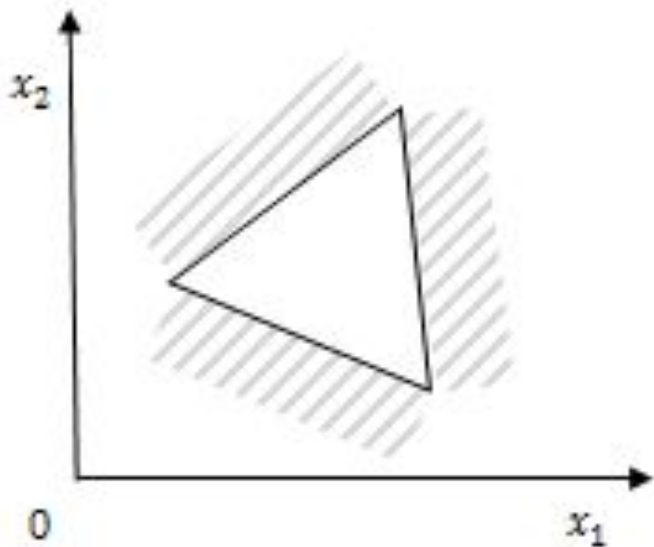
При використанні графічного методу для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування можливі такі випадки

Цільова функція є необмеженою на множині розв'язків. В такому випадку задача лінійного програмування не має оптимальних планів



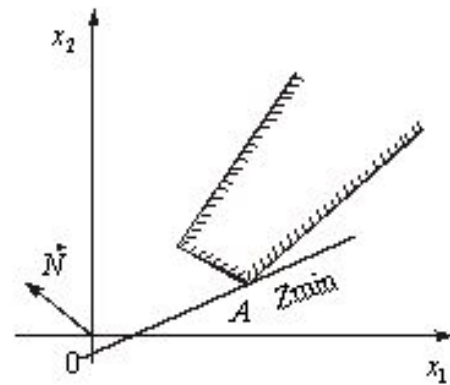
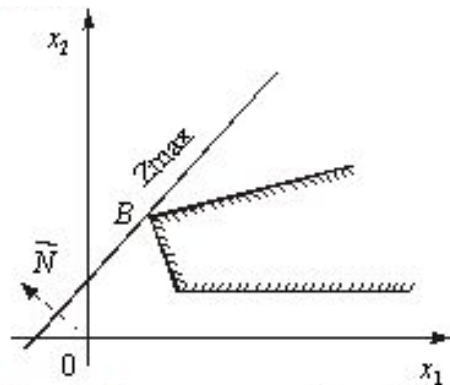
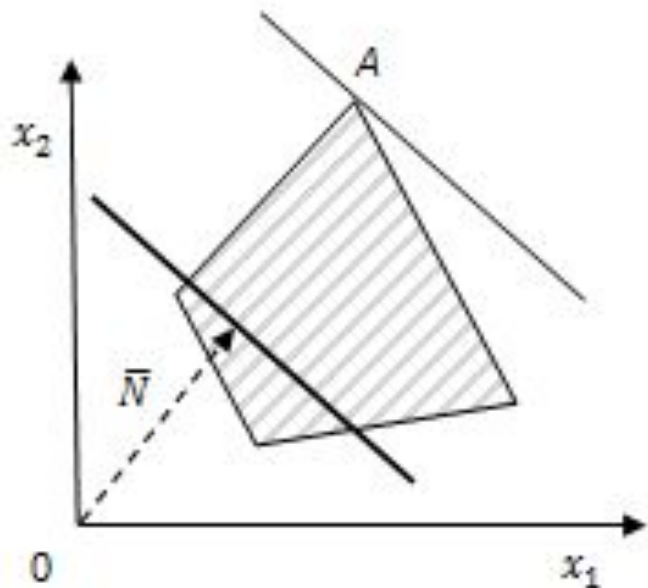
При використанні графічного методу для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування можливі такі випадки

**Система обмежень є несумісною.  
Цільова функція оптимальних  
планів не має також**



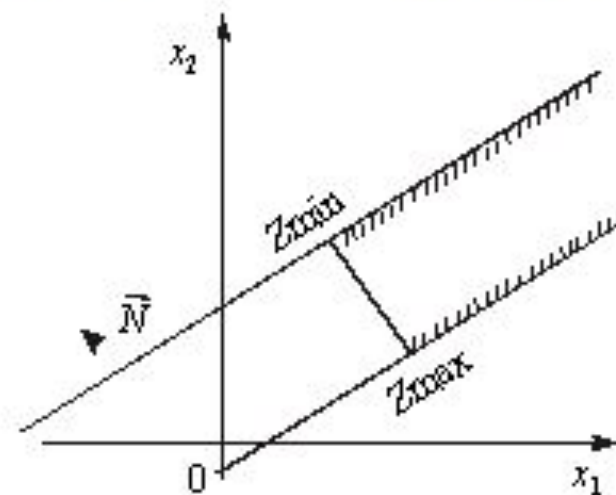
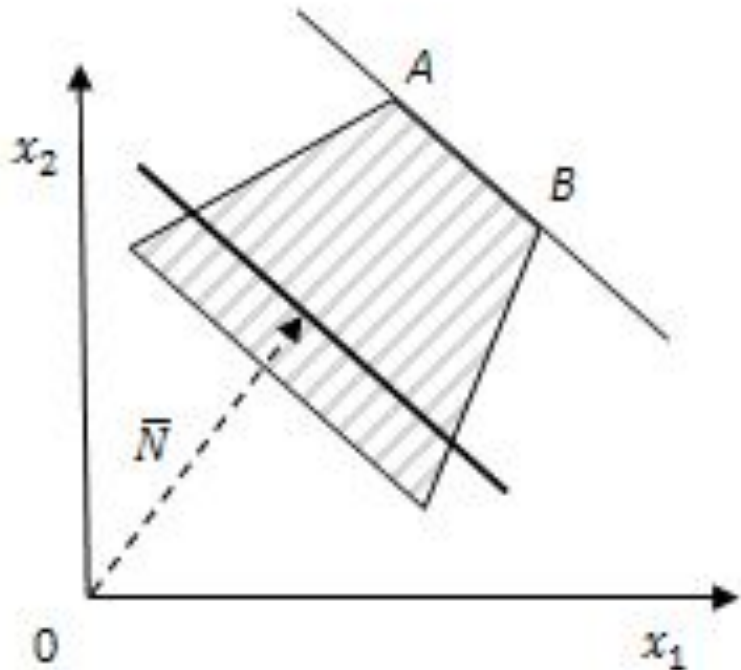
При використанні графічного методу для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування можливі такі випадки

Цільова функція набуває максимального значення в точці  $A$  багатокутника розв'язків

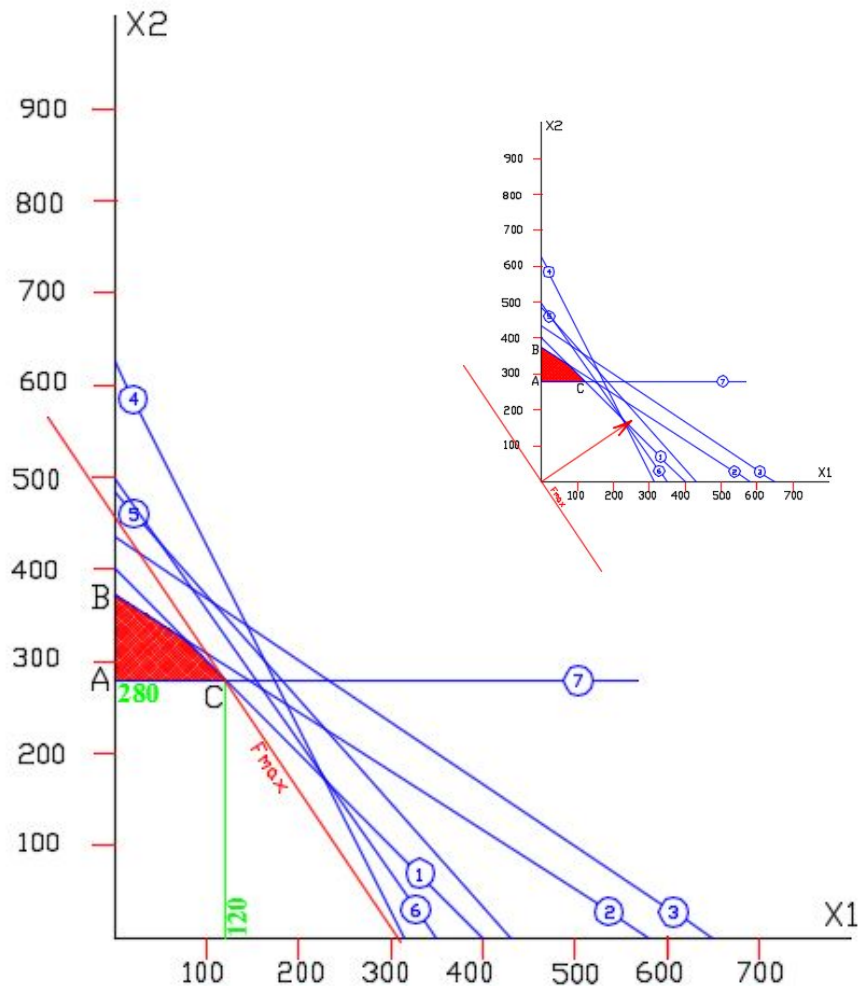


При використанні графічного методу для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування можливі такі випадки

Цільова функція набуває максимального значення в будь-якій точці відрізка  $AB$



Знаючи головну властивість лінії цільової функції - *при переміщенні її паралельно самій собі, до початку координат, значення  $F_{\max}$  зменшується, а при переміщенні від початку координат значення  $F_{\max}$  зростає*, знаходимо точку **оптимуму**. Максимальне значення цільової функції буде в крайній точці **C** трикутника **ABC**. Значення координат вершини трикутника **C** відповідає оптимальному варіанту задачі ( $x_1 = 120$ ,  $x_2 = 280$ ).



Для більш точного визначення координат точки С необхідно вирішити систему двох рівнянь прямих, які перетинаються в точці С:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 400 \\ x_2 = 280 \end{cases}$$



Таким чином ми одержали **оптимальне** проектне рішення щодо структури угідь при заданих ресурсах, згідно з яким ріллю площею 400 га необхідно трансформувати в сіножаті – 120 га, і в культурні зрошувані пасовища – 280 га.



При такому використанні угідь, що трансформуються, вартість валової продукції (значення цільової функції) складе:

$$F_{\max} = 245 \cdot 120 + 175 \cdot 280 = 78400 \text{ грн.}$$

### Аналіз використання виділених ресурсів

| Ресурси                            | Обсяг ресурсу | Використання ресурсів за оптимальним розрахунком |             | Різниця |
|------------------------------------|---------------|--------------------------------------------------|-------------|---------|
|                                    |               | $x_1 = 120$                                      | $x_2 = 280$ |         |
| Площа заболочених сіножатей, га    | 400           | $120 + 280 = 400$                                |             | 0       |
| Грошові ресурси, грн.              | 186000        | $320 \cdot 120 + 500 \cdot 280 = 17840$          |             | 7600    |
| Трудові ресурси, чол.-год          | 13000         | $20 \cdot 120 + 30 \cdot 280 = 10800$            |             | 2200    |
| Мінеральні добрива, ц.д.р.         | 10000         | $31,5 \cdot 120 + 16 \cdot 280 = 8260$           |             | 1740    |
| Вапно, ц                           | 17000         | $40 \cdot 120 + 35 \cdot 280 = 14600$            |             | 2400    |
| Механізовані ресурси, маш.-дн.     | 15000         | $41,5 \cdot 120 + 30,2 \cdot 280 = 13933,2$      |             | 1564    |
| Мінімально допустима площа КЗП, га | 280           | 280                                              |             | 0       |

*за умовами задачі обсяги грошових, трудових і механізованих ресурсів, мінеральних добрив, вапна є в господарстві в надлишку, якщо їх балансувати з площами угідь, які трансформуються.*

