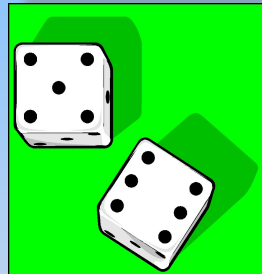


Лекція 2



ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР



Кафедра інформатики та комп'ютерних технологій
доцент Бесклінська О.П.

Зміст

- 1. Ігрові моделі прийняття рішення**
- 2. Термінологія і означення**
- 3. Класифікація ігор**
- 4. Обмеження і допущення, що застосовуються в теорії гри**
- 5. Прямокутні матричні ігри**

За умов ринкової економіки все частіше мають місце конфліктні ситуації, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить від дії супротивника.

Класичний приклад—це відношення *продавець—покупець* .



Математична теорія ігор привернула до себе пильну увагу лише після опублікування в 1944 році книги Неймана і Моргенштерна "Теорія ігор і економічна поведінка".



**Нейман Джон
(1903-1957)**



**Оскар
Моргентштерн
(1902-1977)**

2.Термінологія і означення

Теорія ігор являє собою математичну теорію конфліктних ситуацій.

Грою називається спрощена формалізована модель конфліктної ситуації.

Формалізована модель гри означає строгий перелік правил, що визначають, як можуть діяти учасники гри і який їх виграш в залежності від обраних дій.

Правилами гри в теорії ігор називається система умов, яка включає:

- 1) можливі варіанти дій сторін;**
- 2) об'єм інформації кожної сторони про поведінку іншої;**
- 3) послідовність чергування ходів, тобто окремих рішень, які приймаються в ході гри;**
- 4) результат гри, до якого приводить дана сукупність ходів.**

Сторони, які приймають участь в конфліктній ситуації, називаються гравцями, а результат зіткнення їх інтересів - виграшем.



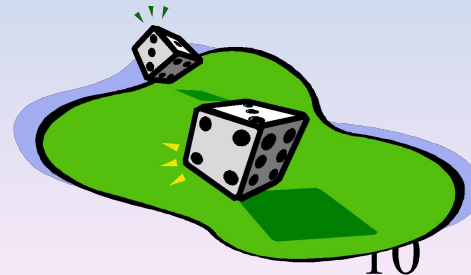
Ходом в теорії ігор називається вибір одного з передбачених правилами гри варіантів.

Ходи поділяються на **особисті** і **випадкові**.

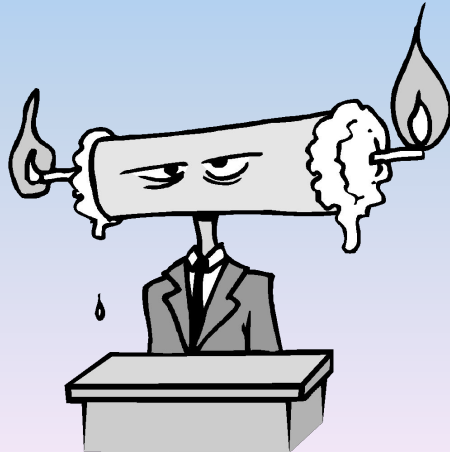
Особистим ходом називається свідомий вибір одним з гравців одного з можливих в даній ситуації ходів і його здійснення.



Випадковим ходом називається вибір із ряду можливостей, здійснюваний не рішенням гравця, а якимось механізмом вибору



Стратегією гравця називається сукупність **правил**, які однозначно визначають вибір при кожному особистому ході даного гравця в залежності від ситуації, яка склалася в процесі гри.



3.Класифікація ігор

- 1) за кількістю гравців;**
- 2) за результатом гри;**
- 3) за кількістю ходів;**
- 4) за кількістю інформації про характер ситуації, що склалася, і про наміри противника;**
- 5) за кількістю стратегій;**
- 6) за характером взаємовідносин;**
- 7) за видом функції виграшів.**

За кількістю гравців

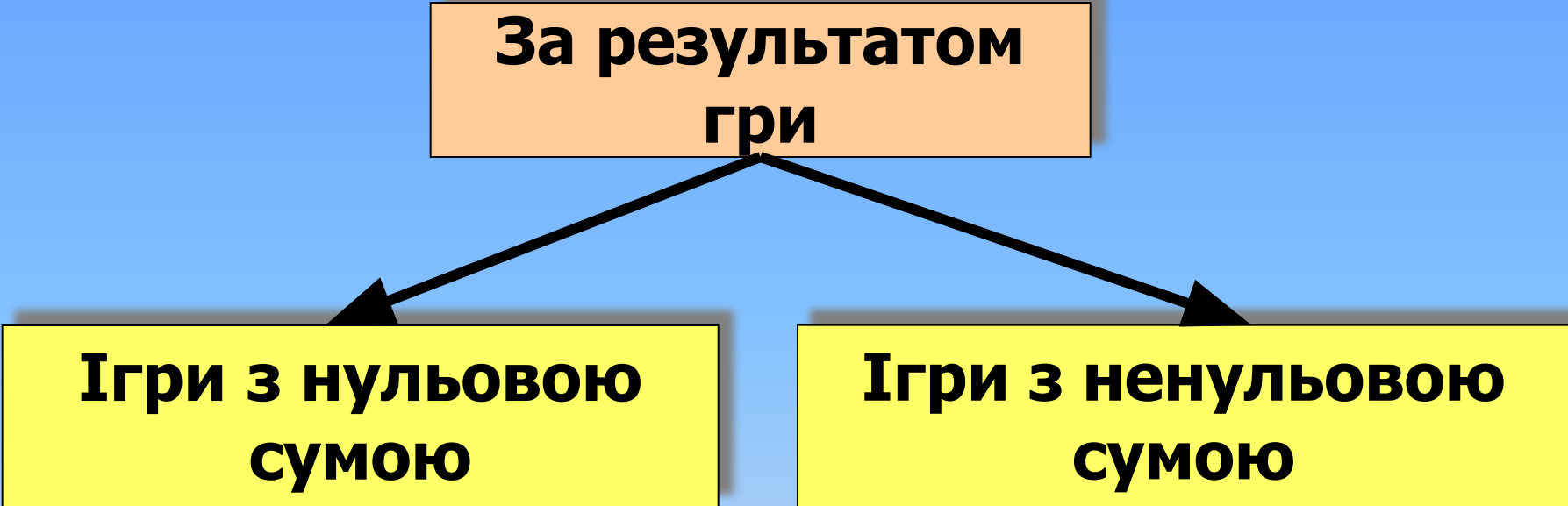
парні



множинні



**За результатом
гри**



```
graph TD; A[За результатом гри] --> B[Ігри з нульовою сумою]; A --> C[Ігри з ненульовою сумою];
```

**Ігри з нульовою
сумою**

**Ігри з ненульовою
сумою**

За кількістю інформації

**Ігри з повною
інформацією**

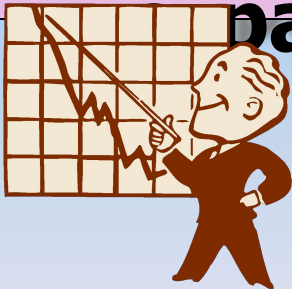


**Ігри з
неповною
інформацією**



За кількістю стратегій

Ігри з
скінченною
кількістю
стратегій



Ігри з
нескінченною
кількістю
стратегій



За характером взаємовідносин

Безкоаліційні



**Кооперативні,
коаліційні**



За виглядом функцій виграшів

Матричні

Біматричні

Неперервні

Опуклі

Сепарабельні

Типу дуелей

Матрична гра - це скінчена гра двох гравців з нульовою сумою, в якій задаються виграші першого гравця у вигляді матриці (рядки матриці відповідають номеру застосованої стратегії першого гравця, стовпці - номеру застосування стратегії другого гравця; на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграш першого гравця, якій відповідає застосованим стратегіям). Програш другого гравця дорівнює виграшу першого.

Біматрична гра—це скінчена гра двох гравців з ненульовою сумою, в якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця.

“Родинна суперечка”.

Д1-регбі; **Д2**-балет.

Якщо обрати **Д1**, то при однаковому виборі **Жінка** одержує **1**-корисності,

Чоловік-2 одиниці корисності.

Якщо обрати **Д2**, то при однаковому виборі **Жінка** одержує **2**-корисності,

Чоловік-1 одиницю корисності.

Якщо гравці обрали різні дії, то виграш кожного дорівнює **0**.

Жінка



Чоловік

	Д1	Д2		Д1	Д2
Д1	1	0	Д1	2	0
Д2	0	2	Д2	0	1

Неперервною вважається така гра, в якій функція виграшів кожного гравця є неперервною в залежності від стратегій.

Якщо функція виграшів є опуклою, то така гра називається ***опуклою***.

4. Обмеження і допущення, що застосовуються в теорії гри

До *допущень* відносяться наступні моменти:

1) кожний гравець знає можливості (виражені у відповідних стратегіях), які є у нього і його противника, і знає, як результат гри залежить від вибору цих можливостей, тобто він знає платіжну матрицю;

2) якщо в грі приймає участь випадковий механізм (тобто мають місце випадкові ходи), то кожному гравцю відомі різні можливості цих випадкових ходів і відповідні їм імовірності виходів;

3) кожний гравець для будь-якої пари ісходів або віддає перевагу одному виходу (коли, наприклад, один виграш більший, ніж інший), або байдужий до них;

4) кожний гравець знає подібну систему призначень свого противника у відношенні результатів гри.

Обмеження, які мають місце в теорії гри:

1) в теорії гри не враховуються елементи ризику, неминуче присутні в кожній реальній стратегії, а також можливі прорахунки і помилки, кожного з гравців (вважається, що обидва гравця грають ідеально);

2) виграш зводиться до одного-єдиного числа.

5. Прямокутні матричні ігри

Платіжна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Елемент цієї матриці a_{ij} — це виграш гравця А, якщо він вибрав стратегію A_i , а гравець В — стратегію B_j .

Оптимальною стратегією гравця називається така стратегія, яка при багатократному повторенні гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш (або, що теж саме, мінімально можливий середній програш).

**Кожна вибрана стратегія першого
або другого гравця називається
*чистою стратегією.***

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Стратегія гравця А називається *максимінною*, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається *нижньою ціною гри*.

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Стратегія гравця В називається *мінімаксною*, а величина його програшу—*верхньою ціною гри*

Якщо $\alpha = \beta = v$, то гра називається *цілком визначеною*.

В такому разі виграш гравця А (програш гравця В) називається *значенням гри*.

Цілком визначені ігри називаються *іграми з сідловою точкою*, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця А (програшу гравця В) – *сідловою точкою*.

Приклад. Фірма виготовляє устаткування для легкої промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: *A-1*, *A-2*, *A-3*. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: *M-1*, *M-2*, *M-3* залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в таблиці:

$$\alpha = \max_j \min_i a_{ij} = \max\{5; 7; 5\} = 7$$

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{10; 8; 7\} = 10$$

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min\{10; 7; 9\} = 7$$

$$a_{ij} = \max\{6; 7; 5\} = 7$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{7; 5; 8\} = 5$$

1-2

$$\max_{J=3} a_{ij} = \max\{5; 9; 8\} = 9$$

A-1	10	6	5	5
A-2	8	7	9	7
A-3	7	5	8	5
β_j	10	7	9	7

Стратегії, яким відповідають однакові значення платіжної матриці (тобто матриця містить однакові рядки (стовпці), називаються *дублюючими*. Якщо всі елементи i -го рядка (стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів j -го рядка (стовпця), то кажуть, що i -та стратегія гравця А (гравця В) є *домінуючою* над j -ою.

Гравець В

Гравець А

6	3	8	5	9
6	5	7	6	6
2	1	5	4	7
4	4	3	8	8

	B1	B2	B3	B4	α_i
A1	6	3	8	5	3
A2	6	5	7	6	5
A3	4	4	3	8	3
β_j	6	5	8	8	5

Завдання.

1. Спростити матрицю і знайти α і β :

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	2	4	7	5	8
A2	7	6	8	7	9
A3	5	3	4	1	5
A4	7	6	8	7	9

2. Навести приклад гри.