Графы. Основные понятия.

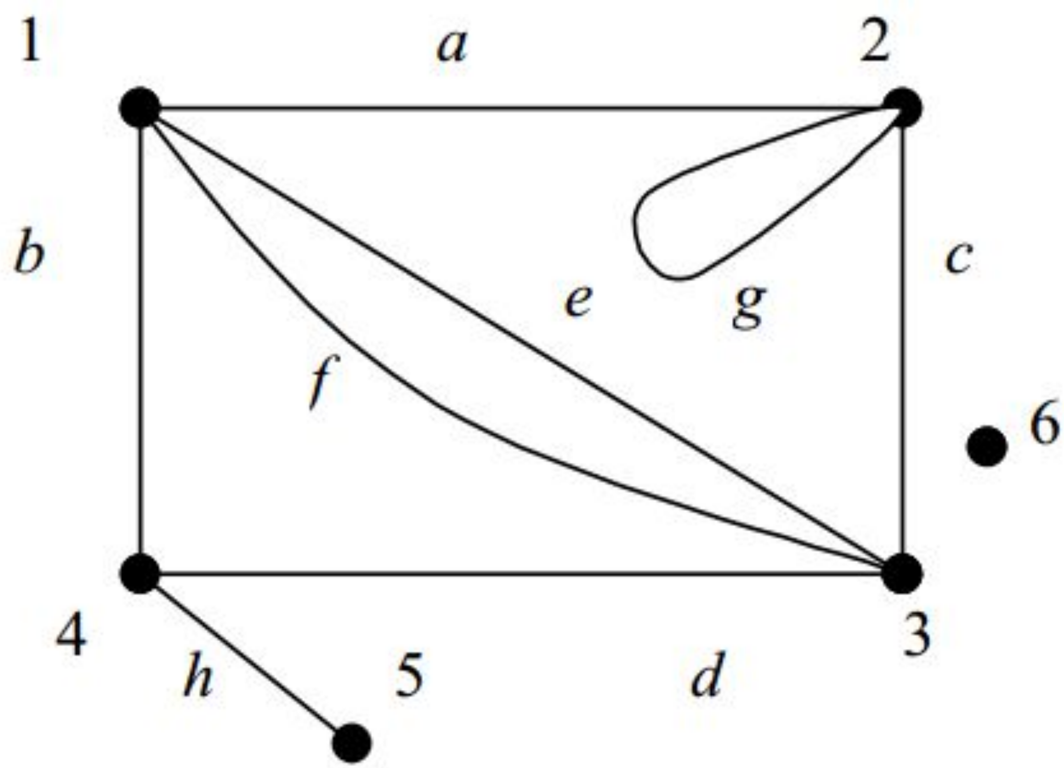
Понятие графа

- Линейность является характерной чертой большинства современных естественных и искусственных языков. Линейное представление информации(в виде последовательности символов) не является естественным с точки зрения человеческого восприятия. Использование нелинейных форм во многих случаях существенно облегчает понимание. В математике главным средством нелинейного представления информации служат чертежи.

- В разных задачах удобно использовать чертежи разных типов. Соответственно определенные вариации допускает и определение графа. Неотъемлемыми атрибутами графов (при всем разнообразии определений) являются вершины и соединяющие их ребра или дуги.

- Граф ***G= (V, E)*** состоит из конечного множества вершин (или узлов) ***V*** и конечного множества ребер ***E***. Каждое ребро связывает(соединяет) пару вершин. Если ребро ***a*** соединяет вершины ***x*** и ***y***, то говорят, что ребро ***a*** и вершины ***x***, ***y*** инцидентны.

- Например,



- Рис.1

- На рисунке 1 изображен граф с шестью вершинами, обозначенными цифрами 1,2,3,4, 5,6, и восемью ребрами, обозначенными буквами ***a, b, c, d, e, f, g, h***.

Ребро ***a*** связывает вершины 1 и 2;

ребра ***e*** и ***f*** связывают вершины 1 и 4;

ребро ***g*** связывает вершину 2 саму с собой;

вершина 1 инцидентна ребрам ***a, b, e, f;***

ребро с инцидентно вершинам 2 и 3.

- Два ребра, связывающие одну и ту же пару вершин (как ***e*** и ***f***), называют параллельными (или кратными); ребро, связывающее вершину саму с собой (как ***g***), называют петлей.

- Иногда в определении графа запрещают наличие параллельных ребер и/или петель, иногда нет. Мы не будем жестко фиксировать определение, оговаривая специально, если это оказывается существенным, какого типа граф рассматривается.

- Пусть $\boldsymbol{G = (V, E)}$ – некоторый граф. Граф $\boldsymbol{G' = (V', E')}$, вершины и ребра которого являются вершинами и ребрами графа $\boldsymbol{G}$, т.е. $\boldsymbol{V' \subset V, E' \subset E}$ называется подграфом графа $\boldsymbol{G}$.

- Степенью вершины графа называется число ребер графа, инцидентных этой вершине (петли считаются дважды). Степень вершины ***v*** обозначается $\boldsymbol{\delta(v)}$. Вершина степени 0 называется изолированной, вершина степени1 – висячей.

- Так, для графа из примера имеем: $\boldsymbol{\delta(1)= \delta(2)= \delta(3) = 4}$, $\boldsymbol{\delta(4) = 3}$, $\boldsymbol{\delta(5) = 1}$, $\boldsymbol{\delta(6) = 0}$;

Вершина 5 – висячая, вершина 6 – изолированная.

Несложно убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m,$$

где $\boldsymbol{m}$– число ребер графа $\boldsymbol{G= (V, E)}$. В самом деле, ребро, соединяющее вершины $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, вносит вклад по единице в слагаемые: $\boldsymbol{\delta(x)}$ и $\boldsymbol{\delta(y)}$ (при $\boldsymbol{x = y}$ ребро является петлей и в соответствии с определением вносит вклад 2 в одно слагаемое $\boldsymbol{\delta}$ $\boldsymbol{(x)}$).

- В некоторых случаях рассматриваются направленные ребра, которые называют дугами. Для дуги, соединяющей две вершины, указывают, из какой вершины она выходит (начало дуги), и в какую входит (конец дуги). На рисунке направление дуги указывают стрелкой.

- Если все ребра графа направлены, его называют ориентированным графом, или орграфом. В орграфе параллельными считаются дуги, соединяющие одинаковые вершины и имеющие одинаковое направление, то есть дуги, имеющие общее начало и общий конец.

- Когда говорят, что в ориентированном графе дуга ***a*** соединяет вершины ***x*** и ***y***, предполагают, что дуга ***a*** направлена от ***x*** к ***y***.

- На рис. 2 изображен орграф. Из вершины 1 выходят дуги ***a*** и ***b***, в нее входит дуга ***e***.

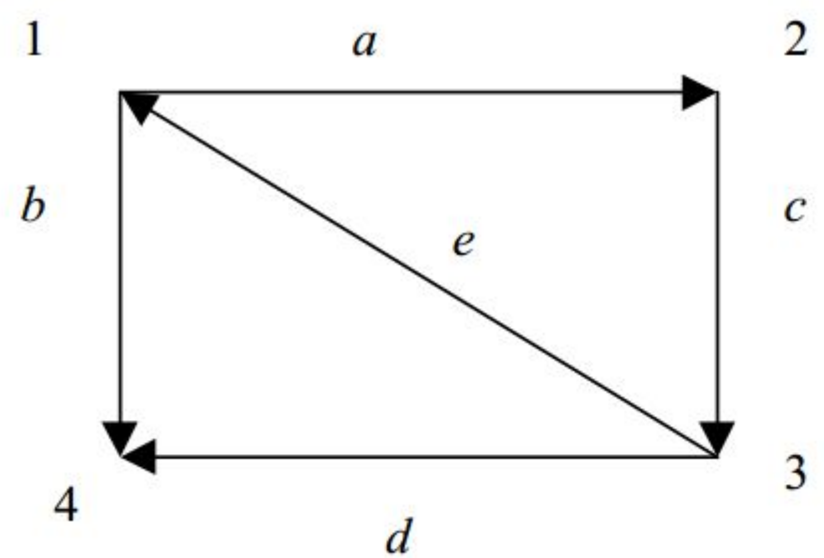


Рис. 2

- Полустепенью исхода вершины орграфа называется число дуг графа, начинающихся в этой вершине;
- полустепенью захода – число дуг графа, заканчивающихся в ней.

- Полустепени исхода и захода вершины ***v*** обозначаются соответственно через $\delta^{+}(v)$ и $\delta^{-}(v)$. Так, для графа на рис. 2 имеем $\delta^{+}(1) = 2, \delta^{-}(1) = 1.$

- Вершины и дуги графа могут быть дополнительно помечены. В этом случае говорят о нагруженном, или взвешенном, графе.
- Подграфом орграфа G называют любой орграф, вершины которого составляют часть множества вершин графа G, а дуги– часть множества его дуг.

Маршруты, цепи и циклы

- Последовательность вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ графа *G* представляет собой маршрут в этом графе от вершины v_0 к вершине v_k, если для любого *i* = *0, 1, 2, ..., k–1* вершины v_i и v_{i+1} соединены дугой.

В случае, когда допускаются параллельные дуги, нужно дополнительно указать, по какой дуге из v_i в v_{i+1} проходит маршрут. В этом случае маршрут от вершины v_0 к вершине v_k, задается последовательностью вида

$$v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, a_k, v_k,$$

где $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ – последовательность вершин, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - последовательность дуг, причем дуга a_i соединяет вершину v_{i-1} с вершиной v_i.

- На самом деле, поскольку концы дуг определены однозначно, маршрут можно представить последовательностью дуг $a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_k$.
- *Длиной маршрута* считается число дуг, которые он содержит. Все вершины маршрута, кроме начальной и конечной, называют внутренними или промежуточными.

- Вообще говоря, и начальная, и конечная вершины могут встретиться на маршруте как промежуточные вершины. Для любой вершины имеется маршрут из этой вершины в нее же, не содержащий ни одной дуги (длины0).

- Маршрут называется *цепью*, если каждая дуга встречается в нем не более одного раза, и *простой цепью*, если любая вершина графа инцидентна не более, чем двум дугам маршрута.
- *Путем* называют маршрут, в котором все вершины различны.
- Часто термин «путь» используют как синоним «маршрута».

- Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, его называют *замкнутым*. Замкнутый маршрут называется *циклом*, если он является цепью; если эта цепь к тому же простая, то и цикл называется простым. Таким образом, цикл– это замкнутый маршрут, у которого все вершины различны, кроме первой и последней.

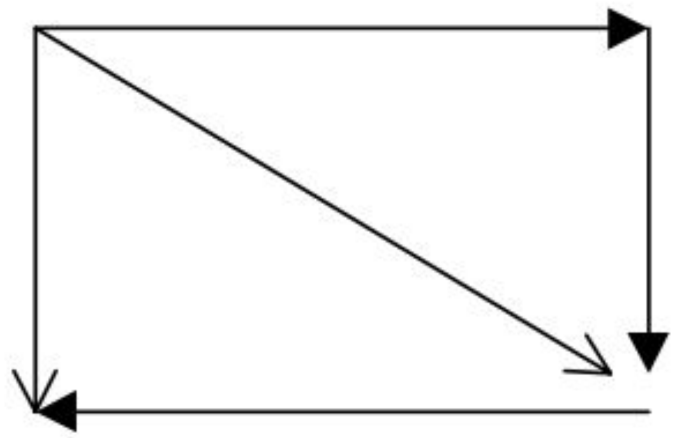
- Например, в графе на рис.2 маршрут ***1a2c3e1***, или, короче, ***ace***, является простым циклом. Поскольку параллельных дуг на графе нет, этот цикл можно указать и по вершинам: 1231. Ясно, что маршруты 2312 и 3123 представляют тот же цикл. Граф, не содержащий циклов, называется ациклическим.

- Граф, не содержащий циклов, называется *ациклическим*.
- Будем говорить, что вершина у достижима из вершины х, если в графе ***G*** имеется путь из ***x*** в ***y***.

- Пусть $\boldsymbol{G}$– произвольный орграф. Пополним его новыми дугами. Новая дуга из вершины $\boldsymbol{x}$ в вершину $\boldsymbol{y}$ проводится в том случае, если $\boldsymbol{y}$ достижима из $\boldsymbol{x}$, а граф $\boldsymbol{G}$ не содержит дуги из $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{y}$. Обозначим пополненный граф через $\widehat{\boldsymbol{G}}$.

- Пусть $\boldsymbol{G}$– произвольный орграф. Пополним его новыми дугами. Новая дуга из вершины $\boldsymbol{x}$ в вершину $\boldsymbol{y}$ проводится в том случае, если $\boldsymbol{y}$ достижима из $\boldsymbol{x}$, а граф $\boldsymbol{G}$ не содержит дуги из $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{y}$. Обозначим пополненный граф через $\widehat{\boldsymbol{G}}$.

- На рис. 3 представлен ациклический граф; «жирными» наконечниками отмечены дуги, входящие в базисный граф.

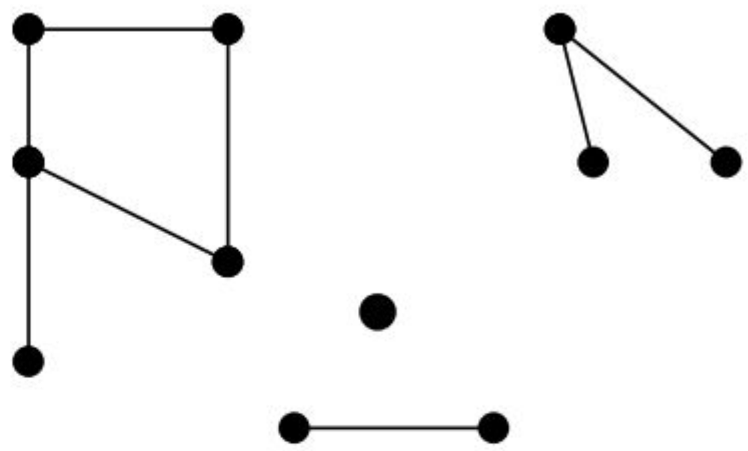


- Рис.3

- На множестве вершин неориентированного графа ***G*** отношение достижимости является отношением эквивалентности.
- Класс эквивалентности составляют все вершины, которые могут быть связаны друг с другом некоторым путем. Эти классы эквивалентности называются компонентами связности.

- Неориентированный граф G называется связным, если в нем любые две вершины можно соединить путем. Связный граф имеет всего одну компоненту связности.

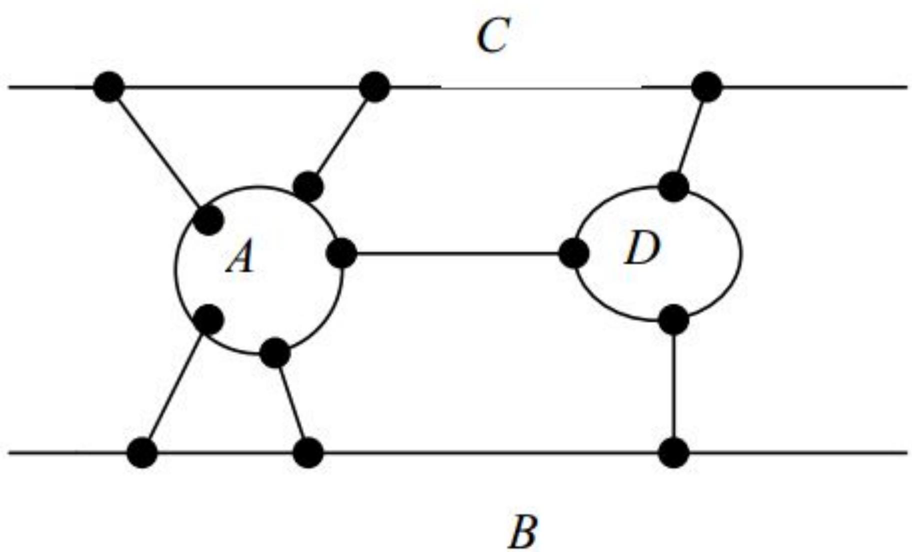
- На рис. 4 изображен граф с четырьмя компонентами связности.



- Рис.4

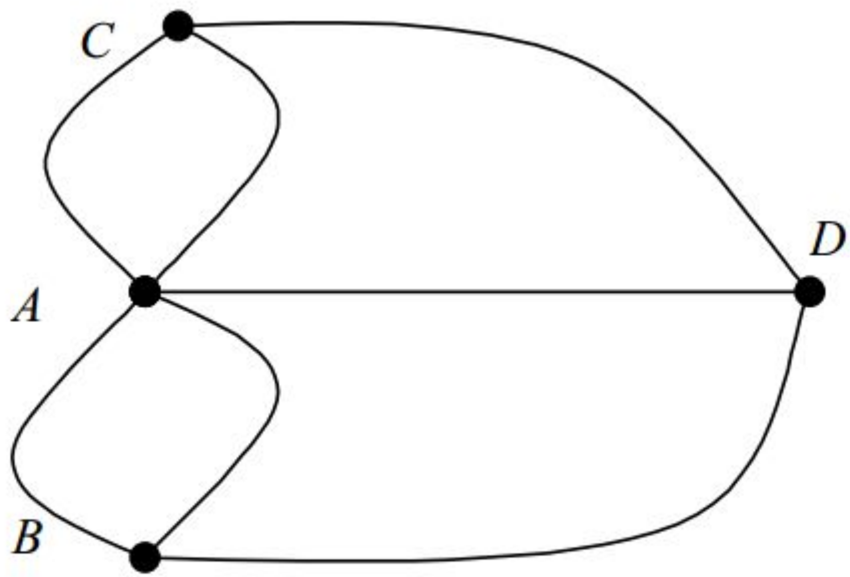
Эйлеровы цепи и циклы

- На рис. 5 приведена схема мостов в г. Кенигсберге времен Эйлера.



- Рис.5

- Построим граф задачи, в котором каждой части города соответствует вершина, а каждому мосту– ребро (рис. 6).



- Рис.6

- Решение задачи о кенигсбергских мостах сводится теперь к поиску цикла на построенном графе, в который все ребра графа входят по одному разу. В общем случае цикл, обладающий таким свойством, называется эйлеровым. Аналогично цепь называется эйлеровой, если она проходит по одному разу через каждое ребро.

Рассмотрим последовательность «выходов» – «заходов» для вершины из этого цикла.

Чтобы у графа имелся эйлеров цикл, степени всех вершин должны быть четными. Так как вершина должна быть инцидентна четному числу ребер, по которым только и можно «зайти» и «выйти».

- Таким образом, если на графе имеется эйлеров цикл, степени всех вершин должны быть четными. Граф на рис. 6 этим свойством не обладает, а значит, составить соответствующий маршрут невозможно.

- Следовательно, имеет место следующая

- **Теорема.** Связный граф обладает эйлеровым циклом тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Матрицы смежности и инцидентности

Любой ориентированный граф с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и дугами $a_1, a_2, \ldots, a_m$ можно задать его матрицей инцидентности

$$B=(b_{ij}),\ i = 1,2,\ldots, n,\ j = 1,2,\ldots, m,$$

размера $n \times m$, в которой $b_{ij} = 1$, если дуга a_j исходит из вершины v_i; $b_{ij} = -1$, если дуга a_j заходит в вершину v_i; $b_{ij} = 0$, если дуга a_j не инцидентна вершине v_i.

Для неориентированного графа матрица инцидентности выглядит следующим образом:

$b_{ij} = 1,$ если дуга a_j инцидентна вершине v_i,

и $b_{ij} = 0,$ если дуга a_j не инцидентна вершине v_i.

Например, граф на рис. 2 можно задать следующей матрицей инцидентности (дуги упорядочены в алфавитном порядке):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Графы без параллельных дуг удобно представлять при помощи матриц смежности. Для графа с ***n*** вершинами матрица смежности– это квадратная матрица $A=(a_{ij})$ порядка ***n***, состоящая из нулей и единиц.
- Элемент a_{ij} равен 1, если имеется дуга, соединяющая вершины *i* и *j*, и равен 0 в противном случае.

Если в графе имеются параллельные дуги, то можно полагать, что значение элемента a_{ij} матрицы смежности равны числу дуг, соединяющих вершины i и j.

Матрица смежности неориентированного графа симметрична. Например, матрицей смежности графа, представленного на рис. 7, служит матрица A.

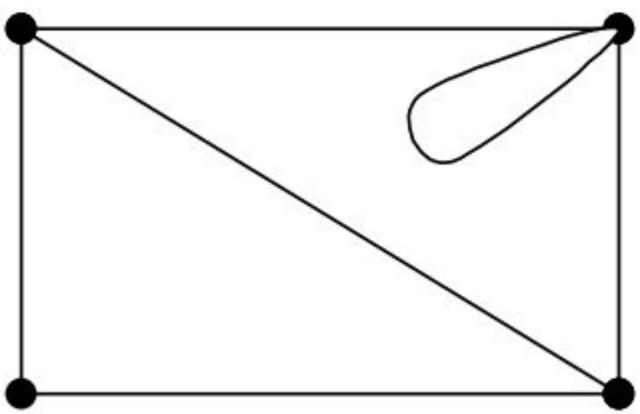


Рис.7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В матрице A вершины занумерованы, начиная с левой верхней, по часовой стрелке. Если изменить порядок нумерации вершин, то изменится и матрица смежности. Например, нумеруя вершины того же графа по часовой стрелке, начав с правой верхней вершины, мы получим матрицу смежности

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

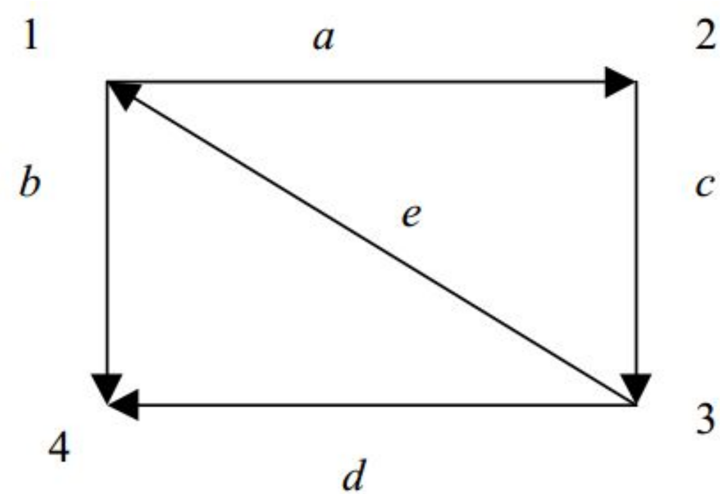
Обе матрицы представляют один и тот же граф и получаются одна из другой перестановкой строк и столбцов.

Вообще, любая перестановка, применяемая одновременно и к строкам и к столбцам матрицы смежности некоторого графа, приводит снова к матрице смежности того же графа.

В случае, когда вершины графа упорядочены, матрица смежности определена однозначно.

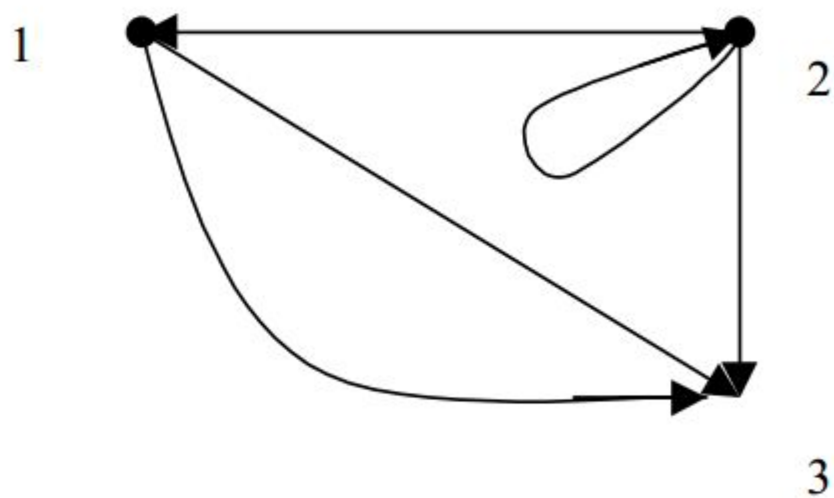
- Матрица смежности ориентированного графа, вообще говоря, несимметрична. Например, следующая матрица является матрицей смежности ориентированного графа

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Теорема. *Пусть G – ориентированный граф с вершинами 1, 2, ..., n, и $A = (a_{ij})$ – его матрица смежности. Тогда элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k равен числу путей длины k из вершины i в вершину j.*

- **Пример.** Рассмотрим граф на рис. 8. Пути длины 1 представлены дугами. Все пути длины 2 и более выходят из вершины 2. Путь длины k из вершины 2 в вершину 2 представляет собой петлю, повторенную k раз. Остальные пути получаются как комбинации путей длины 1 и 2 с соответствующим числом повторений петли.



- Рис.8

- Матрица смежности графа:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- дает число путей длины1. Ее квадрат:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– число путей длины 2. Легко видеть, что $A^k = A^2$ при $k \geq 2$.

Пусть $\boldsymbol{G}$– ориентированный граф и $\boldsymbol{A}$– его матрица смежности. Рассмотрим последовательность матриц

$$A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{n-1}.$$

Зафиксируем пару вершин i и j. Если существует какой-нибудь путь из i в j, то существует и путь длины меньше n.

В самом деле, если длина пути превосходит $n-1$, то такой путь проходит через более чем n вершин, и, значит, на таком пути хотя бы одна вершина, скажем, v, встретится более одного раза.

Отбросив часть пути, ведущую из вершины v в нее саму, получаем более короткий путь из i в j. Повторив подобную операцию несколько раз, можно получить путь из i в j, длина которого не превосходит $n-1$.

Таким образом, если из i в j имеется некоторый путь, то в одной из матриц последовательности

$$A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{n-1}.$$

на месте *(i,j)* встретится элемент, отличный от нуля.

Если в матрице A^k на месте *(i,j)* находится элемент, отличный от нуля, а во всех предшествующих матрицах на месте *(i,j)* стоят нули, то k– это длина кратчайшего пути из i в j.

Бинарные отношения и графы

Бинарное отношение R на конечном множестве V может быть представлено ориентированным графом $G(R)$, называемым графом отношения R.

Вершинами графа служат элементы множества V; вершины x и y соединены направленной дугой с началом x и концом y, если $(x,y) \in R$.

Обратно, всякий ориентированный граф без параллельных дуг G задает бинарное отношение $R(G)$ на множестве своих вершин, чьим графом он и является: вершины x и y связаны отношением $R(G)$, если они соединены направленной дугой с началом x и концом y.

Если R – бинарное отношение на конечном множестве $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, а G – граф с вершинами $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, то матрица смежности графа G совпадает с характеристической матрицей отношения R в том и только том случае, когда $G = G(R)$ или, что равносильно, $R = R(G)$.

Рассмотрим, как связаны свойства отношения R и соответствующего ему графа $G=G(R)$.

Отношение R симметрично, если для любых $x, y \in V$ из xRy следует yRx. Иными словами, если на ориентированном графе G имеется дуга из x в y, то имеется также и дуга из y в x. В этом случае матрица смежности графа G симметрична.

По существу, граф G оказывается неориентированным. Можно считать, что симметричным отношениям отвечают неориентированные графы.

Антисимметричность отношения R означает, что xRy и yRx влечет $x = y$ и равносильна тому, что две различные вершины графа G могут быть связаны дугой лишь в одном направлении.

Если отношение R асимметрично, то есть xRy влечет $\neg yRx$, то, кроме того, граф G не должен иметь петель.

Если R– рефлексивное отношение, то есть xRx для любого $x \in V$, то граф G имеет петлю в каждой вершине, а диагональ матрицы смежности состоит из одних единиц.

Соответственно отношение R антирефлексивно тогда и только тогда, когда граф G не имеет петель.

Отношение R транзитивно, если из xRy и yRz следует xRz.

Для графа G это означает, что если G содержит дуги из x в y и из y в z, то он содержит и дугу из x в z. Более того, если существует путь из вершины x в вершину y, то имеется и дуга из x в y.

- Пусть $\boldsymbol{G}$– произвольный орграф. Пополним его новыми дугами. Новая дуга из вершины $\boldsymbol{x}$ в вершину $\boldsymbol{y}$ проводится в том случае, если $\boldsymbol{y}$ достижима из $\boldsymbol{x}$, а граф $\boldsymbol{G}$ не содержит дуги из $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{y}$. Обозначим пополненный граф через $\widehat{\boldsymbol{G}}$.

- Пусть $\boldsymbol{G}$– произвольный орграф. Пополним его новыми дугами. Новая дуга из вершины $\boldsymbol{x}$ в вершину $\boldsymbol{y}$ проводится в том случае, если $\boldsymbol{y}$ достижима из $\boldsymbol{x}$, а граф $\boldsymbol{G}$ не содержит дуги из $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{y}$. Обозн $E \vee A \vee A^{[k]} \vee \ldots \vee A^{[n-1]}$, раф через $\widehat{\boldsymbol{G}}$.

Отношение R называется ацикличным, если граф $G(R)$ не содержит нетривиальных циклов. Если вершины x и y на графе ацикличного отношения R соединены некоторым путем, то в этом графе нет дуги из y в x.