

Логарифмические неравенства

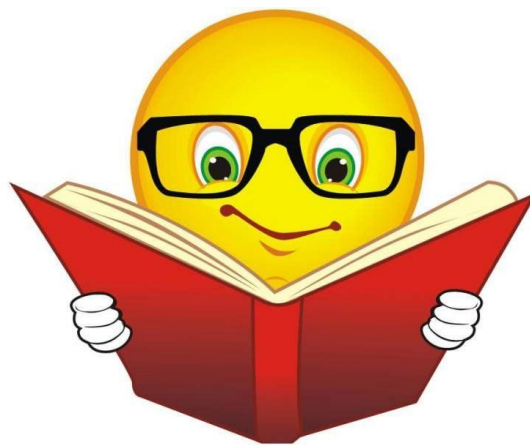
$$\log_{\frac{1}{3}} x \geq -2$$



**Определение: Логарифмическими
неравенствами называются
неравенства вида**

$$\log_a f(x) > \log_a g(x),$$

$$f(x) > 0; g(x) > 0; a > 0; a \neq 1$$



Алгоритм решения

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$1) \text{Если } a > 1, \text{ то } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$2) \text{Если } 0 < a < 1, \text{ то } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$



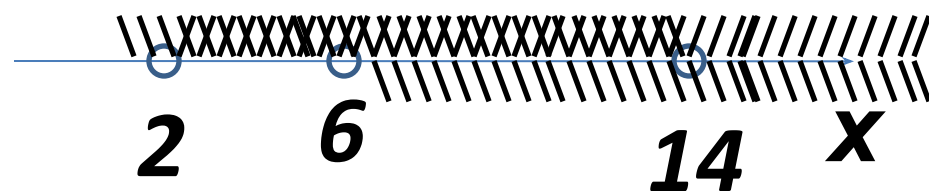
Решите неравенство:

$$1) \log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

так как $3 > 1$, то $y = \log_3 t$ – возрастает

на $D(y) = (0; +\infty)$

$$\begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 14-x > 0 \\ 2x-4 > 14-x \end{cases} \begin{cases} x > 2 \\ x < 14 \\ x > 6 \end{cases}$$



$$x \in (6; 14)$$



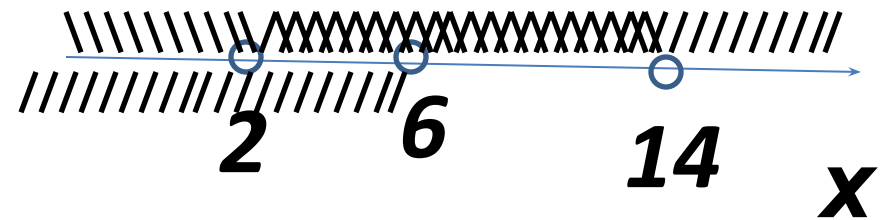
Ответ : $(6; 14)$

$$2) \log_{\frac{1}{3}}(2x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(14-x)$$

так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ — убывает

на $D(y) = (0; +\infty)$

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 14 - x > 0 \\ 2x - 4 < 14 - x \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x < 14 \\ x < 6 \end{cases}$$



$$x \in (2; 6)$$

Ответ : $(2; 6)$



$$3) \log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$$

так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ — убывает

на $D(y) = (0; +\infty)$

$$\begin{cases} 5-2x > 0 \\ 5-2x < 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2,5 \\ x > -2 \end{cases}$$



$$x \in (-2; 2,5)$$

Ответ : $(-2; 2,5)$



$$4) \log_{\frac{1}{2}} (16 + 4x - x^2) \leq -4$$

$$-4 = \log_{\frac{1}{2}} 16$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

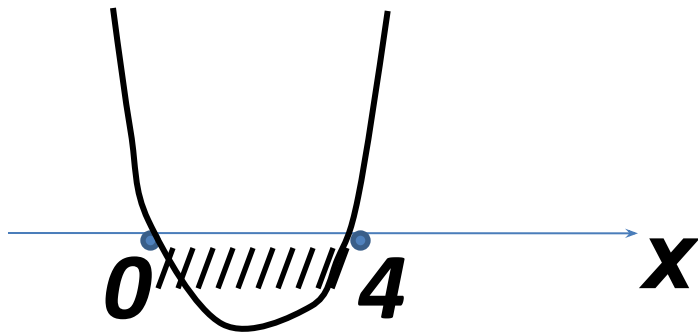
так как $0 < \frac{1}{2} < 1$, то $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ — убывает на $D(y) = (0; +\infty)$



$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0 \\ 16 + 4x - x^2 \geq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 \geq 16 \\ x^2 - 4x \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $z = x^2 - 4x$ квадратичная, график параболы, ветви вверх



Ее нули $x = 0; 4$

$$x \in [0; 4]$$

Ответ : $[0; 4]$

$$5) \lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

$$\lg x(45 - x) < \lg 100 \cdot 2$$

*так как $10 > 1$, то $y = \lg t$ – возрастает
на $D(y) = (0; +\infty)$*

$$\begin{cases} x > 0 \\ 45 - x > 0 \\ x(45 - x) < 200 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } 45 - x &> 0 \\ x &< 45 \end{aligned}$$

$$\text{б) } -x^2 + 45x - 200 < 0$$

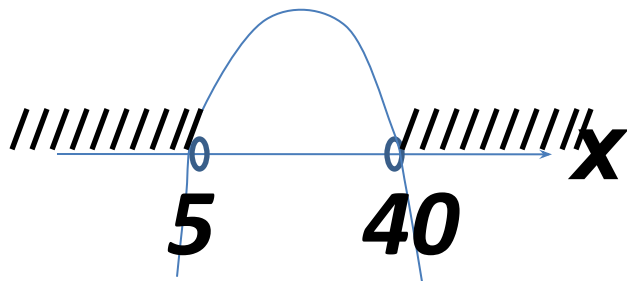
Рассмотрим

*функцию $z = -x^2 + 45x - 200$ – квадратичная,
график параболы, ветви направлены вниз*

$$\text{Ее нули : } -x^2 + 45x - 200 = 0$$

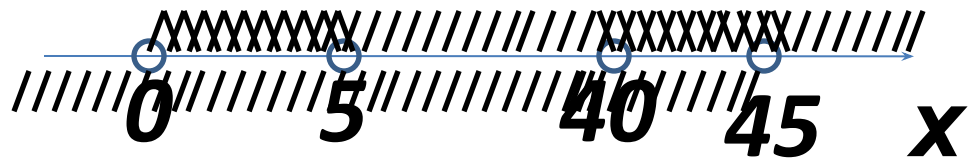
$$x_1 = 40; x_2 = 5$$

$$x \in (0; 5) \cup (40; +\infty)$$



в)

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 45 \\ x \in (0; 5) \cup (40; +\infty) \end{cases}$$



$$x \in (0; 5) \cup (40; 45)$$

Ответ : $(0; 5) \cup (40; 45)$

$$6) \log_2^2 x^2 - 5 \log_2 x + 1 \leq 0$$

$$4 \log_2^2 |x| - 5 \log_2 x + 1 \leq 0$$

так как ОДЗ : $x > 0$, то

$$4 \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 1 \leq 0 \quad \text{Пусть } \log_2 x = t$$

$$4t^2 - 5t + 1 \leq 0$$

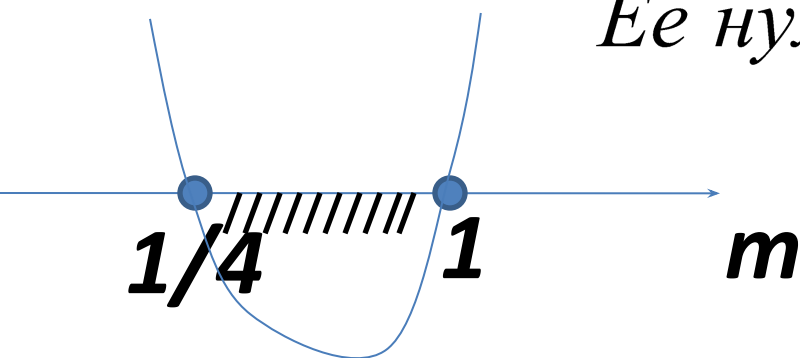
Рассмотрим функцию $y = 4t^2 - 5t + 1$

график параболы, ветви вверх

Ее нули : $4t^2 - 5t + 1 = 0$

$$t_1 = 1; t_2 = \frac{1}{4}$$

$$t \in \left[\frac{1}{4}; 1 \right]$$



$$m \in \left[\frac{1}{4}; 1 \right]$$

$$\frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq 1$$

$$\log_2 \sqrt[4]{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$$

так как $2 > 1$, то $y = \log_2 m$ – возрастает

на $D(y) = (0; +\infty)$

$$\sqrt[4]{2} \leq x \leq 2 \quad \text{и} \quad x > 0$$



$$x \in \left[\sqrt[4]{2}; 2 \right]$$

Ответ: $\left[\sqrt[4]{2}; 2 \right]$

$$7) \log_{2-3x} 5 > 0$$

$$\log_{2-3x} 5 > \log_{2-3x} 1$$

так как $5 > 1$ и

$$\log_{2-3x} 5 > \log_{2-3x} 1, \text{ то}$$

$$2 - 3x > 1$$

$$-3x > -1$$

$$x < \frac{1}{3}$$



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{1}{3} \right)$$

$$8) \log_{2x+3} x^2 < 1 \quad \text{Нам не известно основание}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 0 < 2x + 3 < 1 \\ \log_{2x+3} x^2 < 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3 > 1 \\ \log_{2x+3} x^2 < 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad 1) \left\{ \begin{array}{l} 0 < 2x + 3 < 1 \\ \log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3} (2x + 3) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < 2x + 3 < 1 \\ x^2 > 0 \\ x^2 > 2x + 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} a) 0 < 2x + 3 < 1 \\ -1,5 < x < -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} б) x^2 > 0, \\ x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \end{array}$$

$$в) x^2 > 2x + 3$$

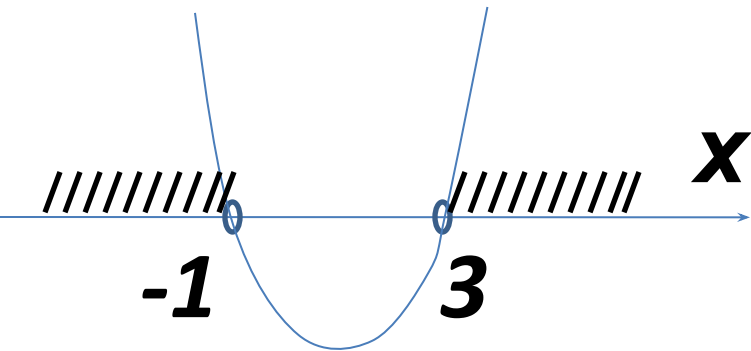
$$в) x^2 > 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \quad \text{Рассмотрим функцию } y = x^2 - 2x - 3$$

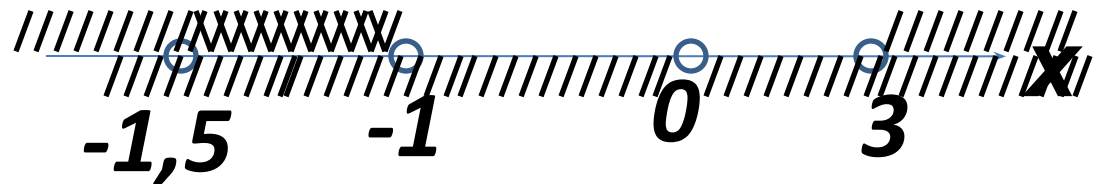
–квадратичная, график парабола, ветви вверх

Ее нули $x = -1; 3$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$$



г) найдем решение системы



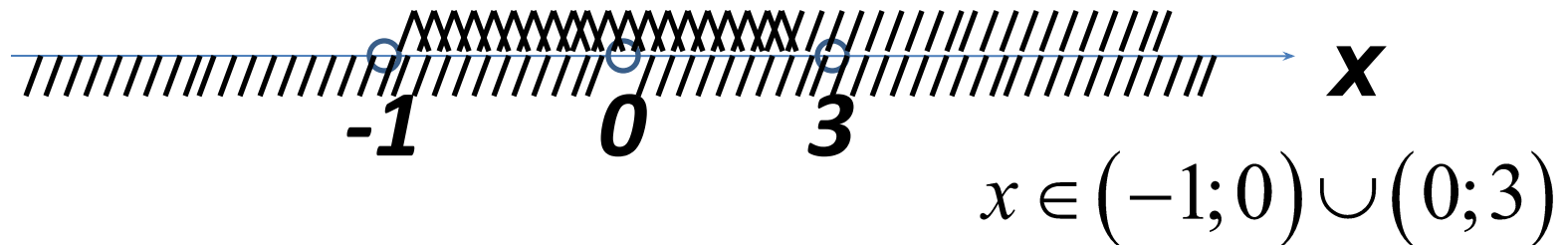
$$x \in (-1,5; -1)$$

$$2) \begin{cases} 2x + 3 > 1 \\ \log_{2x+3} x^2 < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3 > 1 \\ \log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3} (2x + 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3 > 1 \\ x^2 > 0 \\ x^2 < 2x + 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a) 2x + 3 > 1 \\ \quad x > -1 \\ б) x^2 > 0, \\ \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \end{array}$$

$$в) x^2 < 2x + 3 \quad x^2 - 2x - 3 < 0 \quad x \in (-1; 3)$$

г) найдем решение системы



3) Найдем объединение решений 1) и 2)

$$x \in (-1; 0) \cup (0; 3) \text{ и } x \in (-1,5; -1)$$

$$\text{Ответ : } (-1,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$$



$$9)(x-3)\lg(x+1) > 0$$

Решим неравенство методом интервала

Рассмотрим функцию $y = (x-3)\lg(x+1)$

–непрерывная на $D(y) = (-1; +\infty)$ функция

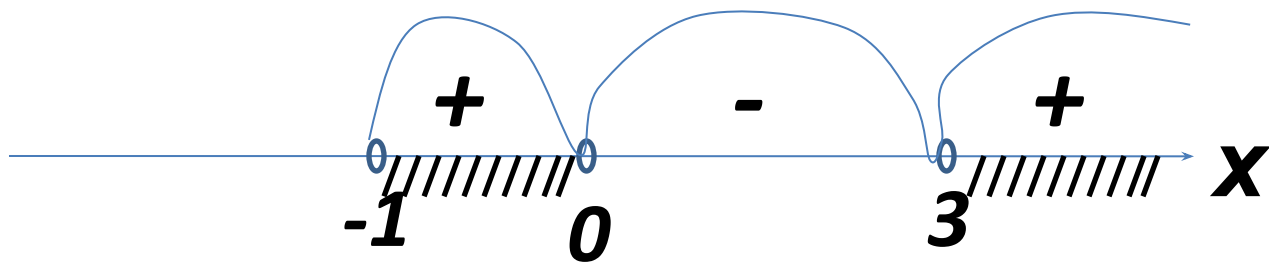
Ее нули : $(x-3)\lg(x+1) = 0$

$$x-3=0 \quad \lg(x+1)=0$$

$$x=3 \quad x+1=1$$

$$x=0$$

Данные точки разбивают область определения на промежутки в каждом из которых функция определена и непрерывна и не обращается в нуль, а значит сохраняет свой знак согласно свойству непрерывности функции.



$$y(-0,5) > 0$$

$$y(1) < 0$$

$$y(9) > 0$$

$$x \in (-1; 0) \cup (3; +\infty)$$

$$\text{Ответ} : (-1; 0) \cup (3; +\infty)$$

