

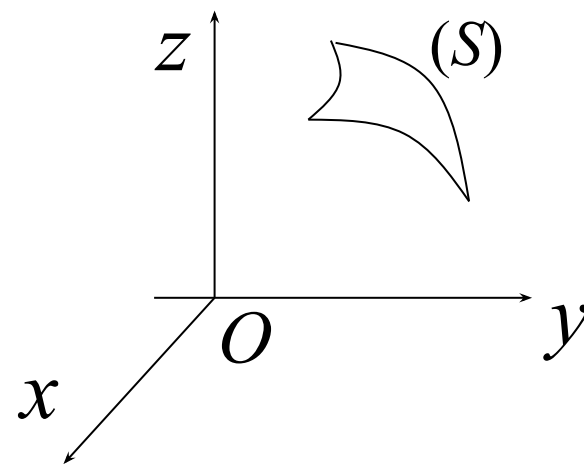
Лекция 2. Плоскость как поверхность первого порядка. Уравнения плоскости и их исследование. Прямая в пространстве, взаимное расположение прямых в пространстве, плоскости и прямой в пространстве. Прямая на плоскости, уравнения прямой на плоскости, расстояние от точки до прямой на плоскости. Кривые второго порядка; вывод канонических уравнений, исследование уравнений и построение кривых. Поверхности II порядка, исследование канонических уравнений поверхностей. Метод сечений.

Элементы аналитической геометрии

§ 1. Плоскость.

Имеем $OXYZ$ и некоторую поверхность S

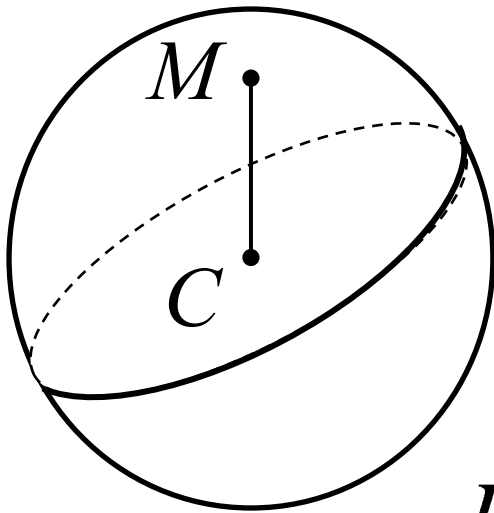
$$F(x,y,z) = 0$$



Определение 1: уравнение с тремя переменными называется **уравнением поверхности S в пространстве**, если этому уравнению удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки не лежащей на ней.

Пример.

Уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ ($R > 0$)
определяем сферу с центром в точке $C(a, b, c)$ и
радиусом R .



$M(x, y, z)$ – переменная
точка $M \in (S) \Leftrightarrow |CM| = R$

$$R = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Определение 2: Поверхность S называется поверхностью n -того порядка, если в некоторой декартовой системе координат она задается алгебраическим уравнением n -той степени

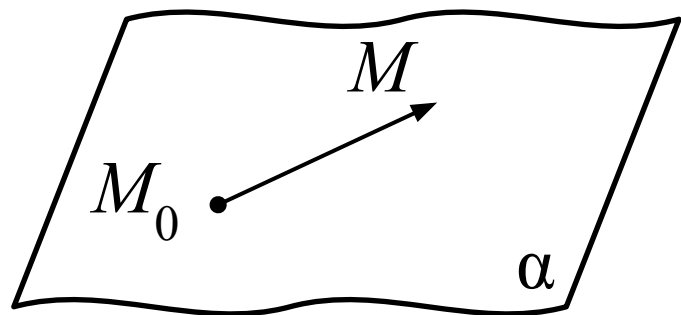
$$F(x,y,z) = 0 \quad (1)$$

В примере (S) - окружность, поверхность второго порядка.

Если S - поверхность n -того порядка, то $F(x,y,z)$ - многочлен n -той степени относительно (x,y,z)

Рассмотрим единственную поверхность 1-го порядка – **плоскость**.

Составим уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с вектором нормали $\vec{n} = (A, B, C)$



Пусть $M(x,y,z)$ - это произвольная (текущая) точка плоскости.

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}, \text{ где } \vec{n}.$$

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}) = 0$$

или в координатной форме:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) - уравнение плоскости проходящей через точку M с данным вектором нормали $\mathbf{n}$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_D = 0$$

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \quad (*)$$

$Ax + By + Cz + D = 0$ (3) - полное уравнение
плоскости

Неполное уравнение плоскости.

Если в уравнении (3) несколько коэффициентов (но не A, B, C одновременно) $= 0$, то уравнение называется неполным и плоскость α имеет особенности в расположении.

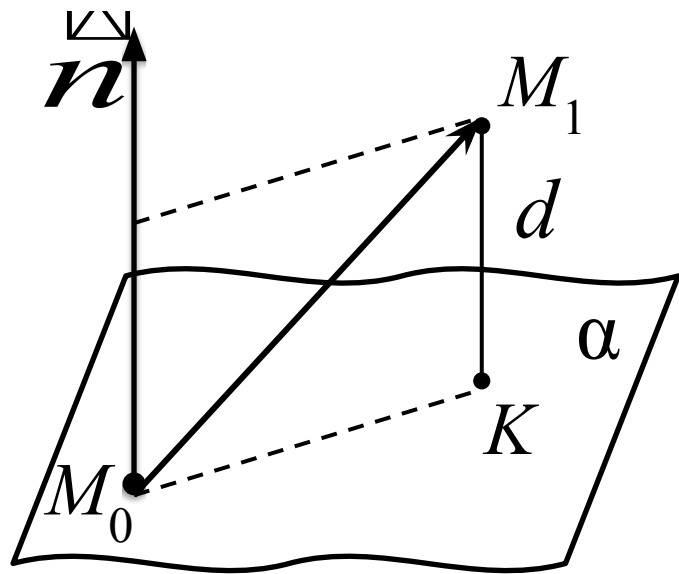
Например если $D = 0$, то α проходит через начало координат.

Расстояние от точки M_1 до плоскости α

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \end{array} \right)$$



$$\text{èç (3)} \Rightarrow \vec{n} = (A, B, C)$$

приложим $\vec{n}$ к точке M_0

$$d = \left| \text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1} \right|$$

$$\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}}{|\vec{n}|}$$

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} &= A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = \\ &= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\end{aligned}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ - расстояние от точки } M_1 \text{ до плоскости } \alpha$$

Уравнение плоскости «в отрезках»

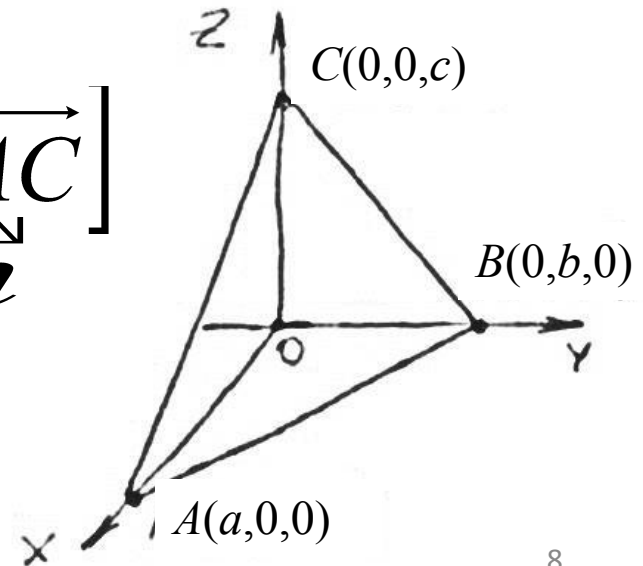
Составим уравнение плоскости отсекающей на координатных осях ненулевые отрезки с

величинами $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ($\underline{a} \geq 0, \underline{b} \geq 0, \underline{c} \geq 0$)

В качестве ~~н~~возьмем $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right]$

Составим уравнение для т. A с ~~н~~

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$



$$[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = \vec{i}bc + \vec{j}ac + \vec{k}ab$$

$$\vec{n} = (bc, ac, ab)$$

$$bc(x - a) + ac(y - 0) + ab(z - 0) = 0 \text{ -уравнение}$$

$$bcx + acy + abz = abc$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

-уравнение
плоскости α
"в отрезках"

плоскости,
проходящей
через точку A ,
перпенди-
кулярно
вектору
нормали $\vec{n}$

§2. Общее уравнение прямой.

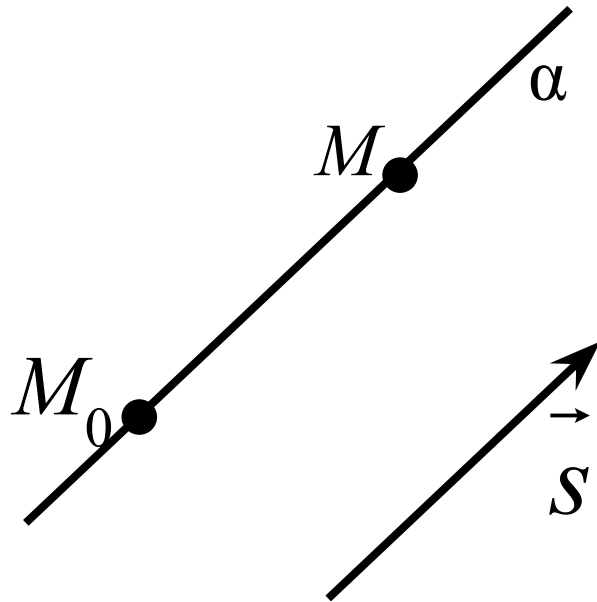
Прямую в пространстве можно задать пересечением 2-х плоскостей.

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = h$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \text{ уравнение} \\ \text{прямой} \end{array}$$

Система вида (1) определяет прямую в пространстве, если коэффициенты A_1, B_1, C_1 одновременно непропорциональны A_2, B_2, C_2 .

Параметрические и канонические уравнения прямой



$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{s} = (m, n, p)$$

$M(x, y, z)$ - произвольная точка прямой

$$\text{точка } M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\exists t \in R \quad \overrightarrow{M_0M} = \vec{s}t \quad (2)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\vec{s}t = (mt, nt, pt)$$

Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} (3),$$

$$t \in]-\infty; +\infty[\quad t - \text{параметр}$$

Исключив t получим:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (4) - \text{каноническое уравнение}$$

Система (3) определяет движение материальной точки, прямолинейное и равномерное из начального положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ со скоростью

$$V = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

в направлении вектора $\vec{S}$.

Расстояние от точки до прямой

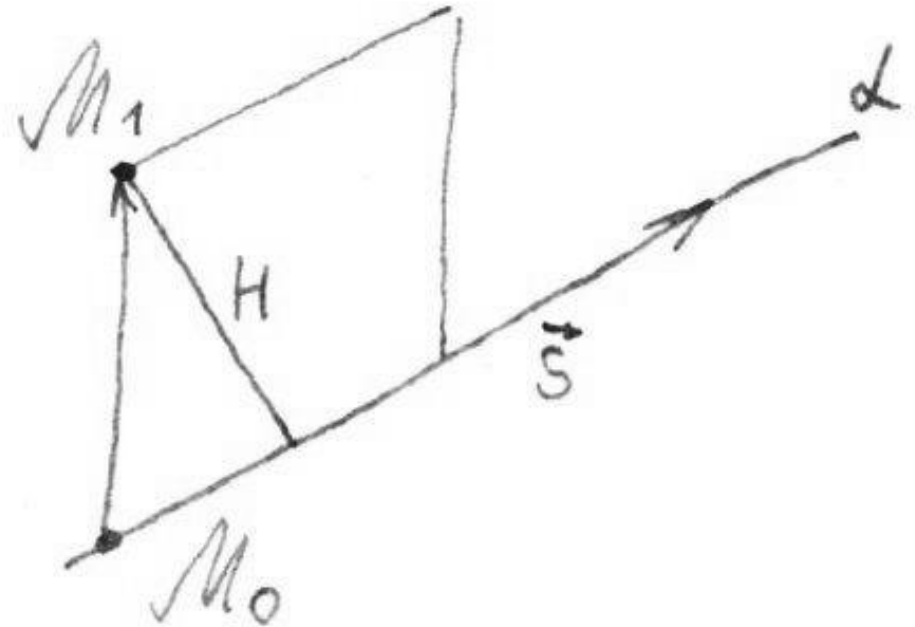
$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

α

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{s} = (m, n, p)$$

$$H = \frac{|\vec{s}_{\perp}|}{|\vec{s}|} = \frac{\left| \overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{s} \right|}{|\vec{s}|}$$



-расстояние от точки M_1
до прямой α

Угол между прямыми в пространстве.

Условия параллельности и перпендикулярности.

Пусть в пространстве две прямые L_1 , L_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

Тогда задача определения угла между этими прямыми сводится к определению угла ϕ между

их направляющими векторами:

$$\bar{q}_1 = (l_1; m_1; n_1), \bar{q}_2 = (l_2; m_2; n_2)$$

Пользуясь определением скалярного

произведения $\bar{q}_1 \bar{q}_2 = |\bar{q}_1| |\bar{q}_2| \cos \varphi$ и
выражением в координатах указанного
скалярного произведения и длин векторов q_1 и
 q_2 , получим для нахождения φ :

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| |\bar{q}_2|}$$

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 соответствует коллинеарности $\square q_1$ и $\square q_2$, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

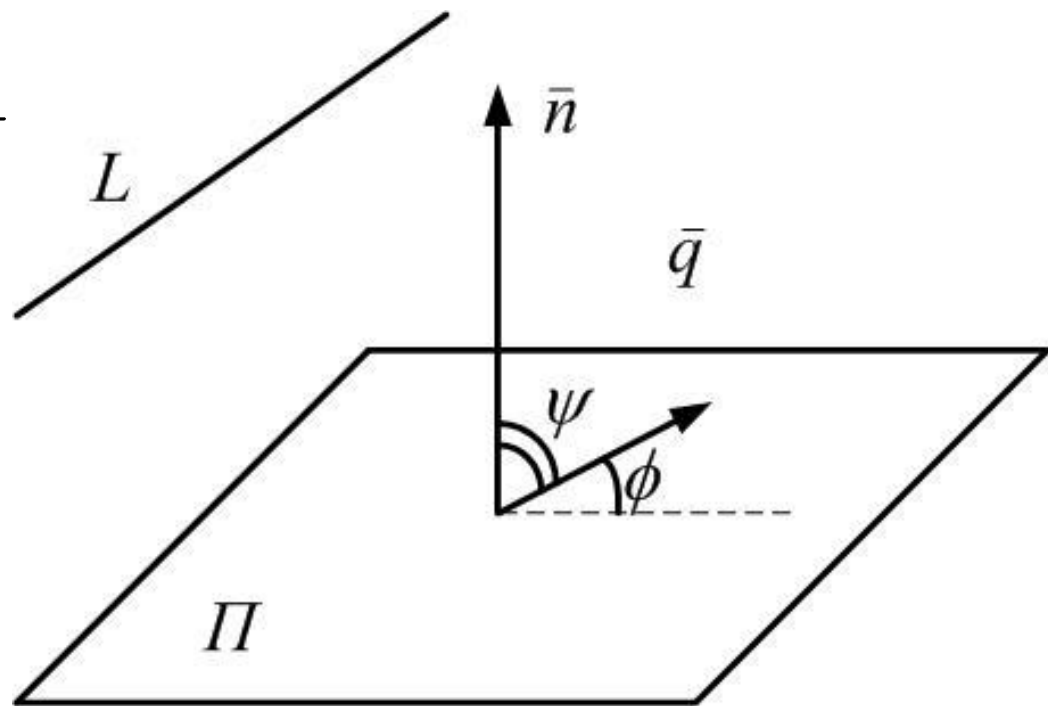
Условие перпендикулярности следует из определения скалярного произведения и его равенства нулю (при $\cos \phi = 0$) и имеет вид:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Угол между прямой и плоскостью: условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Рассмотрим плоскость Π , заданную общим уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$, и прямую L , заданную каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$



Т.к. угол ϕ между прямой L и плоскостью Π является дополнительным к углу ψ между направляющим вектором прямой $\vec{q} = (l, m, n)$ и нормальным вектором плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$, то из определения скалярного произведения $\vec{q} \cdot \vec{n} = |\vec{q}| |\vec{n}| \cos \phi$ и равенства $\cos \psi = \sin \phi$ ($\phi = 90^\circ - \psi$), получим:

$$\sin \phi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{q}}{|\vec{n}| |\vec{q}|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Условие параллельности прямой L и плоскости Π (включающее в себя принадлежность L к Π) эквивалентно условию перпендикулярности векторов $\vec{q}$ и $\vec{n}$ и выражается $= 0$ скалярного произведения этих векторов: $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости Π эквивалентно условию параллельности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$ и выражается пропорциональностью координат этих векторов:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

Условия принадлежности двух прямых к одной плоскости

Две прямые в пространстве L_1 и L_2 могут:
1) пересекаться; 2) быть параллельными;
3) скрещиваться.

В первых двух случаях прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости.

Установим условие принадлежности к одной плоскости двух прямых, заданных каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

Очевидно, что для принадлежности двух указанных прямых к одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1A_1}, \vec{M_1A_2}$;

$\square q_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\square q_2 = (l_2, m_2, n_2)$, были компланарны, для чего в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение указанных трех векторов $= 0$

Записывая смешанные произведения указанных векторов в координатах получаем необходимое и достаточное условие принадлежности двух прямых L_1 и L_2 к одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие принадлежности прямой к плоскости

Пусть есть прямая

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

Эти условия имеют вид:

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ и $Al + Bm + Cn = 0$,
первое из которых означает, что точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$,
через которую проходит прямая, принадлежит плоскости,
а второе – условие параллельности прямой и плоскости.

Кривые второго порядка.

§ 1. Понятие об уравнении линии на плоскости.

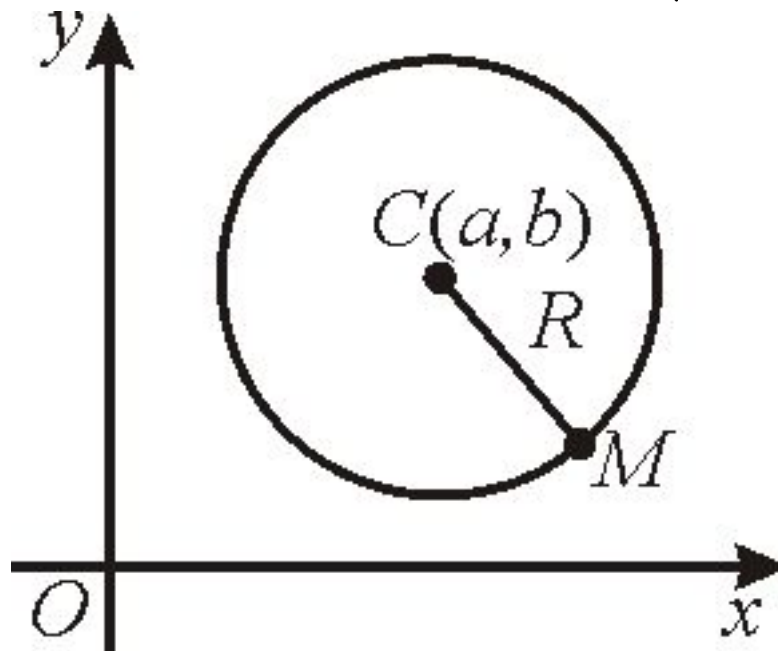
Уравнение $f(x, y) = 0$ называется уравнением линии L в выбранной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.



Пример: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ($R > 0$) –
уравнение окружности радиуса R и центром в
точке $C(a, b)$.

Если 1.) $\forall M(x, y) \in O \Rightarrow |CM| = R$

2.) $\forall M(x, y) \notin O \Rightarrow |CM| \neq R$



Линия L называется линией n -того порядка, если в некоторой декартовой системе координат она задается алгебраическим уравнением n -той степени относительно x и y .

Мы знаем единственную линию 1-го порядка – **прямую:** $Ax + By + D = 0$

Мы будем рассматривать кривые 2-го порядка: эллипс, гиперболу, параболу.

Общее уравнение линий 2-ого порядка имеет вид:

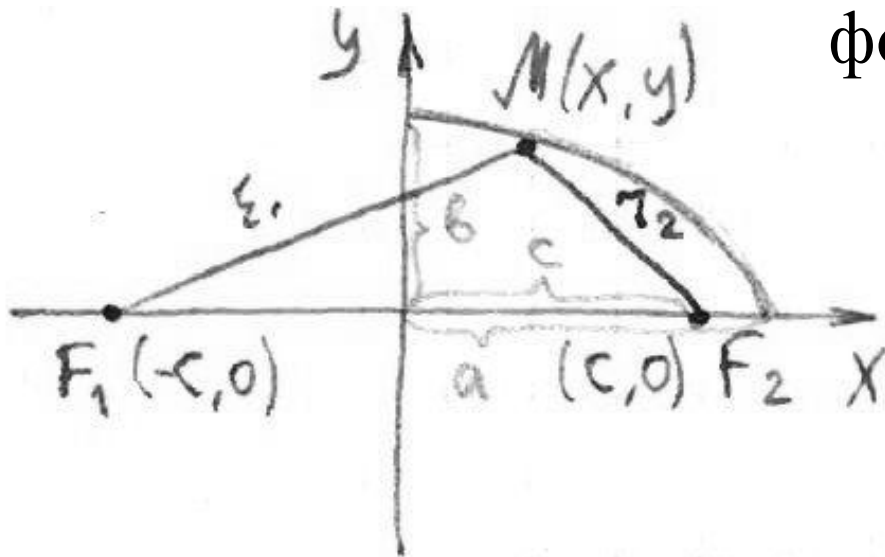
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Эллипс (Э)

Определение. Эллипс – множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная и большая расстояния между фокусами.

Обозначим постоянную $2a$, расстояние между фокусами $2c$
($a > c$, $a > 0$, $c > 0$).

Проведем ось X через фокусы, ось Y через середины фокусного расстояния.



Пусть M – произвольная точка эллипса,

т. $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r_1 + r_2 = 2a$ (1),
где r_1, r_2 – фокальные радиусы Э.

Запишем (1) в координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (2)$$

Это уравнение эллипса в выбранной системе координат.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (3)$$

Упрощая (2) получим :

$$b^2 = a^2 - c^2$$

(3) – каноническое уравнение эллипса.

Можно показать, что (2) и (3) эквивалентны:

$$\sqrt{y^2 - b^2} + \sqrt{b^2 + y^2} = \sqrt{y+b} \left(\sqrt{y-b} + \sqrt{y+b} \right) = 2a$$

Исследование формы эллипса по каноническому уравнению

1) Эллипс – кривая 2-го порядка

2) Симметрия эллипса.

т.к. x и y входят в (3) лишь в четных степенях, то эллипс имеет 2 оси и 1 центр симметрии, которые в выбранной системе координат совпадают с выбранными осями координат и точкой O .

$$y + b(y - b + 2(y - b) + y + b) = 4a^2 \quad y + b(4y + 2b)$$
$$y + 4by + 2b^2 = 2b(2y + b) + y$$

3) Расположение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}; \quad x^2 \leq a^2; \quad |x| \leq a; \quad |y| \leq b,$$

Т.е. весь Э расположен внутри прямоугольника, стороны которого $x = \pm a$ и $y = \pm b$.

4) Пересечение с осями.

С OX : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; & x^2 = a^2 \\ y = 0; & x = \pm a \end{cases}$

С OY : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}; & y^2 = b^2 \\ x = 0; & y = \pm b \end{cases}$

$$A_1(-a;0); \quad A_2(a;0);$$

вершины эллипса

$$B_1(0;b); \quad B_2(0;-b);$$

В силу симметрии эллипса рассмотрим его поведение ($\uparrow\downarrow$) лишь в I четверти.

Разрешив (3) относительно y получим:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} < 0, \qquad \text{т.е.}$$

в I четверти $x > 0$ и эллипс убывает.

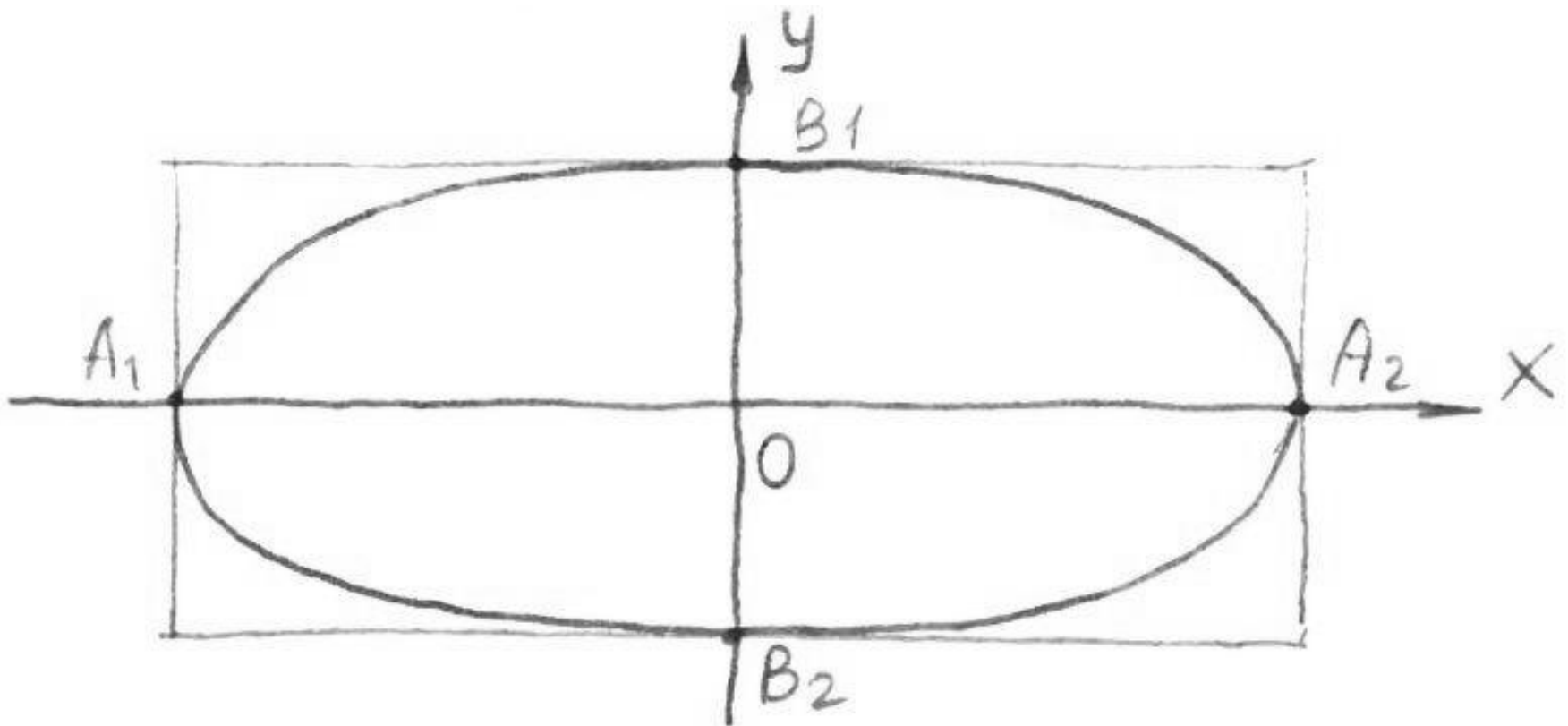
Вывод: Э – замкнутая кривая, овальная, имеющая четыре вершины.

План построения Э.

- 1) Строим прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$
- 2) Вписываем выпуклую овальную линию

$$y^2 = b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2} = \left(\frac{b - xb}{a} \right) \cdot \left(\frac{b + xb}{a} \right) = \left(\frac{b(a - x)}{a} \right) \left(\frac{b(a + x)}{a} \right) = \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cdot (a^2 - x^2)$$

Построение эллипса



Гипербола (Г)

Определение : Г – множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний которых до 2-х фиксированных точек плоскости F_1, F_2 есть величина постоянная и $<$ этого расстояния.

$$2a, |F_1 F_2| = 2c$$

Выберем систему координат .

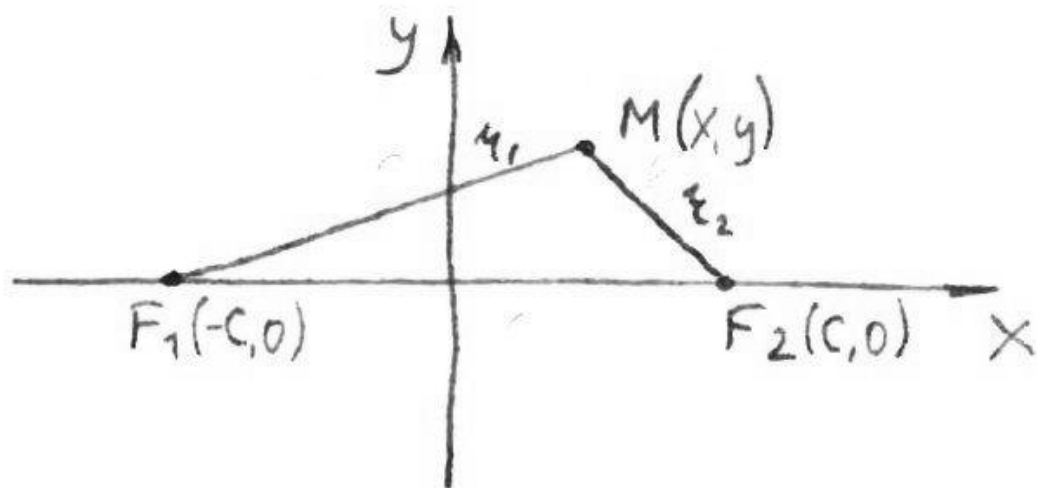
точка $M \in \Gamma \Leftrightarrow |r_1 - r_2| = 2a$

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

В координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (1)$$

(1) – уравнение Г в выбранной системе координат



Упрощая (1): $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ (2) $b^2 = c^2 - a^2$

(2) – каноническое уравнение Г.

(1) и (2) – эквивалентны.

Исследование гиперболы по каноническому уравнению

1) Г- линия 2-го порядка

2) Г имеет две оси и один центр симметрии, которые в нашем случае совпадают с координатными осями и началом координат.

3) Расположение гиперболы.

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

$\begin{matrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ & & \geq 1 \end{matrix}$

$$x^2 \geq a^2$$

$$|x| \geq a$$

Гипербола расположена вне полосы между прямыми $x = a, x = -a$.

4) Точки пересечения с осями.

$$\begin{aligned} OX: & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \\ y = 0; \end{array} \right. \quad x = \pm a \\ OY: & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \\ x = 0; \end{array} \right. \quad \text{не имеет решений} \end{aligned}$$

$A_1(-a;0); A_2(a;0)$ – действительные вершины Γ

$B_1(0;b); B_2(0;-b)$ – мнимые вершины Γ

$2a$ – действительная ось Γ

$2b$ – мнимая ось Γ

5) Асимптоты гиперболы.

В силу симметрии Γ рассмотрим ее часть в I четверти .
Разрешив (2) относительно y , получим:

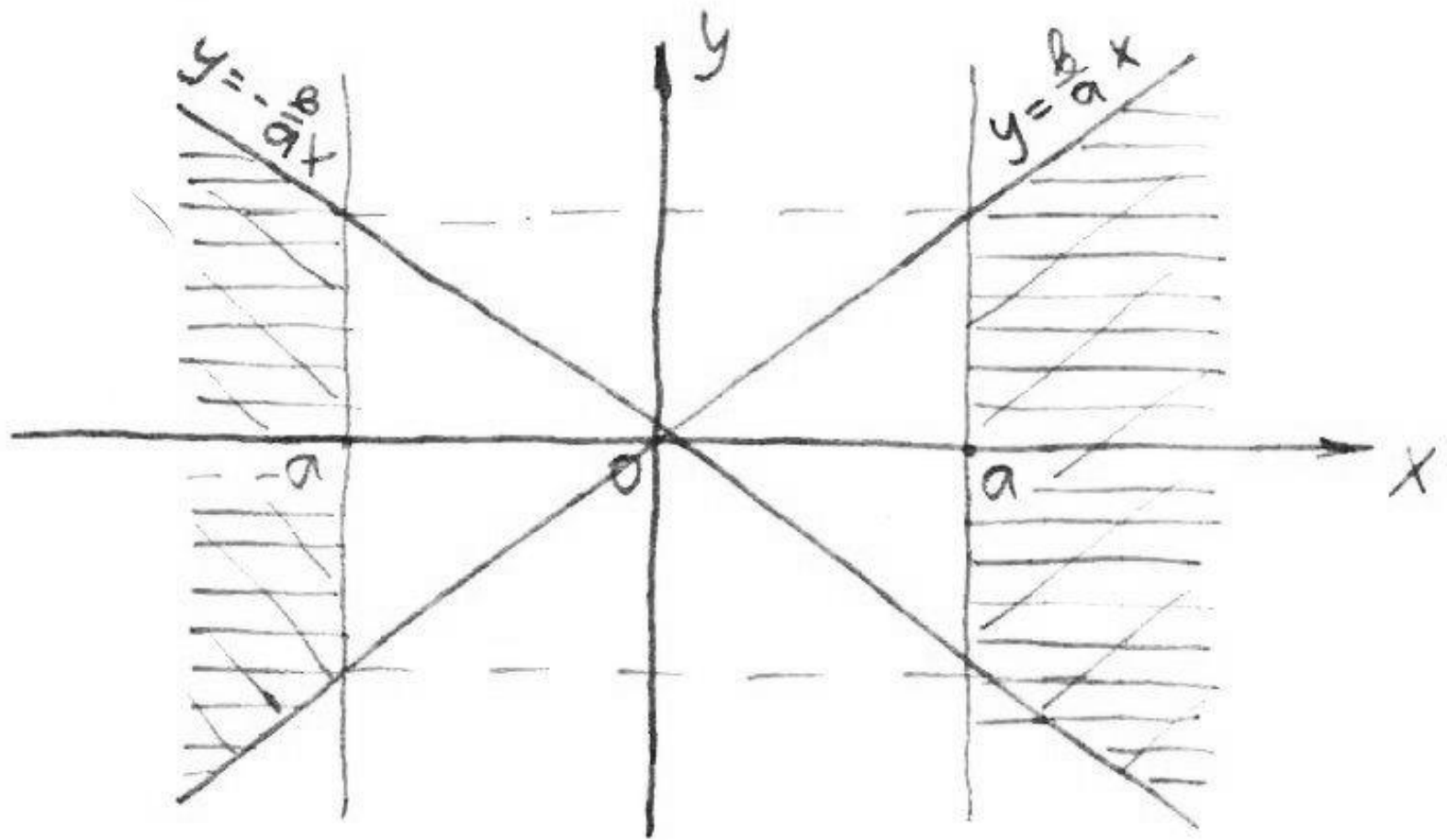
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{уравнение } \Gamma \text{ в I четверти } x \geq 0$$

Рассмотрим прямую: $y = \frac{b}{a} \cdot x$

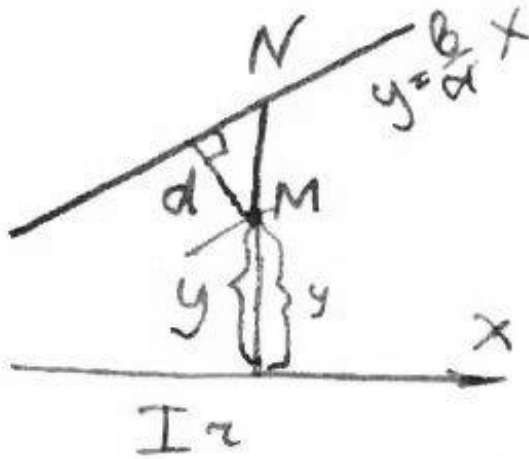
т.к. в I четверти $x > 0$, то $\frac{b}{a} \cdot x > \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$ т.е. в I четверти при одной и той же абсциссе, ордината прямой $>$ ординаты соответствующей точки Γ , т.е. в I четверти Γ лежит ниже этой прямой.

Вся Γ лежит внутри вертикального угла со сторонами

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$$



Покажем, что при неограниченном удалении от начала координат Γ приближается к прямым $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$.



$$d < |MN| \quad (*)$$

$$\begin{aligned} MN &= Y_{-\infty} - y_{-\infty} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \\ &= \frac{b}{a} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (Y - y) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |MN| = 0 \quad \text{из } (*) \rightarrow \text{при } x \rightarrow \infty \quad \alpha \rightarrow 0$$

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x - \text{асимптоты} \quad \Gamma$$

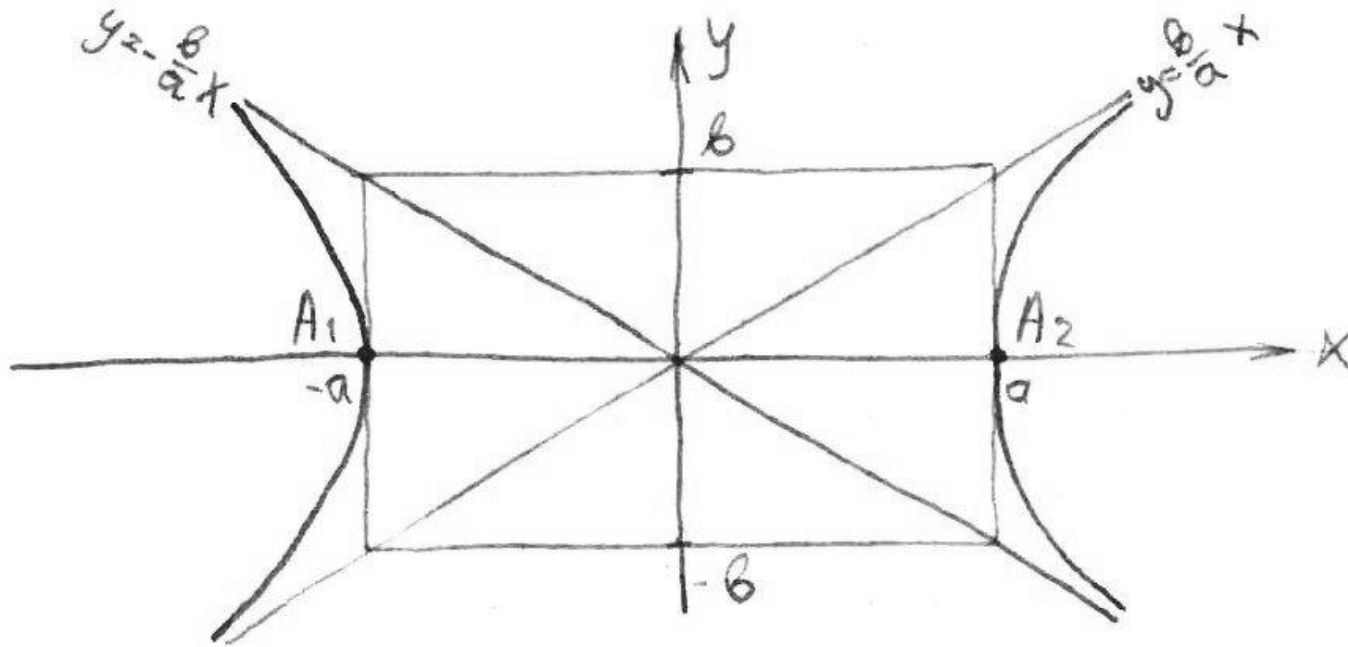
6) Можно показать, что в I ч. Γ возрастает

7) План построения Γ

а) строим прямоугольник $2a, 2b$

б) проводим его диагонали

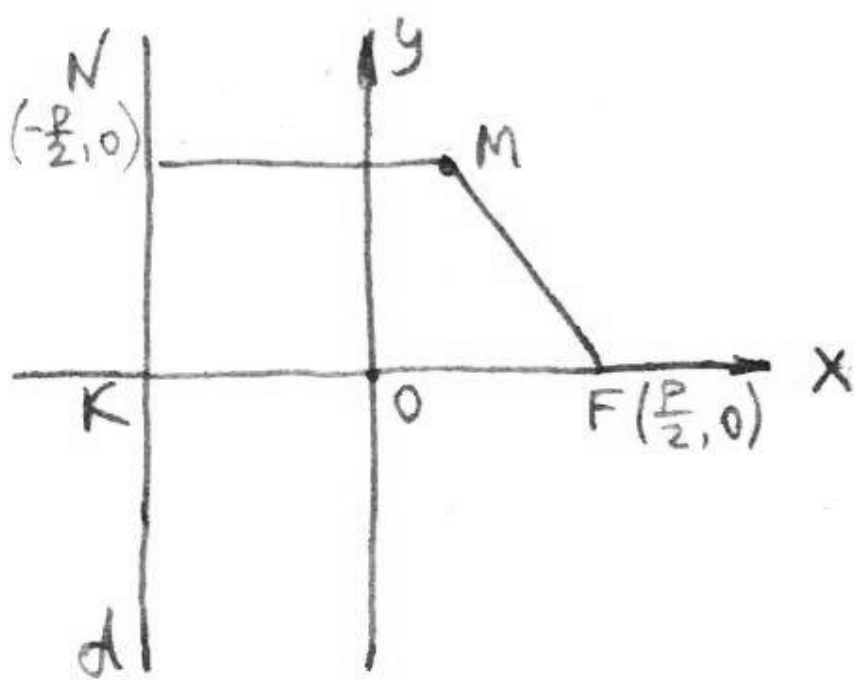
в) отметим A_1, A_2 — действительные вершины Γ и
впишем эти ветви



Парабола (П)

Рассмотрим d (директрису) и F (фокус) на плоскости.

Определение. П – множество всех точек плоскости, равноудаленных от прямой d и точки F (фокус)



d -директриса

F -фокус

XOY

$$|KF| = p \quad (p > 0)$$

$$Z\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad M(x, y)$$

точка $M \in \Pi$ тогда, $|MF| = |MN|$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \quad (1)$$

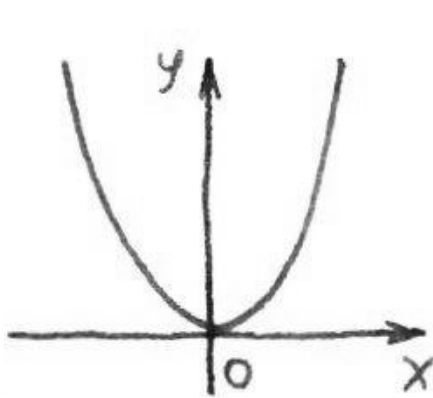
уравнение Π , выбранной в системе координат

Упрощая (1) получим

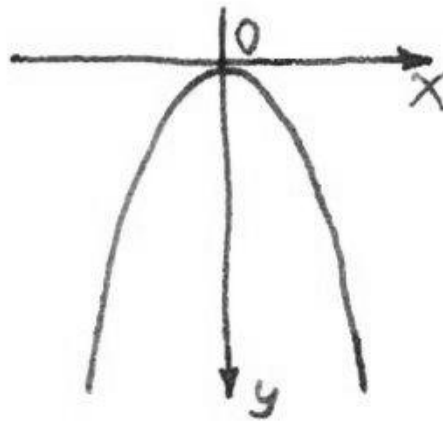
$$\boxed{y^2 = 2px} \quad (2) - \text{каноническое уравнение } \Pi.$$

(1) и (2) эквивалентны

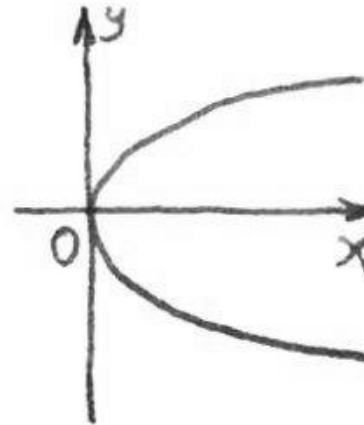
Исследование II по каноническому уравнению



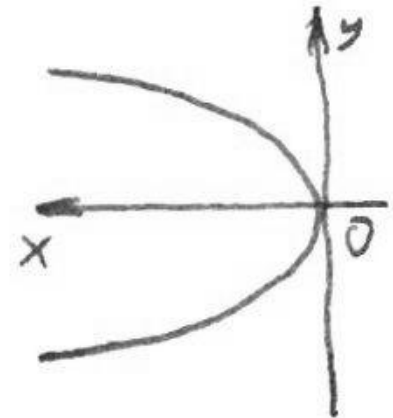
$$x^2 = 2py$$



$$x^2 = -2py$$



$$y^2 = 2px$$



$$y^2 = -2px$$

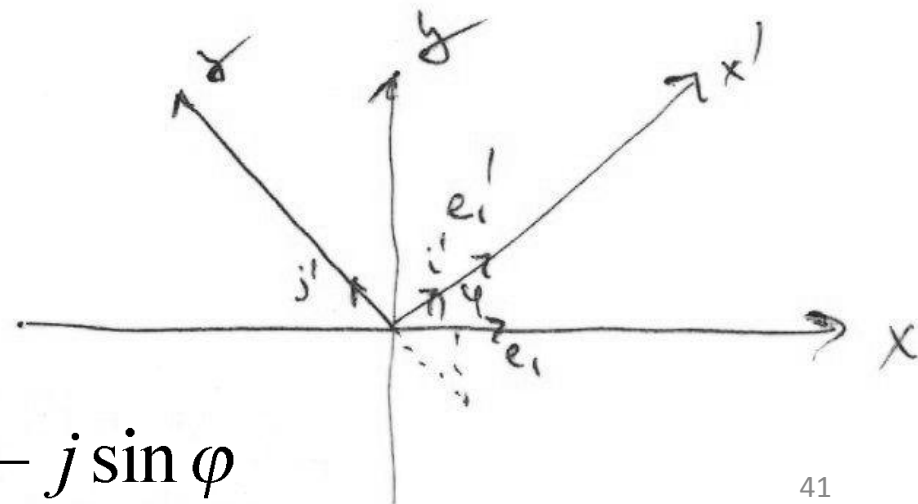
$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

$$e'_1 = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$$

$$xi + yj = (x'i' + y'j') \cdot i$$

$$x = x'(i' \cdot i) + y'(j \cdot i) = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$



§4. Цилиндры.

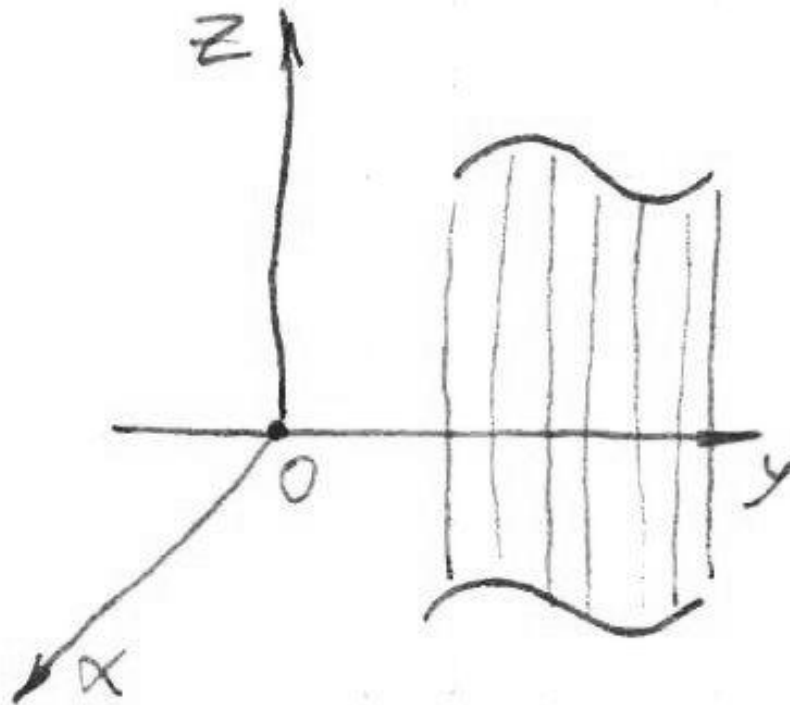
Цилиндрические поверхности с образующими, параллельными координатным осями

Через точку x линии L проведем прямую параллельную оси OZ .

Поверхность, образованная этими прямыми называется цилиндрической поверхностью или цилиндром (Ц).

Любая прямая параллельная оси OZ называется образующей.

l - направляющая
цилиндрической поверхности
плоскости XOY .

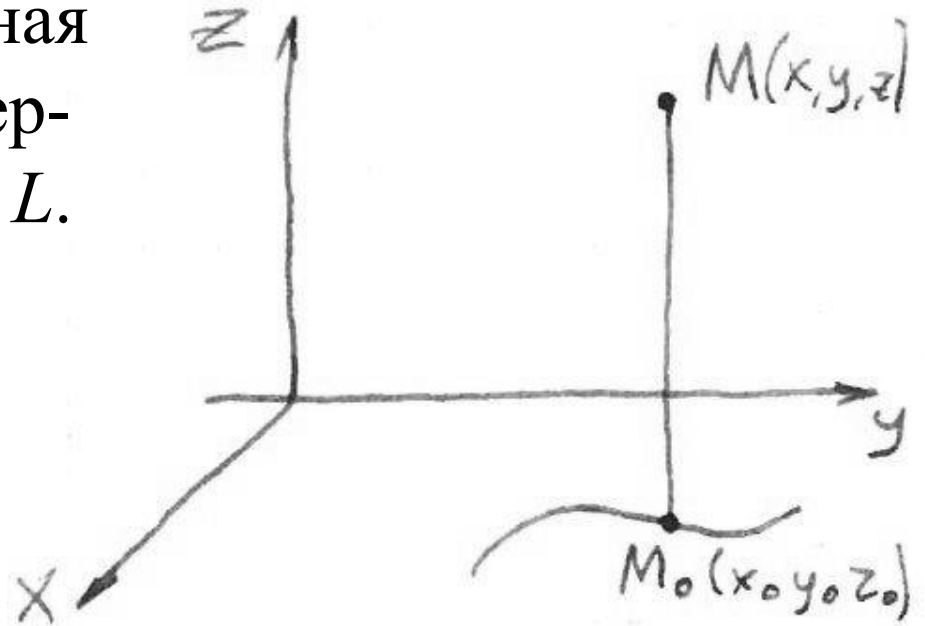


$$Z(x,y) = 0 \quad (1)$$

Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка цилиндрической поверхности. Спроецируем ее на L .

$$M_0 \in L \Rightarrow Z(x_0, y_0) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x = x_0 &\Rightarrow Z(x, y) = 0 & M \in \text{Ц} \\ y = y_0 & & M_0 \in L \end{aligned}$$



то есть координаты M удовлетворяют (1) очевидно, что если $M \notin \text{Ц}$, то она не проектируется в точку $M_0 \in L$ и следовательно, координаты M не будут удовлетворять уравнению (1), которое определяет Ц с образующей параллельной оси OZ в пространстве.

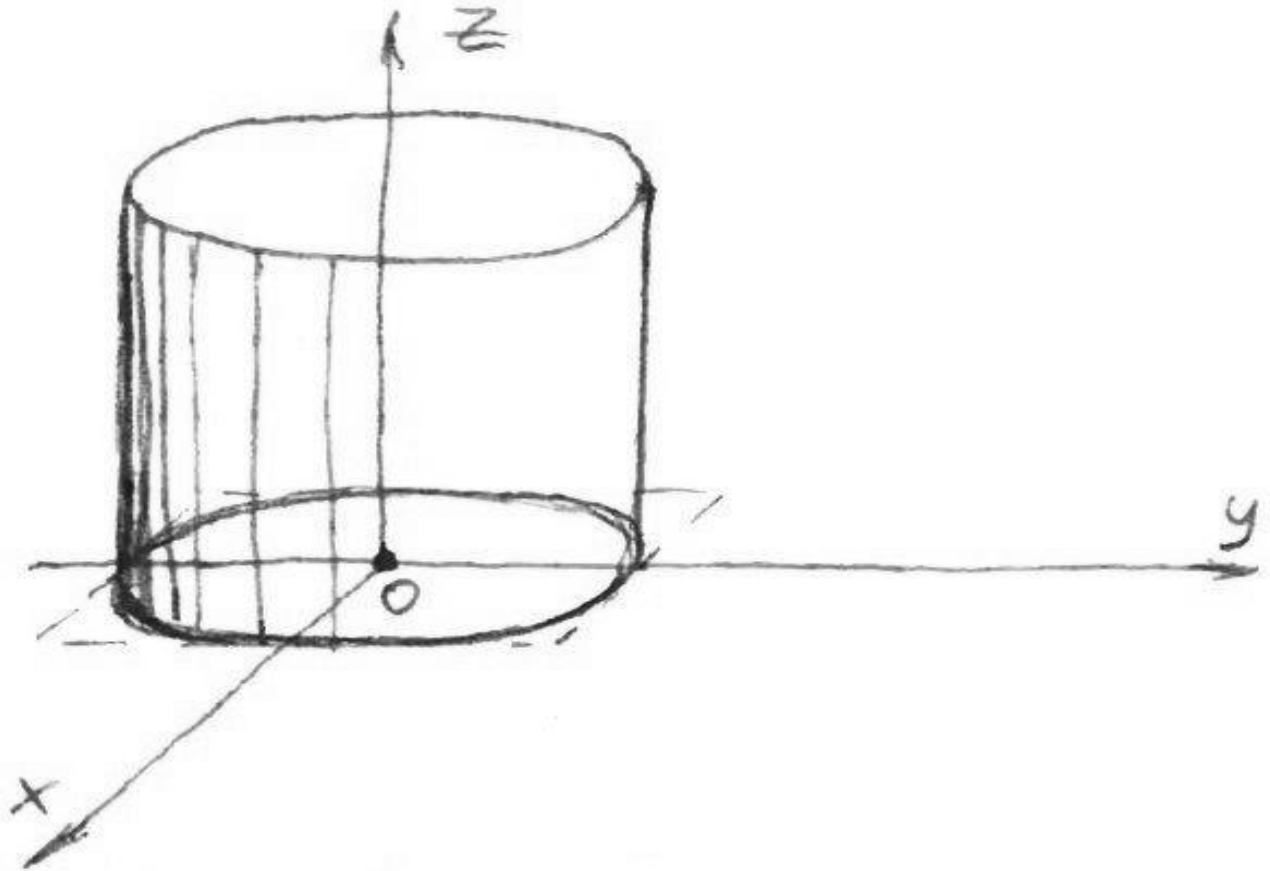
Аналогично можно показать, что :

$\Phi(x,z) = 0$ в пространстве $\text{Ц} \parallel OY$

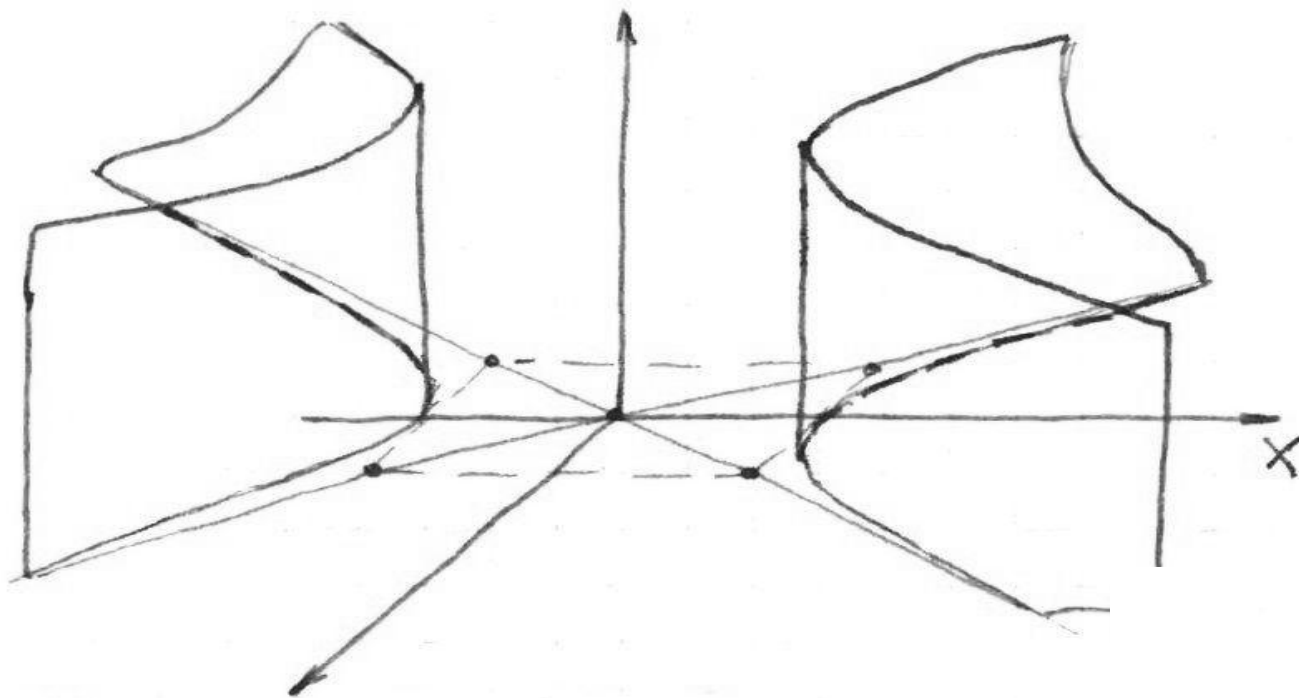
$\phi(y,z) = 0$ определяет в пространстве $\text{Ц} \parallel OX$

Примеры цилиндров второго порядка

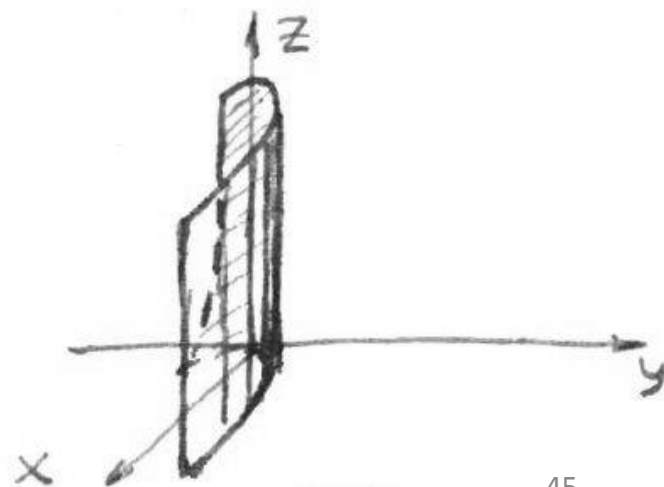
1) Эллиптический $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



2) Гиперболический $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



3) Параболический $y^2 = 2px$



Проекция пространственной линии на координатной плоскости

Линию в пространстве можно задать параметрически и пересечением поверхностей. Одну и ту же линию можно задать $\cap$ различных поверхностей.

Пусть пространственная линия L задается $\cap$ двух поверхностей α :

$$S_1: \Phi_1(x,y,z) = 0$$

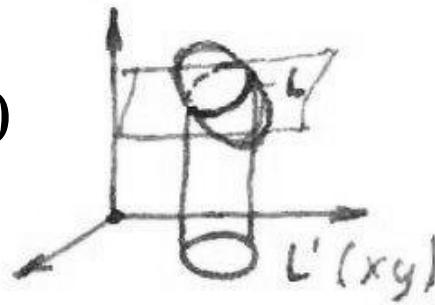
$$S_2: \Phi_2(x,y,z) = 0$$

$$\text{уравнение } L \quad \begin{cases} \Phi_1(x,y,z) = 0 \\ \Phi_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Найдем проекцию L на плоскость XOY из уравнения (1) исключаем Z . Получим уравнение: $Z(x,y) = 0$ – в пространстве это уравнение Ц с образующей $\parallel OZ$ и направляющей L .

Проекция:

$$L'xy \quad \begin{cases} Z(x, y) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$



Поверхности второго порядка

Эллипсоид – каноническое уравнение поверхности имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Эллипсоид – поверхность второго порядка.
- 2) X, Y, Z входят в уравнение лишь в четных степенях $\Rightarrow$ поверхность имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии, которые в выбранной системе координат совпадают с координатными плоскостями и началом координат.

3) Расположение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \quad x^2 \leq a^2$$
$$|x| \leq a$$

Поверхность заключена между $\parallel$ плоскостями с уравнениями $x = a, x = -a$.

Аналогично $|y| \leq b, \quad |z| \leq c,$

т.е. вся поверхность заключена внутри прямоугольного параллелепипеда.

$$x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c.$$

Будем исследовать поверхность методом сечений — пересекая поверхность координатными плоскостями и плоскостями $\parallel$ координатным. В сечении будем получать линии, по форме которых будем судить о форме поверхности.

Пересечем поверхность плоскостью XOY . В сечении получим линию.

$$L: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- эллипс } a \text{ и } b \text{ -} \\ \text{полуоси} \end{array}$$

Аналогично с плоскостью YOZ

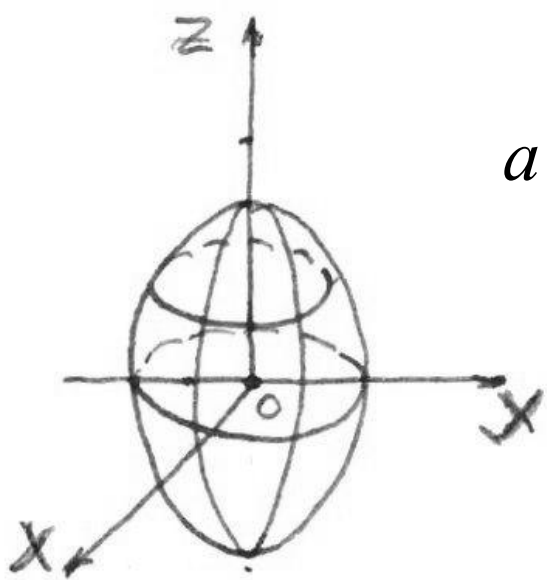
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- эллипс с} \\ \text{полуосями } b \text{ и } c \end{array}$$

Плоскость $\parallel XOY$

$$\begin{cases} z = h & |z| \leq c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = h \end{cases} \quad \begin{array}{l} a^* = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \\ b^* = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \end{array}$$

Если $h(0, c)$, то оси эллипса убывают от a и b до 0.



$a = b = c$ - сфера

Параболоиды

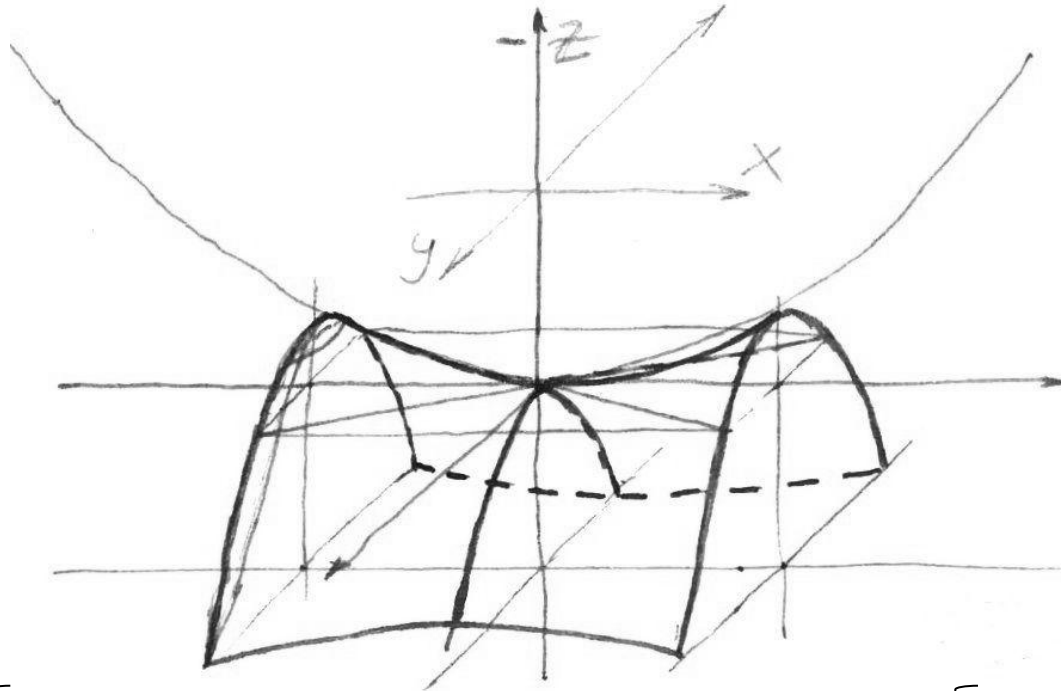
а) Гиперболический параболоид – поверхность с каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad \begin{matrix} pq > 0 \\ p > 0, q > 0 \end{matrix}$$

1) Поверхность второго порядка

2) Так как x, y входят в уравнение лишь в четных степенях, то поверхность имеет плоскости симметрии, которые при данном выборе координат совпадают с плоскостями XOZ, YOZ .

3) исследуем поверхность методом сечения



седло

пл. XOZ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{x^2}{2p} \\ y = 0 \end{array} \right.$



В сечении парабола симметричная оси OZ , восходящая.

пл. YOZ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -\frac{y^2}{2q} \\ x = 0 \end{array} \right.$



пл. $\parallel YOZ$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -\frac{y^2}{2q} + \frac{h^2}{2p} \\ x = h \end{array} \right.$$



пл. $\parallel XOZ$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{x^2}{2p} - \frac{h^2}{2q} \\ y = h \end{array} \right.$$



пл. XOY

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

В сечении пара прямых, проходящих через начало координат

пл. $\parallel XOY$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = h \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{array} \right\}$$

при $h > 0$ гиперболы, с действительной полуосью вдоль OX , при $h < 0$ гиперболы, с действительной полуосью вдоль оси Y .

Эллиптический параболоид

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z}$$

$pq > 0$

- 1) поверхность второго порядка $p > 0, q > 0$
- 2) имеет 2 плоскости симметрии, которые совпадают с XOZ и YOZ
- 3) левая часть уравнения неотрицательна $\Rightarrow z \geq 0$, то есть, вся поверхность расположена над XOY .
- 4) исследуем поверхность методом сечения

пл. XOY

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad 0(0,0,0)$$

пл. $\parallel XOY$

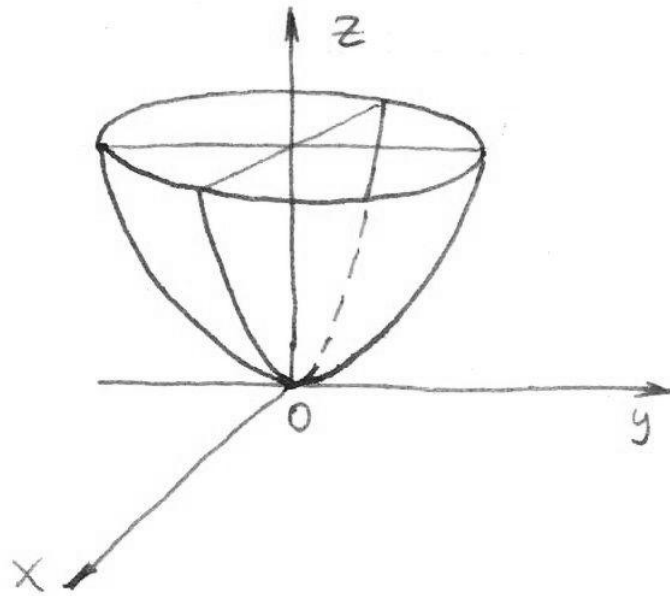
$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = h(h \geq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{эллипс} \\ a^* = \sqrt{2ph}; b^* = \sqrt{2qh} \end{matrix}$$

пл. YOZ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{парабола восходящая} \\ \text{с вершиной в начале} \\ \text{координат} \end{matrix}$$

пл. XOZ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{парабола восходящая с} \\ \text{вершиной в начале} \\ \text{координат} \end{matrix}$$



Гиперболоиды

а) Однополосный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$\begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{pmatrix}$$

- 1) поверхность второго порядка
- 2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии
- 3) метод сечений

пл. XOY

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{в сечении эллипс с} \\ \text{полуосями } a \text{ и } b - \\ \text{горловой} \end{array}$$

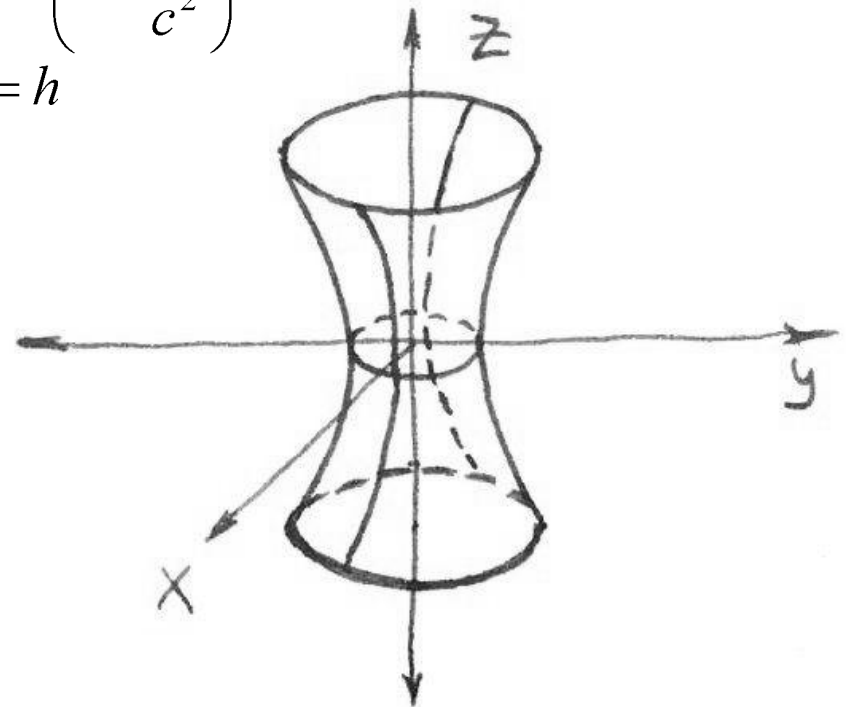
пл. $\parallel XOY$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = h \\ z = h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right)} = 1 \\ z = h \end{array} \right.$$

$$a^* = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

$$b^* = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

при $|h| \rightarrow \infty$ от a и b до ∞ .



б) Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1) поверхность второго порядка

2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии

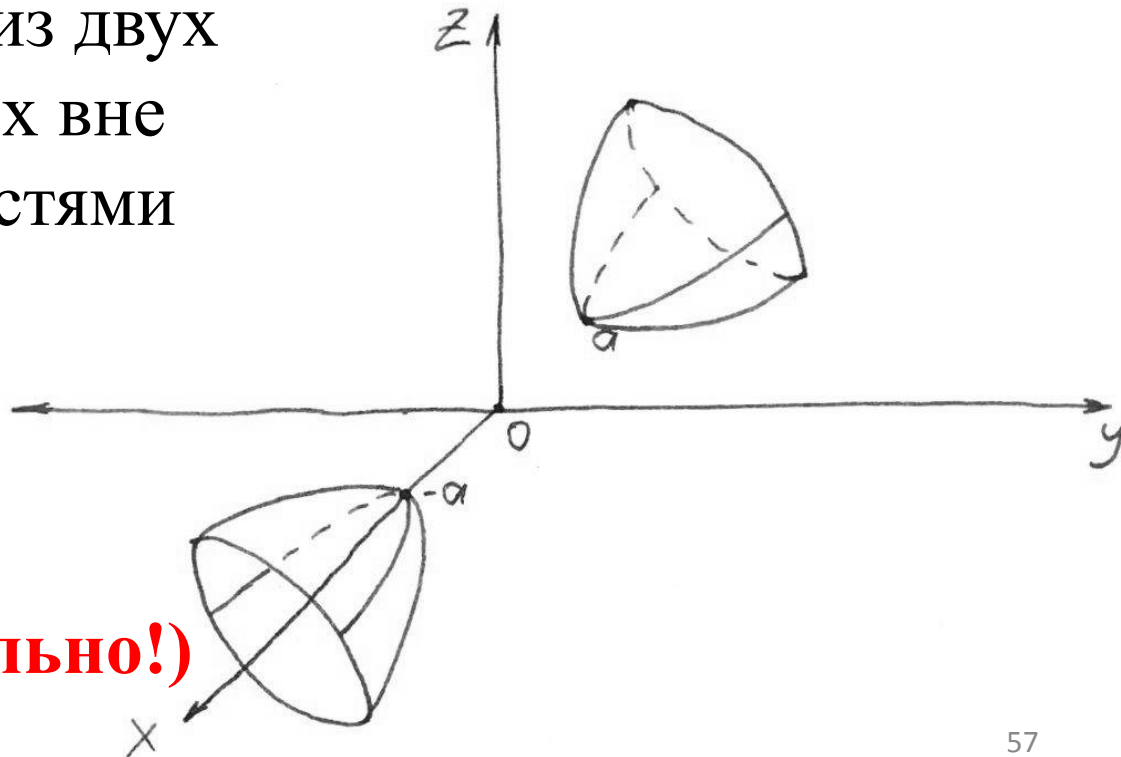
3) расположение поверхности
 $x^2 \geq a^2$; $|x| \geq a$; $(a, b, c > 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1$$

Поверхность состоит из двух частей, расположенных вне полосы между плоскостями с уравнениями

$$x = a, \quad x = -a$$

4) исследуем методом сечений (**Самостоятельно!**)



Конус второго порядка

Конусом второго порядка называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$(a, b, c > 0) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- 1) поверхность второго порядка
- 2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии
- 3) исследуем методом сечений
пл. XOY

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \end{array} \right. \quad O(0,0,0)$$

пл. $\parallel XOY$

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{h^2}{c^2}} = 1 \right\}$$

$a^* = a \frac{|h|}{c} \quad b^* = b \frac{|h|}{c} \quad |h| \rightarrow \infty \text{ от } 0 \text{ до } \infty$

пл. YOZ

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right) = 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \\ x = 0 \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \end{array} \right.$$

пара прямых, проходящих через начало координат

пл. XOZ

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \end{array} \right.$$

пара прямых,
проходящих через
начало координат

