

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Родился около 580 г. до н. э. на
острове Самос
Убит в Метапоне в результате
заговора



ЦЕЛ И



Выяснить:

- 1. Кто же такой Пифагор.*
- 2. В чем заключается теорема Пифагора.*
- 3. Доказать теорему.*
- 4. Найти ей практическое применение.*



ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

«Геометрия обладает двумя великими сокровищами. Первое – это теорема Пифагора...»

О Пифагоре сохранились десятки легенд и мифов, с его именем связано многое в математике, и в первую очередь, конечно, теорема носящая его имя, которая занимает важнейшее место в школьном курсе геометрии.



КРАТКАЯ БИОГРАФИЯ

Ряд источников указывает, что Пифагор стал чемпионом одной из первых Олимпиад по кулачному бою. В юном возрасте Пифагор отправился в Египет, чтобы набраться мудрости и тайных знаний у египетских жрецов. Ямвлих пишет, что Пифагор в 18-летнем возрасте покинул родной остров и, объехав мудрецов в разных краях света, добрался до Египта, где пробыл 22 года (приобщается к математике и создает из нее центр своей философской системы), пока его не увёл в Вавилон в числе пленников персидский царь Камбиз, завоевавший Египет в 525 до н. э. В Вавилоне Пифагор пробыл ещё 12 лет, общаясь с магами, пока наконец не смог вернуться на Самос в 56-летнем возрасте, где соотечественники признали его мудрым человеком. В Кротоне (Южная Италия) Пифагор основывает школу – пифагорейский союз. Только тех, кто прошел многие ступени знаний, Пифагор называет своими ближайшими учениками и допускает во двор своего дома, где беседует с ними. Отсюда пошло понятие «эзотерический», то есть находящийся внутри. В возрасте примерно 60 лет Пифагор женится на Феано, одной из своих учениц. У них рождается 3 детей (два сына и дочь), и все они становятся последователями своего отца. Пифагор принимает большое участие в политической жизни Кротона. По его инициативе создается аристократический правящий орган – «Совет трехсот». Пифагор сам возглавляет его в течение примерно 25 лет. Постепенно «Совет трехсот» распространяет свое влияние и на соседние города



ИСТОРИЯ ТЕОРЕМЫ

Исторический обзор начнем с древнего Китая. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чу-пей. В этом сочинении так говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5: "Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4. Кантор (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$ было известно уже египтянам еще около 2300 г. до н. э., во времена царя Аменемхета I (согласно папирусу 6619 Берлинского музея). Несколько больше известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте, относимом ко времени Хаммураби, т. е. к 2000 г. до н. э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой - на критическом изучении греческих источников, Ван-дер-Варден (голландский математик) сделал следующий вывод: "Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку." Геометрия у индусов, как и у египтян и вавилонян, была тесно связана с культом. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в Индии уже около 18 века до н. э. В первом русском переводе евклидовых "Начал", сделанном Ф. И. Петрушевским, теорема Пифагора изложена так: "В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол".....

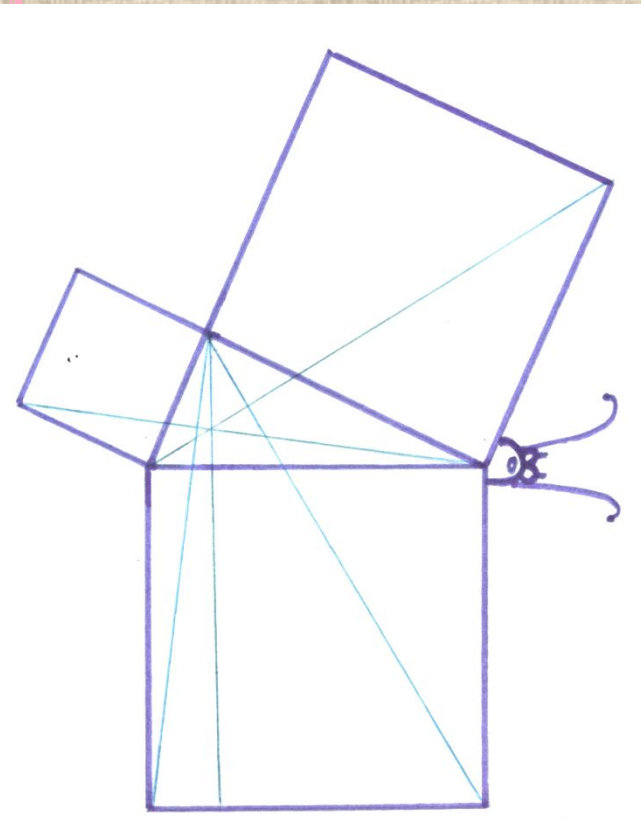


Теорему называли «**мостом ослов**», так как слабые ученики, заучивающие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому «**ослами**», были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста.

Теорему называли «**мостом ослов**», так как «**ослами**» ученики, не умеющие серьезной математической работы, бежали от геометрии.

"elefuga"

В некоторых списках «Начал» Евклида теорема Пифагора называлась теоремой Нимфы, «теорема – бабочка», по-видимому из-за сходства чертежа с бабочкой, поскольку словом «нимфа» греки называли бабочек. Нимфами греки называли еще и невест, а также некоторых богинь.



«Нимфа» - бабочка, невеста

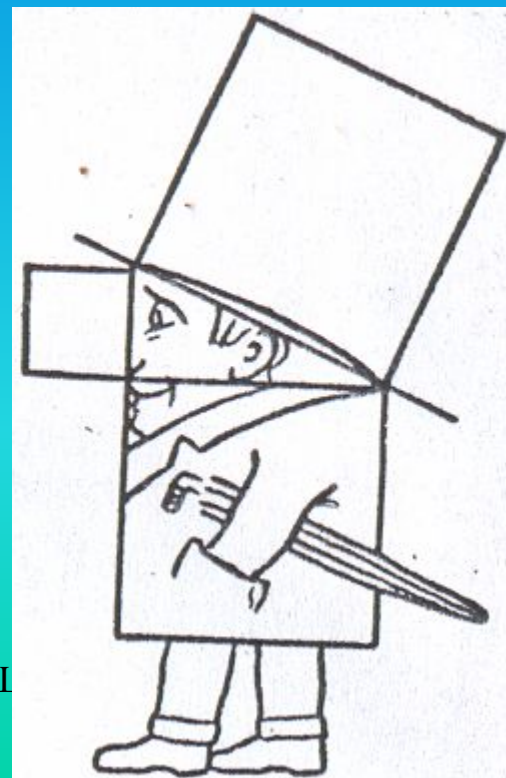
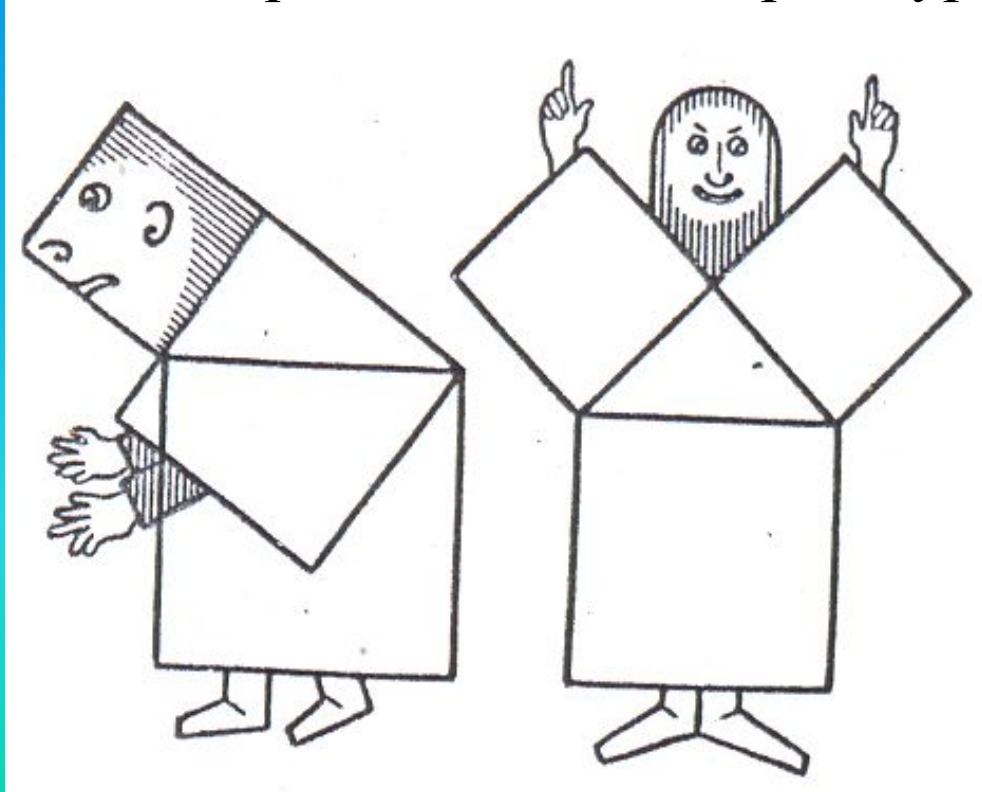
При переводе с греческого арабский переводчик, вероятно, не обратил внимания на чертеж и перевел слово «нимфа» не как «бабочка», а как «невеста». Так и появилось ласковое название знаменитой теоремы – «Теорема Невесты».



К *теореме Пифагора* его ученики составляли стишки, вроде:

*«Пифагоровы штаны
во все стороны равны»,*

А также рисовали такие карикатуры:



ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Первоначально теорема устанавливала соотношение между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника:

«Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах».

Алгебраическая формулировка:

«В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

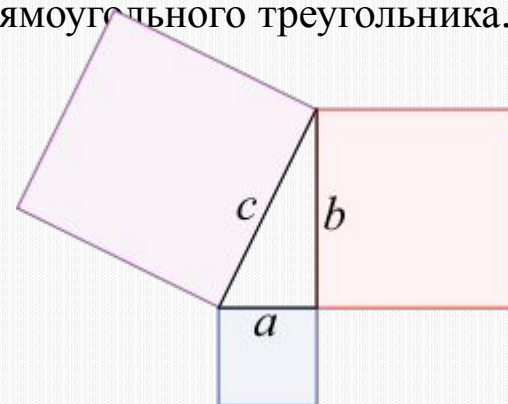
То есть, обозначив длину гипотенузы треугольника через c , а длины катетов через a и b : $a^2 + b^2 = c^2$. Обе формулировки теоремы эквивалентны, но вторая формулировка более элементарна, она не требует понятия площади. То есть второе утверждение можно проверить, ничего не зная о площади и измерив только длины сторон прямоугольного треугольника.

Обратная теорема Пифагора. *Для всякой тройки*

положительных чисел a , b и c , такой, что

$a^2 + b^2 = c^2$, существует прямоугольный

треугольник с катетами a и b и гипотенузой c .



ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Через подобные треугольники

2. Доказательства методом площадей

2.1. Доказательство через равнодополняемость

2.2. Доказательство Евклида

2.3. Доказательство Леонардо да Винчи



ЧЕРЕЗ ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

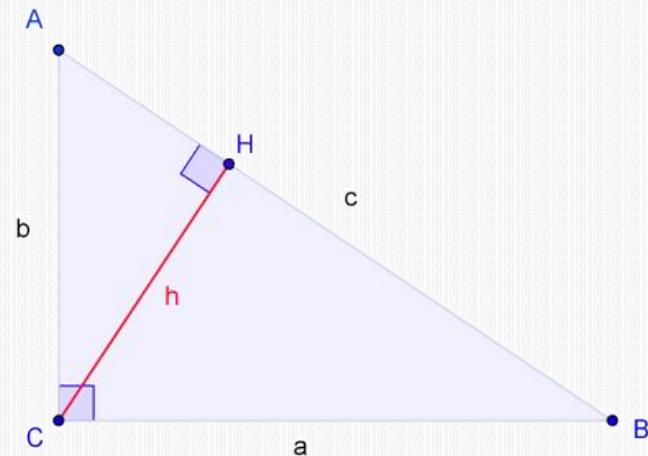
Следующее доказательство алгебраической формулировки - наиболее простое из доказательств, строящихся напрямую из аксиом. В частности, оно не использует понятие площади фигуры. Пусть ABC есть прямоугольный треугольник с прямым углом C . Проведём высоту из C и обозначим её основание через H . Треугольник AHC подобен треугольнику ABC по двум углам. Аналогично, треугольник CBH подобен ABC . Введя обозначения

Получаем $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$

Что эквивалентно $\frac{a}{c} = \frac{|HB|}{a}, \frac{b}{c} = \frac{|AH|}{b}$.

или $a^2 = c \cdot |HB|; b^2 = c \cdot |AH|$.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

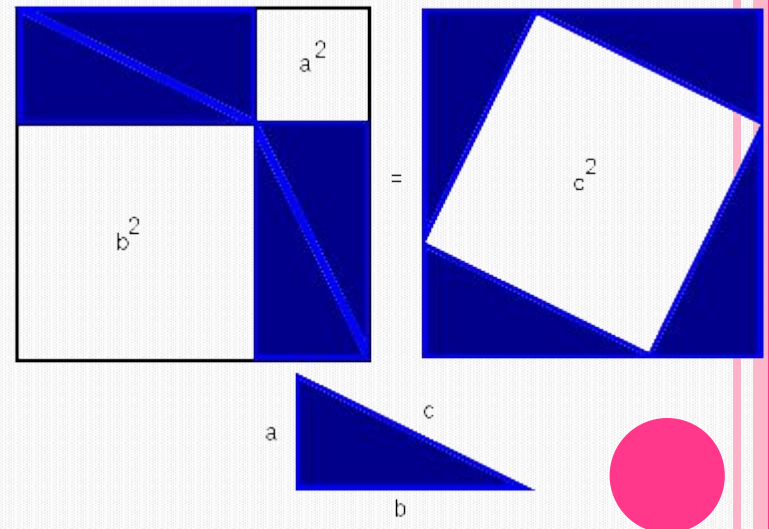


2.1. ЧЕРЕЗ РАВНОДОПОЛНЯЕМОСТЬ

1. Расположим четыре равных прямоугольных треугольника так, как показано на рисунке.
2. Четырёхугольник со сторонами c является квадратом, так как сумма двух острых углов 90° , а развёрнутый угол — 180° .
3. Площадь всей фигуры равна, с одной стороны, площади квадрата со стороной $(a+b)$, а с другой стороны, сумме площадей четырёх треугольников и внутреннего квадрата.

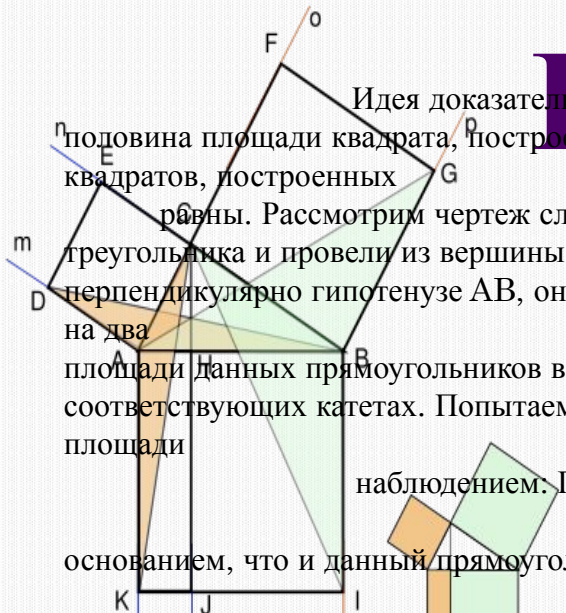
$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2;$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2;$$
$$c^2 = a^2 + b^2;$$

Что и требовалось доказать.



2.2.

ЕВКЛИДА



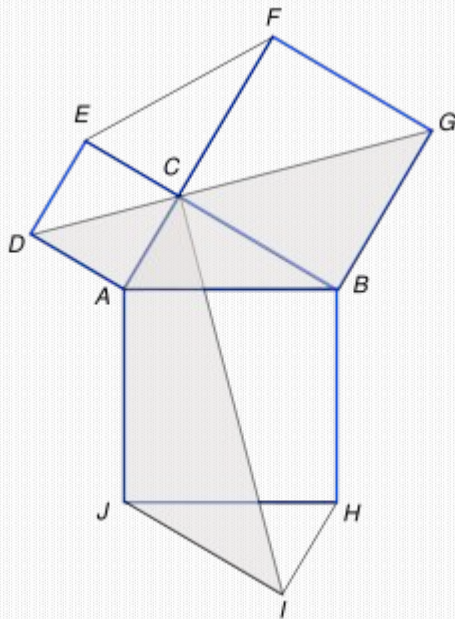
Идея доказательства Евклида состоит в следующем: попробуем доказать, что половина площади квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме половин площадей квадратов, построенных на катетах, а тогда и площади большого и двух малых квадратов равны. Рассмотрим чертеж слева. На нём мы построили квадраты на сторонах прямоугольного треугольника и провели из вершины прямого угла C луч s перпендикулярно гипотенузе AB , он пересекает квадрат $ABIK$, построенный на гипотенузе, на два прямоугольника — $BNJI$ и $NAKJ$ соответственно. Оказывается, что площади данных прямоугольников в точности равны площадям квадратов, построенных на соответствующих катетах. Попробуем доказать, что площадь квадрата $DECA$ равна площади прямоугольника $АНJK$. Для этого воспользуемся вспомогательным наблюдением. Площадь треугольника с той же высотой и основанием, что и данный прямоугольник, равна половине площади заданного прямоугольника.

Это следствие определения площади треугольника как половины произведения основания на высоту. Из этого наблюдения вытекает, что площадь треугольника $АСК$ равна площади треугольника $АНК$ (не изображённого на рисунке), которая, в свою очередь, равна половине площади прямоугольника $АНJK$. Докажем теперь, что площадь треугольника $АСК$ также равна половине площади квадрата $DECA$. Единственное, что необходимо для этого сделать, — это доказать равенство треугольников $АСК$ и BDA (так как площадь треугольника BDA равна половине площади квадрата по указанному выше свойству). Равенство это очевидно, треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Именно — $AB=AK, AD=AC$ — равенство углов CAK и BAD легко доказать методом движения: повернём треугольник CAK на 90° против часовой стрелки, тогда очевидно, что соответствующие стороны двух рассматриваемых треугольников совпадут (ввиду того, что угол при вершине квадрата — 90°). Рассуждение о равенстве площадей квадрата $BCFG$ и прямоугольника $BNJI$ совершенно аналогично. Тем самым мы доказали, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, складывается из площадей квадратов, построенных на катетах.



2.3. ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

Главные элементы доказательства — симметрия и движение.



Рассмотрим чертёж, как видно из симметрии, отрезок CI пересекает квадрат $ABHJ$ на две одинаковые части (так как треугольники ABC и JHI равны по построению). Пользуясь поворотом на 90 градусов против часовой стрелки, мы усматриваем равенство заштрихованных фигур $CAJI$ и $GDAB$. Теперь ясно, что площадь заштрихованной нами фигуры равна сумме половин площадей квадратов, построенных на катетах, и площади исходного треугольника. С другой стороны, она равна половине площади квадрата, построенного на гипотенузе, плюс площадь исходного треугольника. Последний шаг в доказательстве предоставляется читателю.



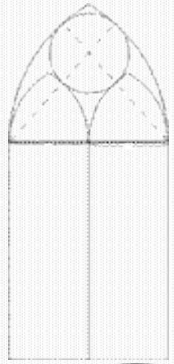
ПРИМЕНЕНИ

Многие при имени Пифагор вспоминают его теорему. Но неужели мы можем встречать эту теорему только в геометрии? Нет, конечно, нет! Теорема Пифагора встречается в разных областях наук. Например: в физике, астрономии, архитектуре и в других. Но так же Пифагор и его теорема воспеты в литературе.

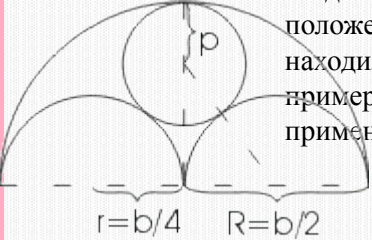
В настоящее время всеобщее признание получило то, что успех развития многих областей науки и техники зависит от развития различных направлений математики. Важным условием повышения эффективности производства является широкое внедрение математических методов в технику и народное хозяйство, что предполагает создание новых, эффективных методов качественного и количественного исследования, которые позволяют решать задачи, выдвигаемые практикой. Рассмотрим несколько элементарных примеров таких задач, в которых при решении применяется теорема Пифагора.



СТРОИТЕЛЬСТВО



Окно: в зданиях готического и романского стиля верхние части окон расчленяются каменными ребрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. На рисунке представлен простой пример такого окна в готическом стиле. Способ построения его очень прост: Из рисунка легко найти центры шести дуг окружностей, радиусы которых равны ширине окна (b) для наружных дуг и половине ширины ($b/2$), для внутренних дуг. Остается еще полная окружность, касающаяся четырех дуг. Так как она заключена между двумя concentрическими окружностями, то ее диаметр равен расстоянию между этими окружностями, т. е. $b/2$ и, следовательно, радиус равен $b/4$. А тогда становится ясным и положение ее центра. В рассмотренном примере радиусы находились без всяких затруднений. В других аналогичных примерах могут потребоваться вычисления; покажем, как применяется в таких задачах теорема Пифагора.



В романской архитектуре часто встречается мотив, представленный на рисунке. Если b по-прежнему обозначает ширину окна, то радиусы полуокружностей будут равны $R = b/2$ и $r = b/4$. Радиус p внутренней окружности можно вычислить из прямоугольного треугольника, изображенного на рис. пунктиром. Гипотенуза этого треугольника, проходящая через точку касания окружностей, равна $b/4 + p$, один катет равен $b/4$, а другой $b/2 - p$.

По теореме Пифагора имеем:

$$(b/4 + p)^2 = (b/4)^2 + (b/2 - p)^2$$

или

$$b/16 + b \cdot p/2 + p^2 = b/16 + b/4 \cdot b \cdot p/2 + p^2,$$

откуда

$$b \cdot p/2 = b/4 \cdot b \cdot p/2.$$

Разделив на b и приводя подобные члены, получим:

$$(3/2) \cdot p = b/4, p = b/6.$$

Крыша: в доме задумано построить двускатную крышу (форма в сечении). Какой длины должны быть стропила, если изготовлены балки $AC=8$ м, и $AB=BF$.

Решение:

Треугольник ADC - равнобедренный $AB=BC=4$ м, $BF=4$ м. Если предположить, что $FD=1,5$ м, тогда:

А) Из треугольника DBC : $DB=2,5$ м

$$D) \text{ Из треугольника } ADF: \sqrt{6,25} = \sqrt{22,25} \approx 4,7$$

$$AF = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \approx 5,7$$

Молниеотвод: защищает от молнии все предметы, расстояние до которых от его основания не превышает его удвоенной высоты. *Определить оптимальное положение молниеотвода на двускатной крыше, обеспечивающее наименьшую его доступную высоту.*

Решение:

По теореме Пифагора $h^2 \geq a^2 + b^2$, значит $h \geq (a^2 + b^2)^{1/2}$.

Ответ: $h \geq (a^2 + b^2)^{1/2}$

МОБИЛЬНАЯ СВЯЗЬ

В настоящее время на рынке мобильной связи идет большая конкуренция среди операторов. Чем надежнее связь, чем больше зона покрытия, тем больше потребителей у оператора. При строительстве вышки (антенны) часто приходится решать задачу: *какую наибольшую высоту должна иметь антенна, чтобы передачу можно было принимать в определенном радиусе (например радиусе $R=200$ км?, если известно, что радиус Земли равен 6380 км.)*

Решение:

Пусть $AB = x$, $BC = R = 200$ км, $OC = r = 6380$ км.

$$OB = OA + AB$$

$$OB = r + x$$

Используя теорему Пифагора, получим ответ.

Ответ: 2,3 км.



С глубокой древности математики находят все новые и новые доказательства теоремы Пифагора, все новые и новые замыслы ее доказательств. Таких доказательств — более или менее строгих, более или менее наглядных — известно более полутора сотен (по другим источникам, более пятисот), но стремление к преумножению их числа сохранилось. Поэтому теорема Пифагора занесена в «Книгу рекордов Гиннеса».

Самостоятельное «открытие» доказательства теоремы Пифагора будет полезно и современным школьникам.



ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ:

1) www.math.com

2) www.yandex.ru

3) www.coogle.ru

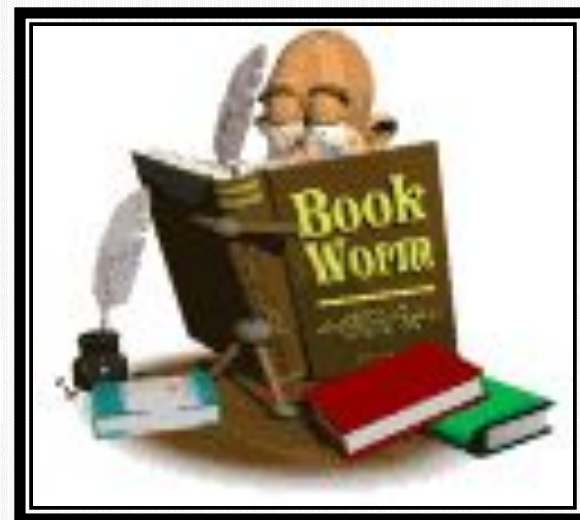
4) А.Д.Александров и др. Геометрия 7-9

5) Атанасян и др. Геометрия 7-9

6) И. Глейзер. История математики в школе.

7) В.Н.Руденко, Г. А. Бахурин Геометрия 7-9

8) В.Д.Чистяков. Старинные задачи по элементарной математике



АВТОРЫ

*Ученица 8 «а» класса
Сухарева Анна*

*Ученица 8 «а» класса
Баландина Виктория*

