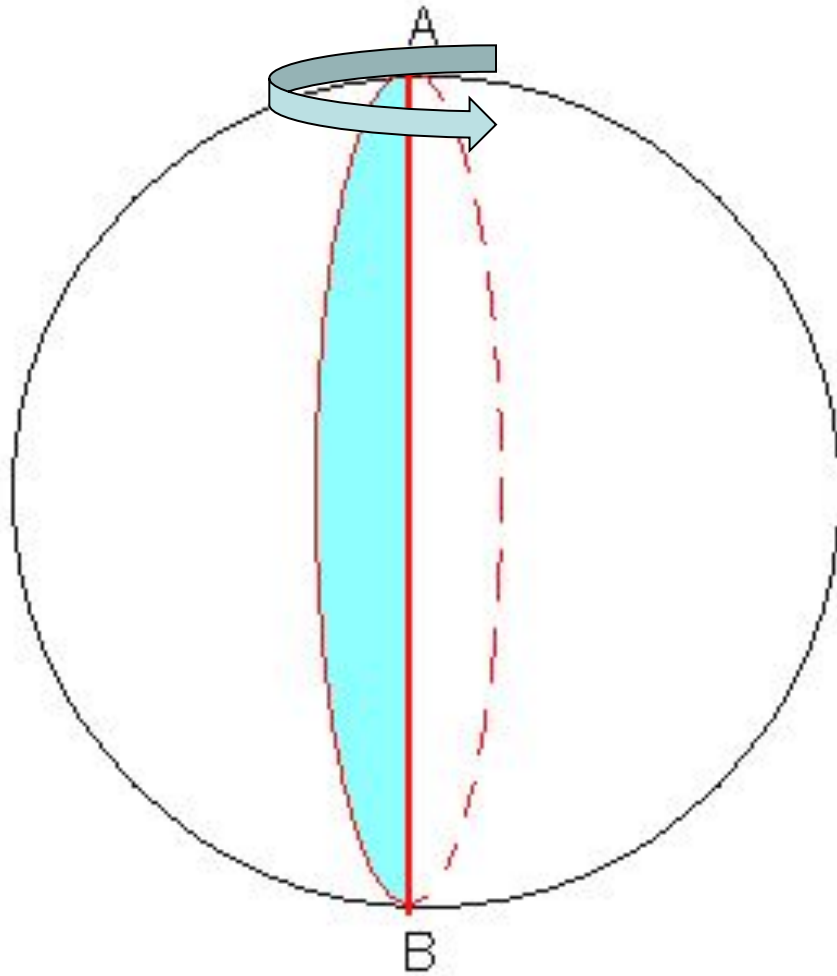


СФЕРА УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

1. Понятие сферы и её элементов
2. Уравнение сферы в заданной системе координат



Тело вращения - сфера

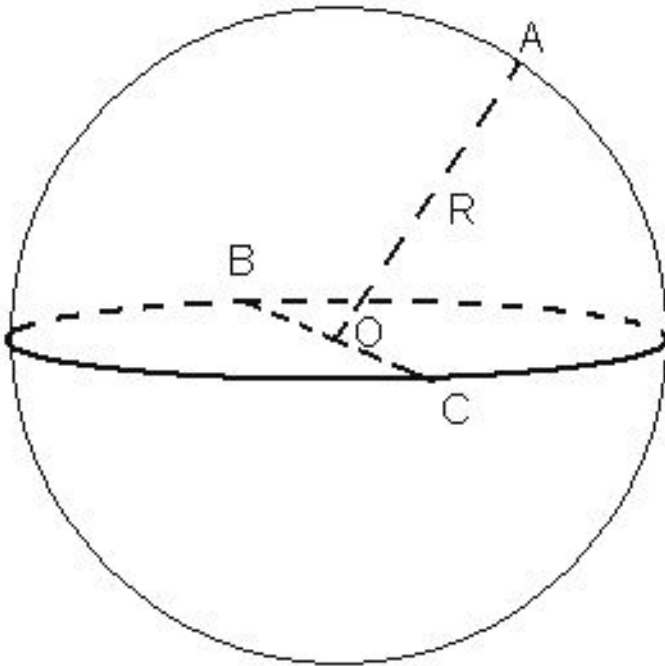


Определение сферы

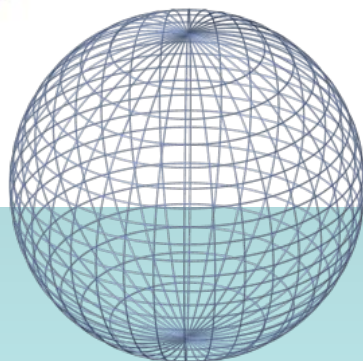
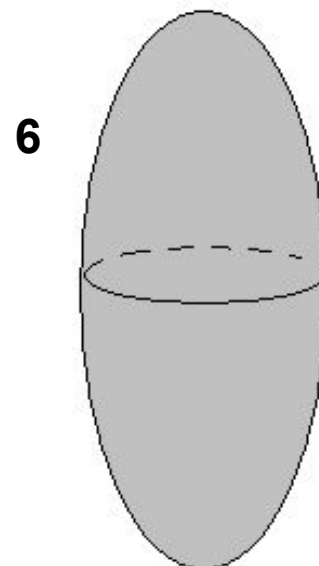
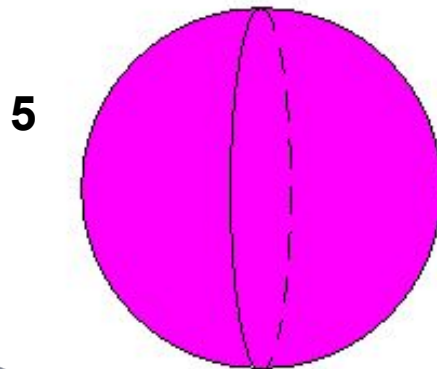
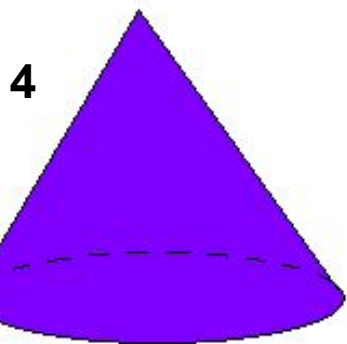
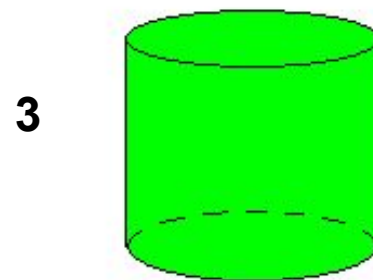
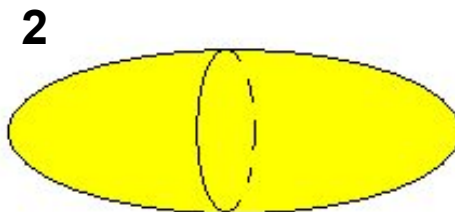
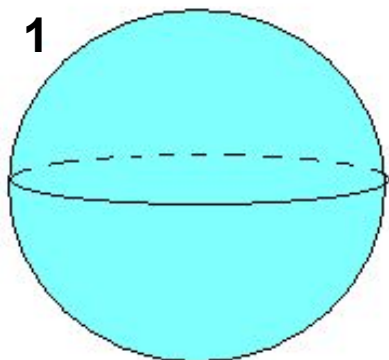
- Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Элементы сферы

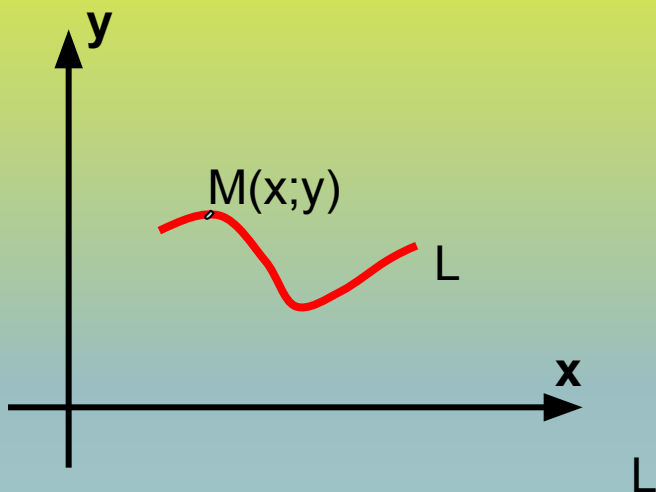
- т.О - центр сферы
- ОА – радиус сферы.
- Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы называется радиусом сферы.
- ВС – диаметр сферы.
- Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы
- $d=2r$



? Какие из тел, изображенных на рисунках, являются сферой?



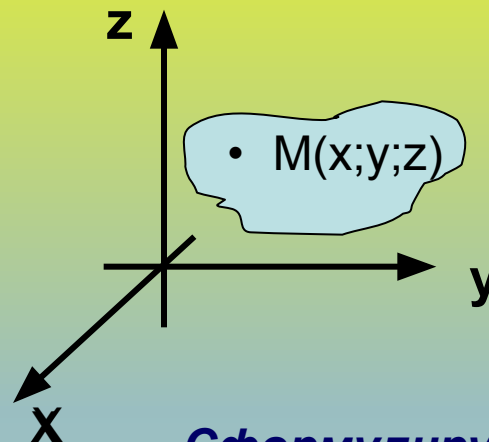
На плоскости



**Сформулируйте
определение линии L на
плоскости**

Уравнение с двумя переменными x и y
называется уравнением линии L , если
этому уравнению удовлетворяют
координаты любой точки линии L и не
удовлетворяют координаты никакой точки,
не лежащей на этой линии

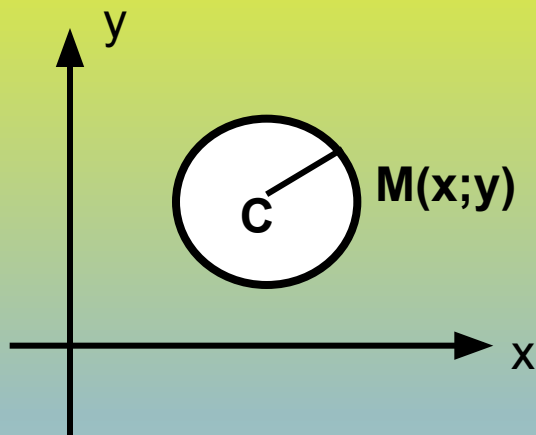
В пространстве



**Сформулируйте
определение уравнения
поверхности в
пространстве**

Уравнение с тремя переменными x, y, z
называется уравнением поверхности,
если этому уравнению удовлетворяют
координаты любой точки поверхности
и не удовлетворяют координаты
никакой точки, не лежащей на этой
поверхности

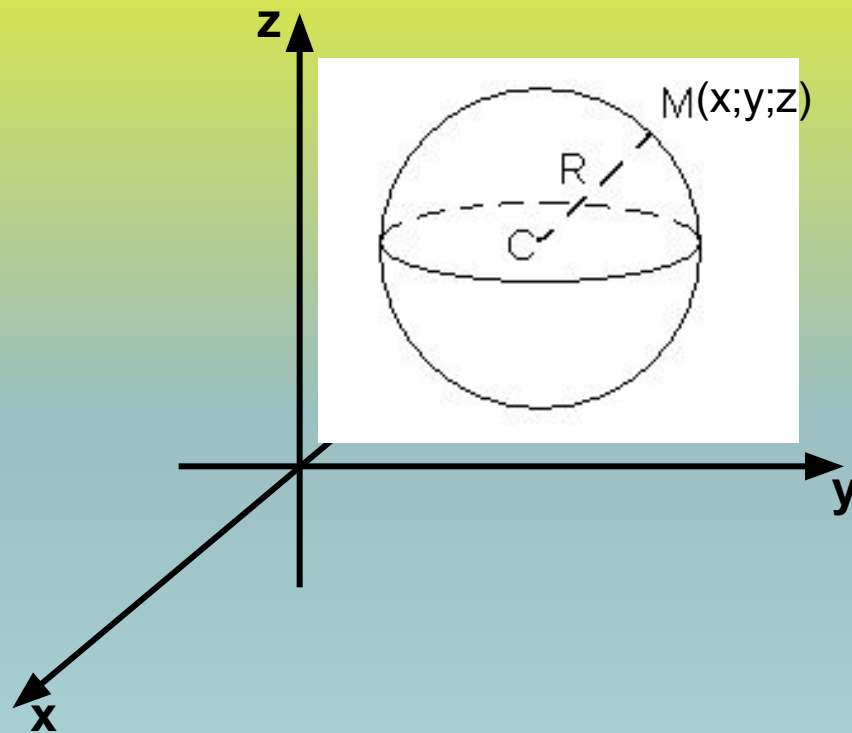
На плоскости



$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

В пространстве

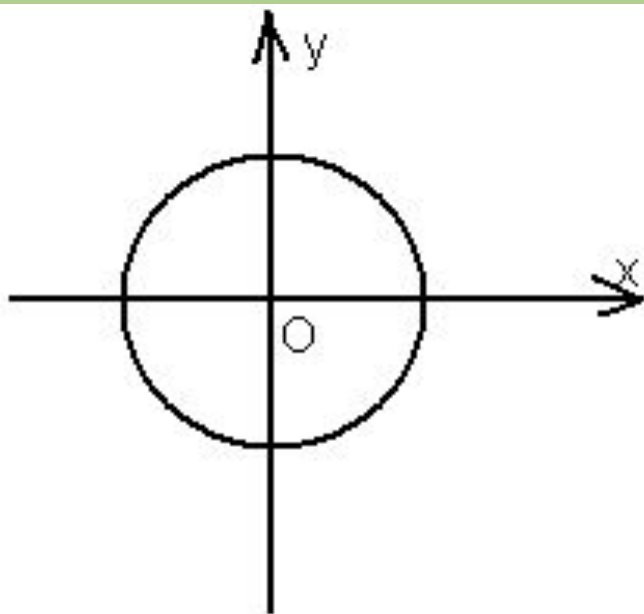


$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

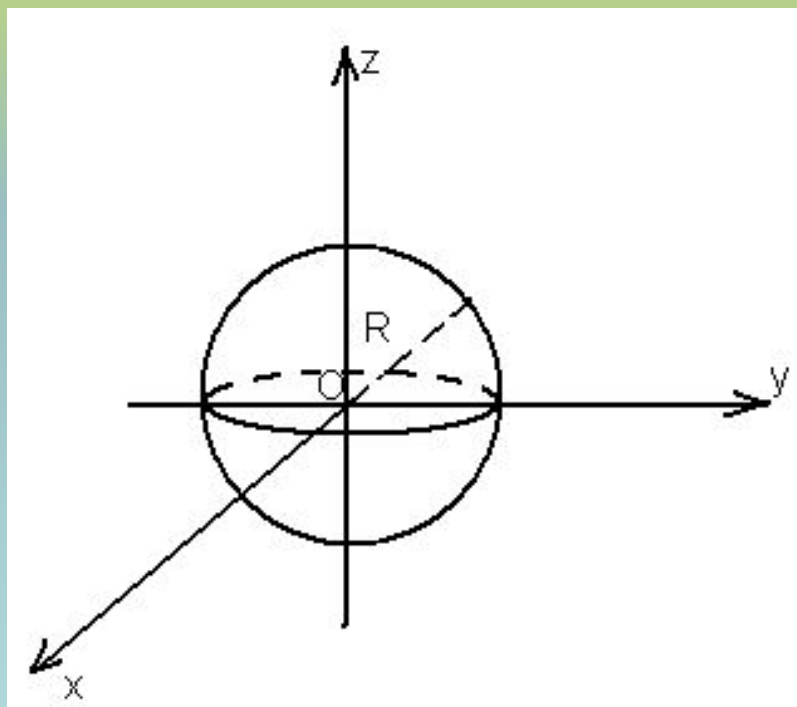
Частные случаи

- 1. Уравнение окружности с центром в т.О(0;0) и радиусом r



$$x^2 + y^2 = r^2$$

- 1. Уравнение сферы с центром в т.О(0;0;0) и радиусом R



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Выбрать из предложенных уравнений – уравнение сферы:

- 1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
- 2. $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 2^2$
- 3. $2x + 3y = 6$
- 4. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+8)^2 = 9$
- 5. $2x^2 - 5x + 3 = 0$
- 6. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
- 7. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = 9$
- 8. $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$
- 1. Ур-е окружности
- 2. Ур-е сферы
- 3. Ур-е прямой
- 4. Ур-е сферы
- 5. Ур-е параболы
- 6. Ур-е сферы
- 7. Ур-е сферы
- 8. ?

В данных уравнениях определите
координаты центра сферы и
радиус

- 1. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9$
- 2. $(x - 6)^2 + (y + 0,5)^2 + z^2 = 5$
- 3. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 6$
- 4. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$

*Составьте уравнение сферы по
следующим данным центра и радиуса
сферы:*

1. Дано: $C(-2;8;1)$; $R=11$

2. Дано: $A(3;-2;0)$; $R=0,7$

3. Дано: $O(0;0;0)$; $R=1$

Проверяем ответы:

$$(x + 2)^2 + (y - 8)^2 + (z - 1)^2 = 121$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 0,49$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Задача

- Определить принадлежит ли т.А сфере, заданной уравнением

$$(x-3)^2 + (y+7)^2 + (z-5)^2 = 30$$

если: а) т.А(5;-2;6)

б) т.А(-5;2;6)

Решение:

$$(5-3)^2 + (-2+7)^2 + (6-5)^2 = 30$$

Равенство **верное**,
следовательно А(5;-2;6)
принадлежит сфере

$$(-5-3)^2 + (2+7)^2 + (6-5)^2 = 30$$

Равенство **неверное**,
следовательно А(5;-2;6)
не принадлежит сфере

Уравнение плоскости и прямой



Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где A, B, C, D – числовые
коэффициенты

Особые случаи уравнения:

$$\square D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$$

плоскость проходит через начало координат.

$$\square A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$$

плоскость параллельна оси Ox .

$$\square B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$$

плоскость параллельна оси Oy .

$$\square C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$$

плоскость параллельна оси Oz .

Особые случаи уравнения:

$$\square A = B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0$$

плоскость параллельна плоскости Oxy .

$$\square A = C = 0 \Rightarrow By + D = 0$$

плоскость параллельна плоскости Oxz .

$$\square B = C = 0 \Rightarrow Ax + D = 0$$

плоскость параллельна плоскости Oyz .

Особые случаи уравнения:

$$\square A = D = 0 \Rightarrow By + Cz = 0$$

плоскость проходит через ось Ox .

$$\square B = D = 0 \Rightarrow Ax + Cz = 0$$

плоскость параллельна оси Oy .

$$\square C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$$

плоскость параллельна оси Oz .

Уравнения координатных плоскостей

$x = 0$, плоскость Oyz

$y = 0$, плоскость Oxz

$z = 0$, плоскость Oxy

Две плоскости в пространстве:

$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

□ совпадают, если существует такое число k , что

$$\begin{cases} A_1 = kA_2 \\ B_1 = kB_2 \\ C_1 = kC_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

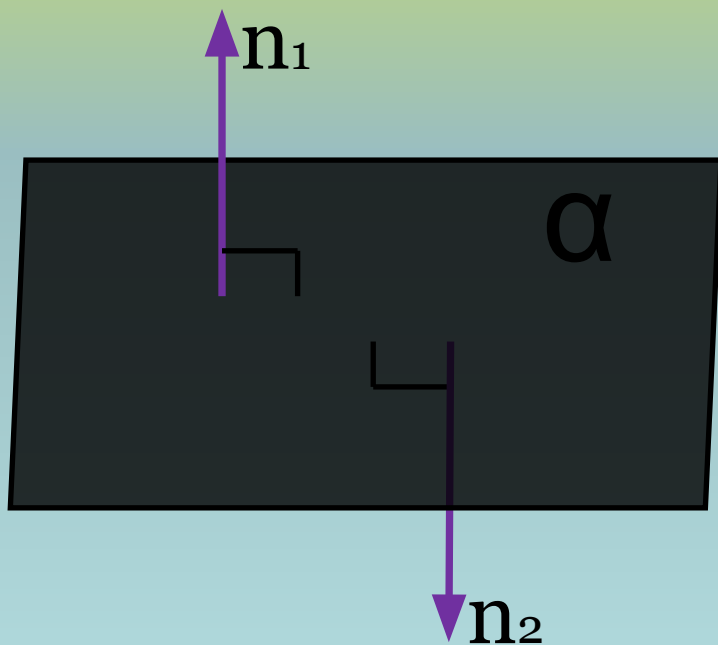
$$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

□ параллельны, если существует такое число k , что

$$\begin{cases} A_1 = kA_2 \\ B_1 = kB_2 \\ C_1 = kC_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

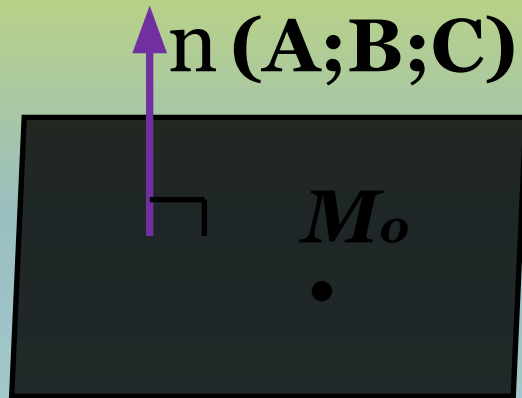
□ В остальных случаях плоскости пересекаются.

Алгоритм составления уравнения плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору



Итак, пусть α произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор называется **вектором нормали** к этой плоскости.

Алгоритм составления уравнения плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору



$M_0 (x_0; y_0; z_0)$

Если известна какая-нибудь точка плоскости M_0 и какой-нибудь вектор нормали к ней, то через заданную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору. Общее уравнение плоскости будет иметь вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Чтобы получить **уравнение плоскости**, имеющее приведённый вид, возьмём на плоскости произвольную **точку** $M(x;y;z)$. Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда **вектор перпендикулярен вектору** (рис), а для этого, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов было равно нулю, т.е.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

Вектор задан по условию. Координаты вектора найдём по формуле :

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

Теперь, используя формулу скалярного произведения векторов , выразим скалярное произведение в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -3; 1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(5; 1; -4)$.

Решение: Используем формулу

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\text{Ответ: } 5x + y - 4z - 3 = 0$$

Уравнение прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

задающих пару пересекающихся плоскостей.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

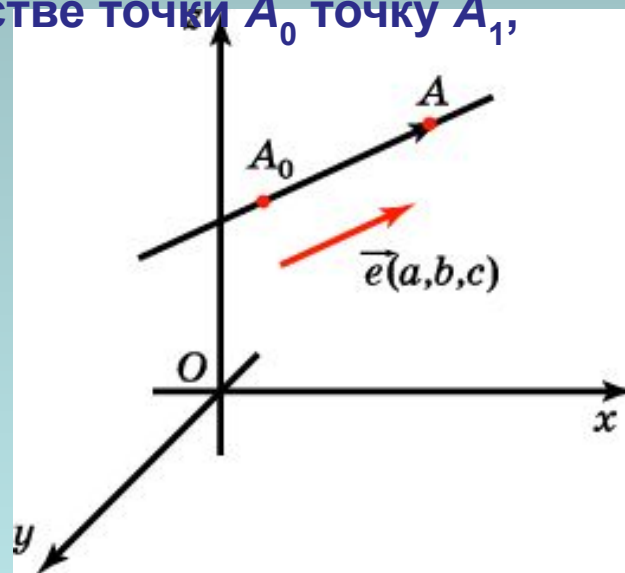
Уравнение прямой в пространстве

Прямую, проходящую через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором (a, b, c) можно задавать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

В случае, если прямая в пространстве задается двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1 , получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$



Упражнение 1

Какими уравнениями задаются координатные прямые?

Ответ: Ось Ox $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ Ось Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0; \end{cases}$ Ось Oz $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$

Упражнение 2

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, -2, 3)$ с направляющим вектором, имеющим координаты $(2, 3, -1)$.

Ответ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Упражнение 3

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2,1,-3)$, $A_2(5,4,6)$.

Ответ:

$$\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$$

Упражнение 4

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1,2,-3)$ и перпендикулярную плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

Ответ:
$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

Упражнение 5

В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_1 t + x_1, \\ y = b_1 t + y_1, \\ z = c_1 t + z_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a_2 t + x_2, \\ y = b_2 t + y_2, \\ z = c_2 t + z_2 \end{cases}$$

определяют перпендикулярные прямые?

Ответ: Если выполняется равенство $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.