

Повторительно-обобщающий урок по теме «Решение тригонометрических неравенств и их систем»

Цели урока:

- **Образовательные:**

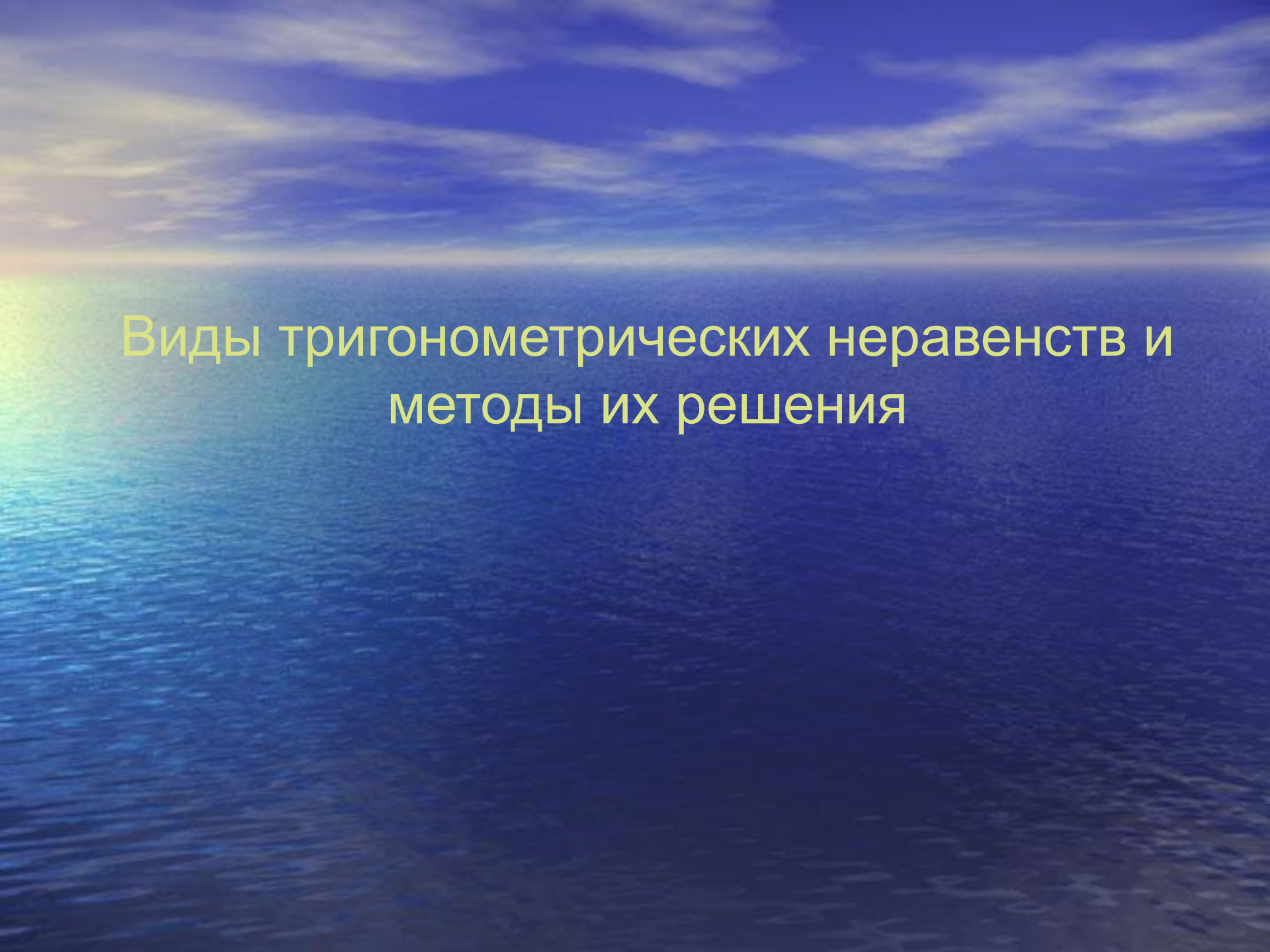
- * Обобщить и систематизировать знания учащихся о различных видах тригонометрических неравенств и их систем, способах их решения.
- * Обогащать и углубить знания учащихся применением тригонометрических неравенств и их систем в нестандартных ситуациях.
- * Провести диагностику усвоения системы знаний и умений и её применения для выполнения практических заданий стандартного уровня с переходом на более высокий уровень.

- **Развивательные:**

- * Способствовать развитию умения анализировать, наблюдать и делать выводы.

- **Воспитательные:**

- * Выработать самооценку в выборе пути, критерии оценки своей работы и работы товарища.
- * Повысить интерес учащихся к нестандартным задачам, сформировать у них положительный мотив учения.



Виды тригонометрических неравенств и методы их решения

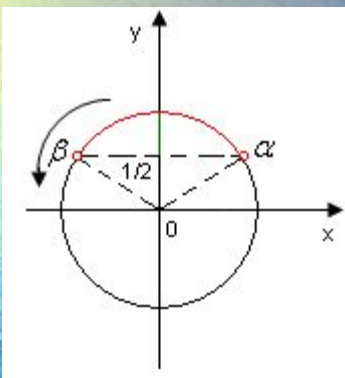
I. Простейшие тригонометрические неравенства (неравенства вида $\sin x > (<) a$, $\cos x > (<) a$, $\operatorname{tg} x > (<) a$, $\operatorname{ctg} x > (<) a$)

Алгоритм решения неравенств с помощью единичной окружности.

Пример. $\sin x \geq 1/2$

1. Заменить неравенство уравнением (устно) и отметить на единичной окружности точки,

соответствующие



отметить на единичной окружности точки, соответствующие неравенству (выделить

соответствующую дугу).

показать направление отсчёта (на выделенной дуге – в положительном направлении, т. е. против

часовой стрелки).

2. Найти начало дуги и угол, ему соответствующий (меньший угол).

3. Найти конец дуги и угол, ему соответствующий (большой угол).

6. Записать ответ в виде двойного неравенства с учётом периодичности функции (слева – угол, соответствующий началу дуги).

7. Записать ответ в виде промежутка.

α - начало дуги,

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad \beta - \text{конец дуги,}$$

$$\beta = \pi - \arcsin \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

С учётом периодичности:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

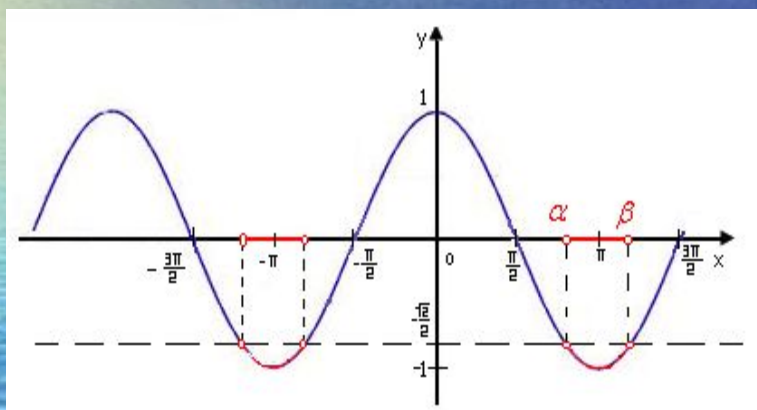
$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Алгоритм решения неравенств графическим способом

Пример:

$$\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = \frac{5\pi}{4}$$



неравенство уравнением и $f(x)$, где

функций, и $y=a$.

точки пересечения графиков абсциссы

ту часть графика, которая ству.

$f(x)$ – одна из

этих точек.

котором выполняется заданное неравенство.

5. Записать ответ в виде двойного неравенства (слева-меньший угол) с учётом периодичности функции.

6. Записать ответ в виде промежутка.

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

II. Неравенства, приводимые к простейшим

1. С помощью введения нового неизвестного $t = ax + b$

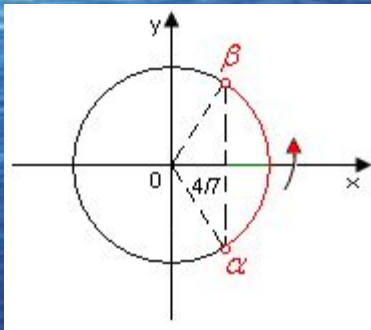
Суть метода: введя новую переменную $t = ax + b$, привести неравенство к простейшему виду. Решить полученное неравенство для переменной t . Затем вернуться к переменной x и найти её значение. Записать ответ в виде промежутка.

Пример: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) > \frac{4}{7}$.

Решение:

Учитывая, что функция $f(x)$ - чётная, запишем неравенство в виде: $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{4}{7}$.

Пусть $4x - \frac{\pi}{3} = t$, тогда неравенство примет вид $\cos t > \frac{4}{7}$.



$$\alpha = -\arccos \frac{4}{7}; \beta = \arccos \frac{4}{7}$$

$$-\arccos \frac{4}{7} + 2\pi n < t < \arccos \frac{4}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\arccos \frac{4}{7} + 2\pi n < 4x - \frac{\pi}{3} < \arccos \frac{4}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{4}{7} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{3} + \arccos \frac{4}{7} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{7} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{7} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{7} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \arccos \frac{4}{7} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

2. С помощью основных тригонометрических формул.

Суть метода: используя основные тригонометрические формулы, приводим неравенство к простейшему виду. Далее применяем алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств.

Пример: $\sin^4 x + \cos^4 x \leq \frac{5}{8}.$

Решение.

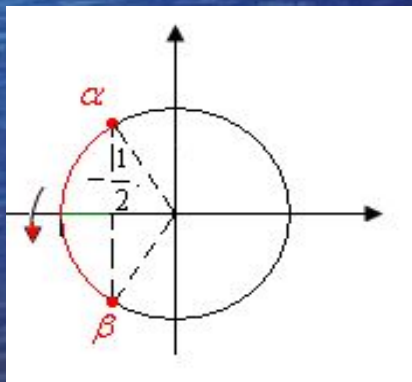
Преобразуем левую часть неравенства к виду: $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \leq \frac{5}{8}$

Используем формулу понижения степени $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$:

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} \geq \frac{3}{4}; 2(1 - \cos 4x) \geq 3; 1 - \cos 4x \geq \frac{3}{2}; \cos 4x \leq -\frac{1}{2}.$$

Пусть $4x = t$, тогда неравенство примет вид:

$$\cos t \leq -\frac{1}{2}.$$



$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}; \beta = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 4x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} \right], n \in \mathbb{Z}.$$

3.С помощью введения вспомогательного угла.

(неравенства вида $A \sin x + B \cos x > C$, $A \sin^2 x + B \cos^2 x > C$, где A, B, C — данные числа и $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$).

Общий метод: Пусть дано неравенство $A \sin x + B \cos x > C$. (1) Разделим обе части неравенства на

$\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$ ($A^2 + B^2 > 0$), тогда (1) примет вид:

$$a \sin x + b \cos x > c \quad (2), \text{ где } a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Т.к. $a^2 + b^2 = 1$, то можно подобрать такой угол α , что $a = \sin \alpha$ и $b = \cos \alpha$. Тогда

неравенство (2) можно записать в виде $\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha > c$ или $\cos(x - \alpha) > c$ (3).

Если же подобрать такой угол β , что $a = \cos \beta$ и $b = \sin \beta$, то неравенство (2) можно записать в виде $\sin(x + \beta) > c$ (4).

Таким образом, решение неравенства (1) сводится к решению простейшего неравенства (3) или (4).

Пример: $2 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x > \sqrt{2} + 1.$

Решение:

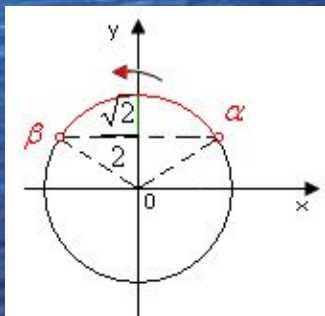
Преобразуем левую часть неравенства: $2 \sin^2 x - 1 + 2\sqrt{3} \sin x \cos x > \sqrt{2}.$

Используем формулы $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, тогда $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x > \sqrt{2}.$

Разделим обе части неравенства на $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, получим $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Так как $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} > \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Пусть $2x - \frac{\pi}{6} = t$, тогда $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}.$



$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \beta = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

—

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{5\pi}{12} + 2\pi n < 2x < \frac{11\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{5\pi}{24} + \pi n < x < \frac{11\pi}{24} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{24} + \pi n; \frac{11\pi}{24} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

III. Неравенства, решаемые заменой переменной

1. Приводимые к квадратным или рациональным заменой $t=f(x)$, где $f(x)$ - одна из тригонометрических функций.

Пример: $11\sin x + \cos 2x \leq 6$.

Решение.

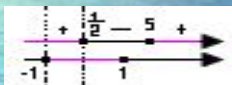
Преобразуем данное неравенство: $11\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 6 \leq 0$;

$$-2\sin^2 x + 11\sin x - 5 \leq 0;$$

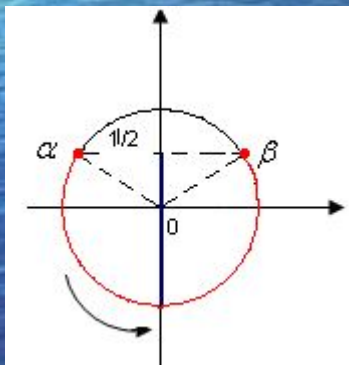
$$2\sin^2 x - 11\sin x + 5 \geq 0.$$

Пусть $\sin x = t$; $t \in [-1; 1]$, тогда неравенство примет вид: $2t^2 - 11t + 5 \geq 0$.

Решим данное неравенство: $2t^2 - 11t + 5 = 0$; $D = 81$; $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = 5$.



$$-1 \leq t \leq \frac{1}{2}; \quad -1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}; \Rightarrow \sin x \leq \frac{1}{2}.$$



$$\alpha = -\pi - \arcsin \frac{1}{2} = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}; \beta = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

2. Неравенства, решаемые введением новой переменной $t = \sin x + \cos x$.

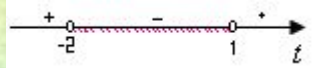
Рассмотрим неравенства, в которые входят выражения $\sin x + \cos x$ и $\sin 2x$. Их удобно решать при помощи замены неизвестного $t = \sin x + \cos x$, так как при этом

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = t^2 - 1.$$

Пример 1. $2 \sin x \cos x + \sin x + \cos x < 1$. **Решение.**
 Пусть $t = \sin x + \cos x$, тогда $2 \sin x \cos x = t^2 - 1$. В результате неравенство примет вид

$$t^2 + t - 2 < 0; t_1 = -2; t_2 = 1.$$

$$t^2 - 1 + t < 1 \text{ или } t^2 + t - 2 < 0.$$



$$-2 < t < 1$$

Разделим обе части неравенства на $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ получим:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$-\sqrt{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

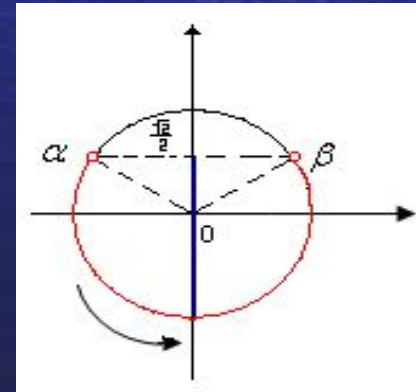
Пусть $x + \frac{\pi}{4} = a$, тогда неравенство примет вид

$$\sin a < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\alpha = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{4};$$

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < a < \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$$



Ответ: $\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

IV. Неравенства, решаемые методом интервалов.

Алгоритм решения тригонометрических неравенств методом интервалов.

1. С помощью преобразований привести неравенство к виду $f(t) > 0$ ($f(t) < 0$) (если это необходимо).
2. Найти основной период T функции f (T равен НОК периодов, входящих в неравенство тригонометрических функций).
3. Найти нули функции $f(t)$ на промежутке $[0; T]$, решив уравнение $f(t) = 0$.
4. Найти точки разрыва функции $f(t)$ на этом промежутке.
5. Найденными точками разделить отрезок $[0; T]$ на части, в каждой из которых функция $f(t)$ имеет постоянный знак.
6. Определить знак функции в каждой части методом пробных точек (результат удобно оформить в виде таблицы).
7. Выбрать те части, в которых выполняется исходное неравенство.
8. Учитывая периодичность функции, записать решение исходного неравенства.

Пример:

$$\frac{2 \sin x + 1}{2 \cos \frac{x}{2} - 1} \geq 0.$$

Решение.

1. $f(x) = \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos \frac{x}{2} - 1}.$

2. $T(f) = 4\pi$

3. Найдём нули функции на промежутке $[0; 4\pi]$

$$f(x) = 0; \quad 2 \sin x + 1 = 0; \quad 2 \sin x = -1; \quad \sin x = -\frac{1}{2}; \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Выберем из данной серии решений те значения x , которые принадлежат $[0; 4\pi]$.

$$n = 0; x = -\frac{\pi}{6} \notin [0; 4\pi];$$

$$n = 1; x = \frac{7\pi}{6} \in [0; 4\pi];$$

$$n = 2; x = \frac{11\pi}{6} \in [0; 4\pi];$$

$$n = 3; x = \frac{19\pi}{6} \in [0; 4\pi];$$

$$n = 4; x = \frac{23\pi}{6} \in [0; 4\pi];$$

$$n = 5; x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \notin [0; 4\pi];$$

Итак, $x = \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6} \in [0; 4\pi].$

4. Найдём точки разрыва функции на промежутке $[0; 4\pi]$

$$2 \cos \frac{x}{2} - 1 = 0; \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}; \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Выберем из данной серии значения x , принадлежащие промежутку $[0; 4\pi]$

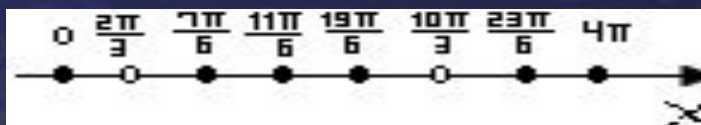
$$n = 0; x = -\frac{2\pi}{3} \notin [0; 4\pi]; x = \frac{2\pi}{3} \in [0; 4\pi];$$

$$n = 1; x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3} \in [0; 4\pi]; x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3} \notin [0; 4\pi];$$

$$n = 2; x = -\frac{2\pi}{3} + 8\pi = \frac{22\pi}{3} \notin [0; 4\pi]; x = \frac{2\pi}{3} + 8\pi = \frac{26\pi}{3} \notin [0; 4\pi];$$

Итак, $x = \frac{2\pi}{3}; \frac{10\pi}{3} \in [0; 4\pi].$

5.



6. Определим знак функции в каждой части методом пробных точек.

	$\left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$	$\left[\frac{11\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{19\pi}{6}; \frac{10\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{10\pi}{3}; \frac{23\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{23\pi}{6}; 4\pi\right)$
$2\sin x + 1$	+	+	-	+	-	-	+
$2\cos \frac{x}{2} - 1$	+	-	-	-	-	+	+
левая часть	+	-	+	-	+	-	+

7. Неравенство выполняется при $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right) \cup \left[\frac{19\pi}{6}; \frac{10\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{23\pi}{6}; 4\pi\right).$

8. Учитывая периодичность функции, запишем ответ:

$$x \in \left[4\pi k; \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 4\pi k; \frac{11\pi}{6} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{19\pi}{6} + 4\pi k; \frac{10\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left[\frac{23\pi}{6} + 4\pi k; 4\pi + 4\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

V. Системы тригонометрических неравенств.

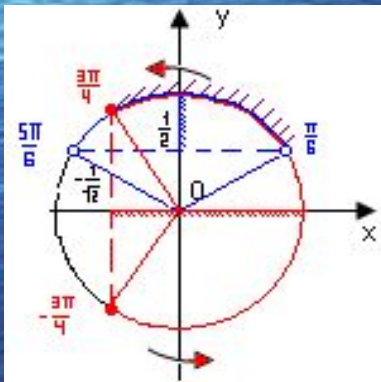
Алгоритм решения систем неравенств:

1. Отметить на окружности решение первого неравенства системы.
2. Отметить решение второго неравенства системы.
3. Выделить общее решение системы (пересечение дуг).
4. Записать общее решение системы неравенств.

Пример:

$$\begin{cases} \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение.



$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

VI. Использование тригонометрических неравенств для нахождения области определения функции.

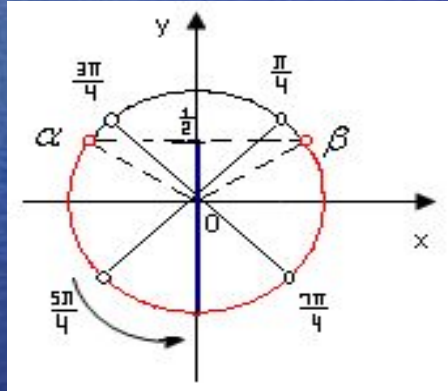
Пример: $y = \operatorname{tg} 2x - \frac{1}{\sqrt{1-2\sin x}}$.

Решение.

Область определения функции находим из условий:

$$1) 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, m.e. \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 1 - 2 \sin x > 0; \sin x < \frac{1}{2}.$$



$$\alpha = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}; \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Тогда $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \cap \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right) \cap \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \cap \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right) \cap \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

VII. Неравенства смешанного типа.

Пример:

$$2^{4\cos^2 x + 2(\sqrt{2}-1)\cos x} < 2^{\sqrt{2}}.$$

Решение.

$$2^{4\cos^2 x + 2(\sqrt{2}-1)\cos x} < 2^{\sqrt{2}},$$

$$\text{откуда } 4\cos^2 x + 2(\sqrt{2}-1)\cos x < \sqrt{2}.$$

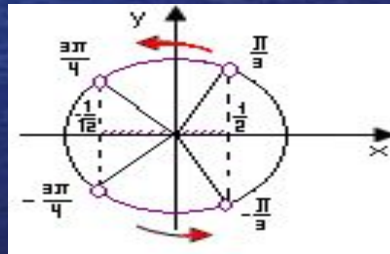
$$\text{Пусть } \cos x = t, t \in [-1; 1], \text{ тогда } 4t^2 + 2(\sqrt{2}-1)t - \sqrt{2} < 0;$$

$$4t^2 + 2(\sqrt{2}-1)t - \sqrt{2} = 0; D = 4(\sqrt{2}-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-\sqrt{2}) = 8 - 8\sqrt{2} + 4 + 16\sqrt{2} = 12 + 8\sqrt{2} = 4(3 + 2\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2}+1)^2;$$

$$t_1 = \frac{-2(\sqrt{2}-1) - 2(\sqrt{2}+1)}{8} = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; t_2 = \frac{-2(\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{2}+1)}{8} = \frac{1}{2}.$$



$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}.$$



$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$u - \frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$