



Способы доказательства теоремы Пифагора

Выполнили: студенты 05-407 группы

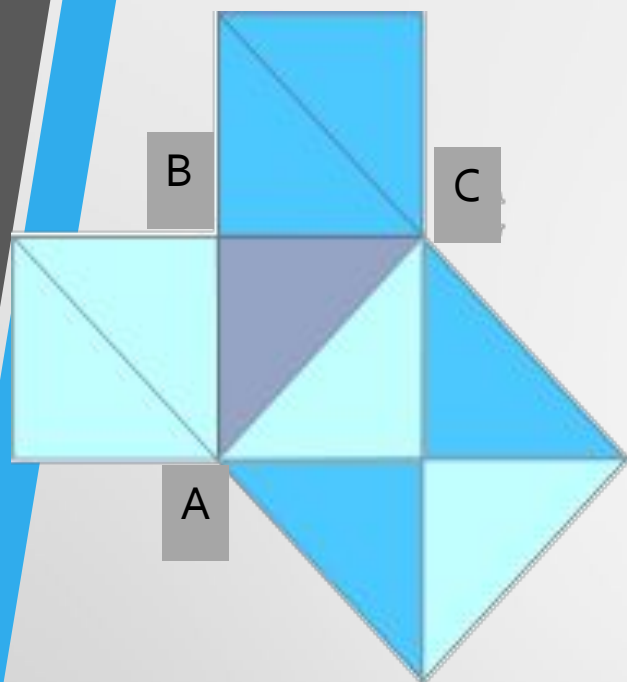
Гатауллин Табрис

Гатауллин Фанис

- На данный момент в научной литературе зафиксировано 367 доказательств данной теоремы. Вероятно, теорема Пифагора является единственной теоремой со столь внушительным числом доказательств. Такое многообразие можно объяснить лишь фундаментальным значением теоремы для геометрии.

- Все их можно разбить на малое число классов. Самые известные из них: доказательства методом площадей, аксиоматические.
- Теорему Пифагора также можно доказать с помощью векторов, комплексных чисел, дифференциальных уравнений, стереометрии, и даже физики: если, например, в аналогичные представленным на чертежах квадратные и треугольные объемы залить жидкость. Переливая жидкость, можно доказать равенство площадей и саму теорему в итоге.
- Среди знаменитых авторов доказательств можно вспомнить Леонардо да Винчи и двадцатого президента США Джеймса Гарфилда.

Простейшее доказательство

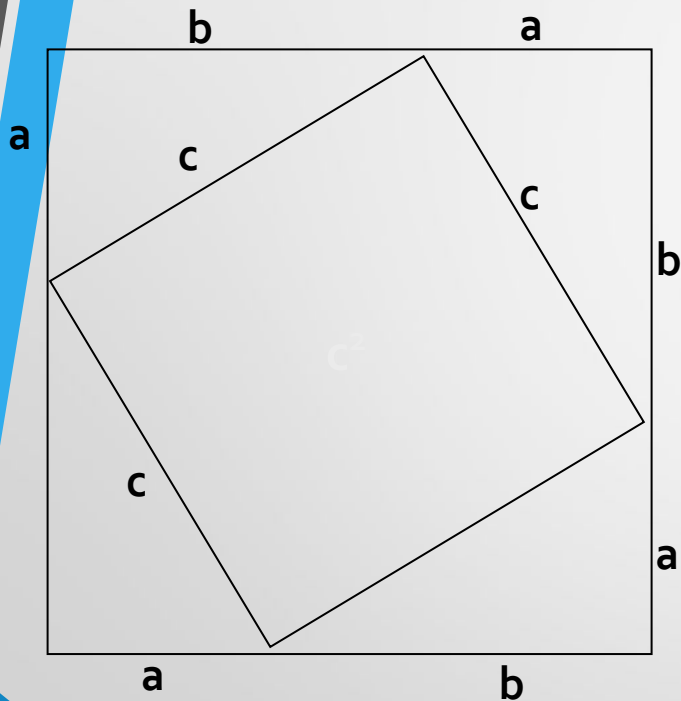


- Нужно задать идеальные условия: пусть треугольник будет не только прямоугольным, но и равнобедренным. Есть основания полагать, что именно такой треугольник первоначально рассматривали математики древности.

Достаточно просто посмотреть на мозайку равнобедренных прямоугольных треугольников , чтобы убедиться в справедливости теоремы.

Для треугольника ABC : квадрат, построенный на гипотенузе AC, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,- по два.

Алгебраический метод



- Находим площадь квадрата двумя способами:

$$S = 4 \frac{1}{2} ab + c^2$$

$$S = (a + b)^2$$

- Приравниваем, упрощаем и получаем:

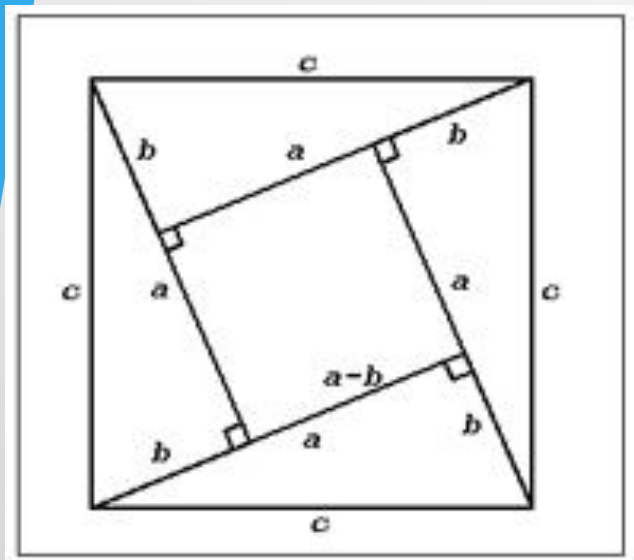
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Доказательство Бхаскара (древнеиндийское доказательство)



- **Бхаскара** (1114—1185) — крупнейший индийский математик и астроном XII века.
- Возглавлял астрономическую обсерваторию в Удджайне.
- Написал трактат «Сиддхантасиромани» («Венец учения»), состоящий из четырёх частей: «Лилавати» посвящена арифметике, «Биждаганита» — алгебре, «Голадхайя» — геометрии на сфере, «Гранхаганита» — теории планетных движений.

Доказательство Бхаскара (древнеиндийское доказательство)



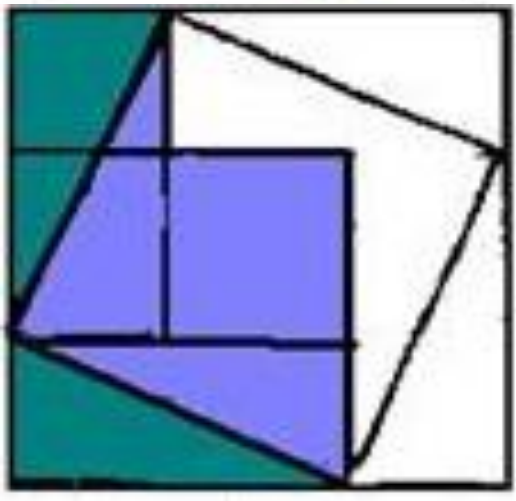
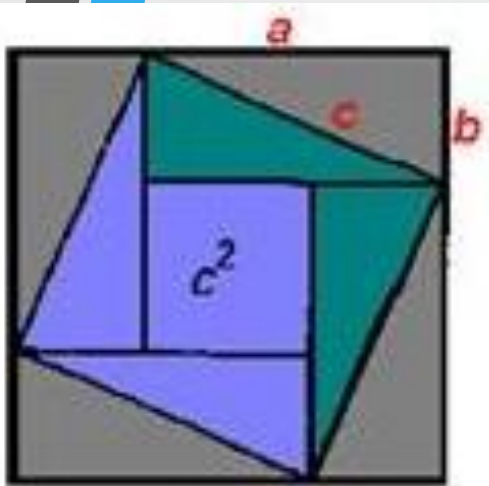
- Этот индийский математик в пояснении к рисунку написал только одну строчку: "Смотри!".
- Используем формулу площади квадрата $S = c^2$, чтобы вычислить площадь внешнего квадрата.

Посчитаем ту же величину, сложив площадь внутреннего квадрата и площади всех четырех прямоугольных треугольников:

$$S = (a - b)^2 + 4 \frac{1}{2} ab$$

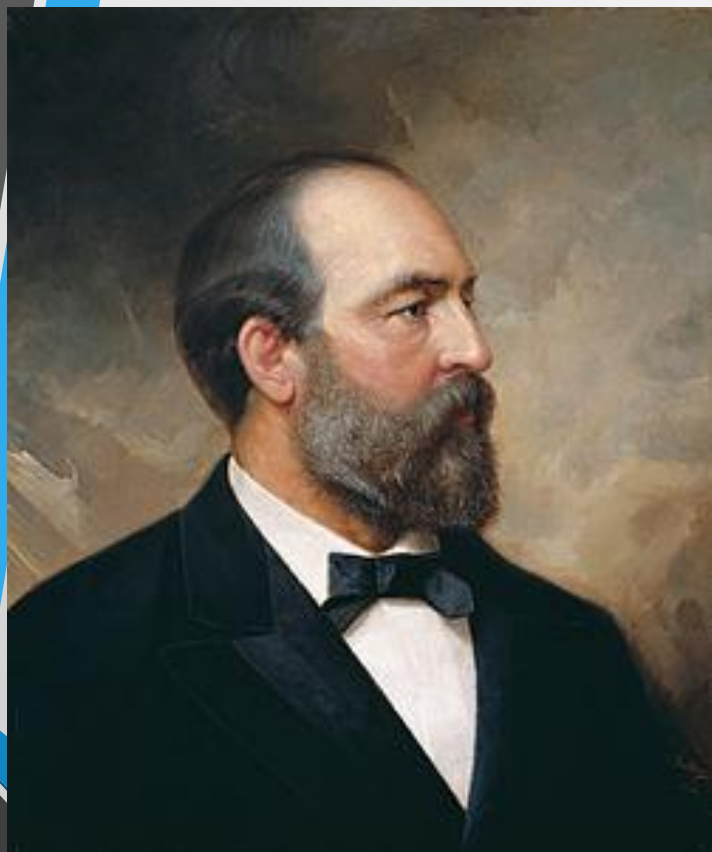
Приравняем обе части, упрощаем и в результате получим формулу теоремы Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

«Стул невесты» (древнекитайское доказательство)



- Если мысленно отрезать от чертежа на первом рисунке два зеленых прямоугольных треугольника, перенести их к противоположным сторонам квадрата со стороной c и гипотенузами приложить к гипотенузам сиреневых треугольников, получится фигура под названием «стул невесты».
- Вы убедитесь, что «стул невесты» образует два квадрата: маленький со стороной b и большой со стороной a .

Доказательство Гарфилда



- Джеймс Абрам Гарфилд (19.11.1831 — 19.09.1881) — 20-й президент США (март — сентябрь 1881), разносторонне одарённый самоучка, военачальник и активист Республиканской партии.
- Был тяжело ранен через три месяца после вступления в должность и умер через два с половиной месяца от последствий неудачного лечения.

Доказательство Гарфилда

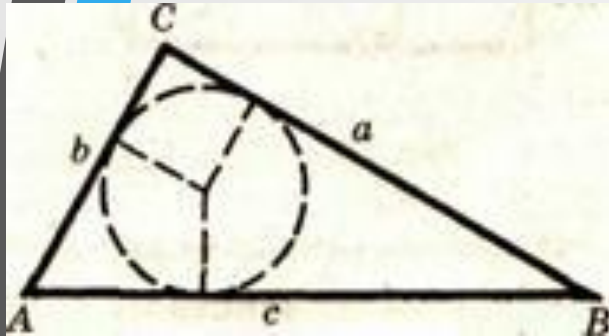
Пользуется тем, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, а площадь трапеции равна произведению полусуммы параллельных оснований на высоту. Чтобы доказать теорему, достаточно только выразить площадь трапеции двумя способами, приравнять полученные равенства и упростить:

$$S_{mp} = \frac{1}{2}(a + b)^2$$

$$S_{mp} = 2 \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} c^2$$



Доказательство Мёльманна



- Площадь данного прямоугольного треугольника, с одной стороны, равна $\frac{1}{2}ab$, с другой, $\frac{1}{2}pr$, где p - полупериметр треугольника, r - радиус вписанной в него окружности.

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}pr; \quad \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(a+b-c)$$

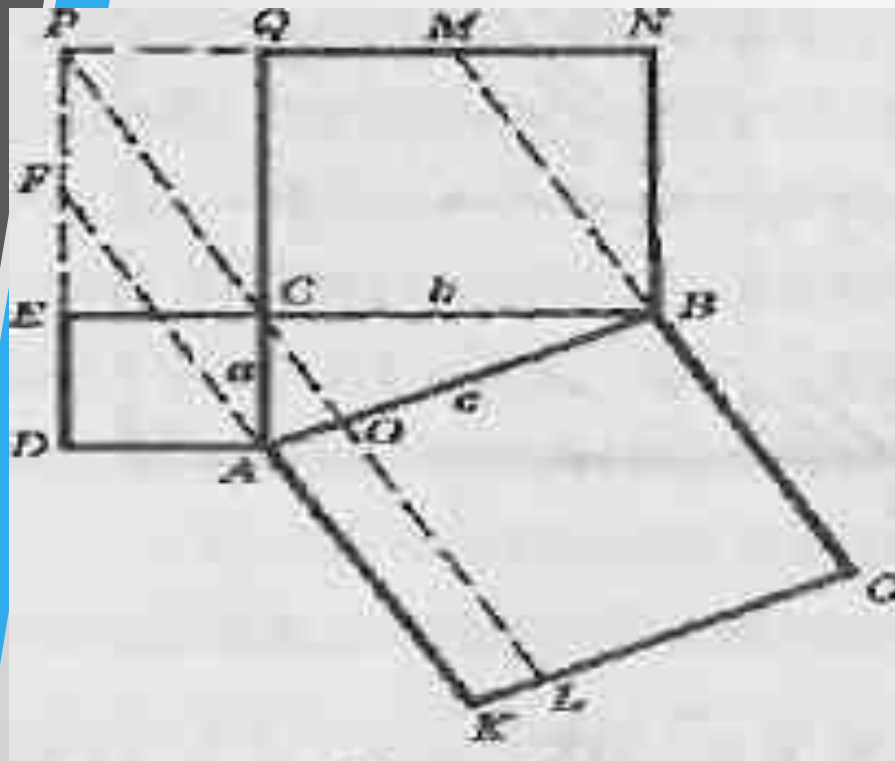
Откуда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$

Доказательство Насир-эд-Дина



- Насир ад-Дин Аб́у Джафар Мухаммад ибн Мухаммад Туси (18.02.1201 — 26.06.1274) — персидский математик, механик и астроном XIII века, чрезвычайно разносторонний учёный, автор сочинений по философии, географии, музыке, оптике, медицине, минералогии.
- Был знатоком греческой науки, комментировал труды Евклида, Архимеда, Автолика, Феодосия, Менелая, Аполлония, Аристарха, Гипсикла, Птолемея.

Доказательство Насир-эд-Дина



$\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$

$$\triangle ABC : \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AO} \Rightarrow AO = \frac{AC^2}{AB} = \frac{a^2}{c}$$

$$S_{KLOA} = AO \cdot AK = \frac{a^2}{c} c = a^2$$

$ACPF$ – параллелограмм

$$S_{ACPF} = AC \cdot CE = a^2$$

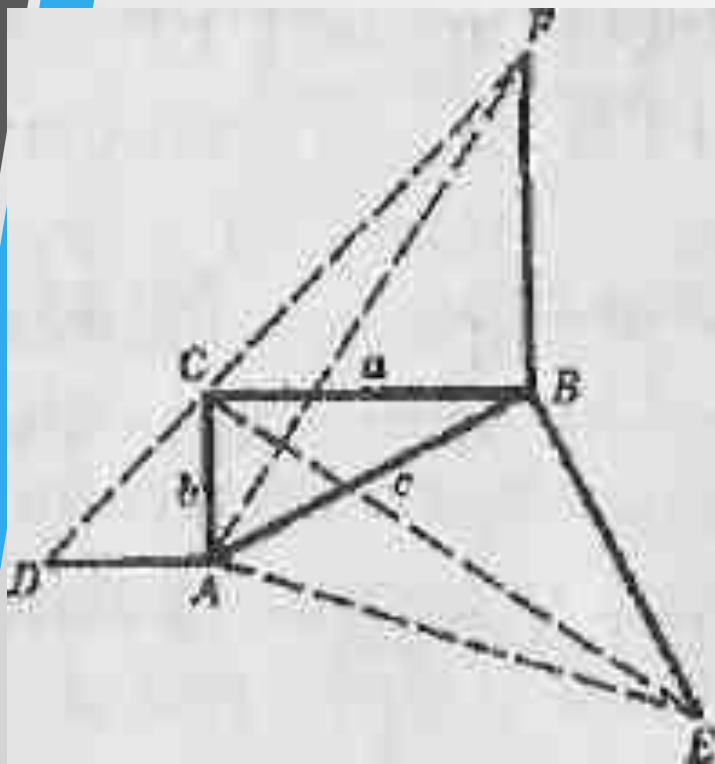
$$S_{KLOA} = S_{ACPF} = S_{ACED} = a^2$$

$$S_{LGBO} = S_{CBMP} = S_{CBNQ} = b^2$$

$$S_{AKGB} = c^2$$

$$S_{AKGB} = S_{AKLO} + S_{LGBO} = a^2 + b^2$$

Доказательство Гоффмана



$\triangle ABC$ – прямоугольный

$$\angle C = 90^\circ$$

$$BF \perp CB, BF = CB$$

$$BE \perp AB, BE = AB$$

$$AD \perp AC, AD = AC$$

$$F, C, D \in d$$

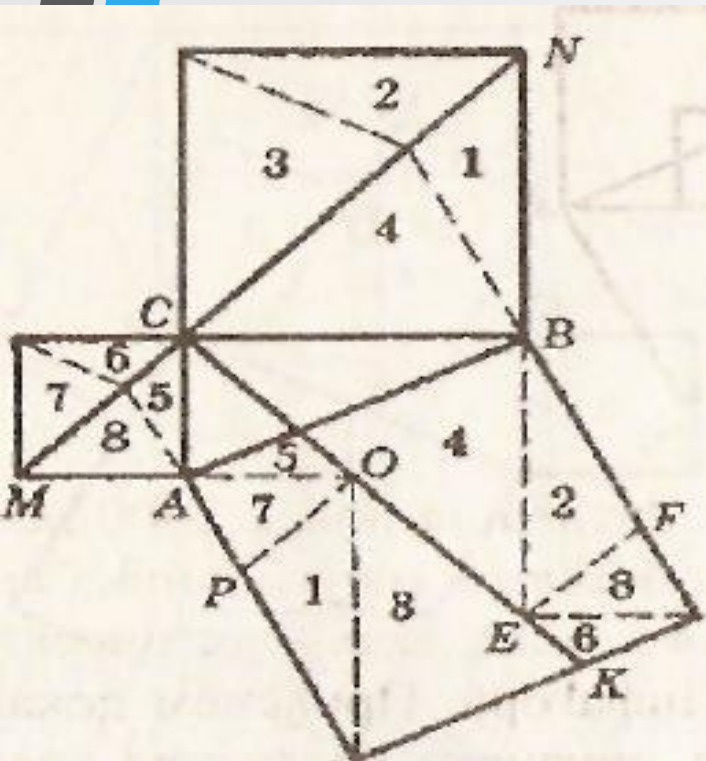
$$S_{ADFB} = S_{ACBE}, \text{ т.к. } \triangle AFB = \triangle ECB$$

$$S_{\triangle ADF} = S_{\triangle ACE}$$

Отнимем от обоих равновеликих четырехугольников общий для них $\triangle ABC$ и получим

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2$$

Доказательство Энштейна



- Основано на разложении квадрата, построенного на гипотенузе, на 8 треугольников.

$\triangle ABC$ - прямоугольный

$$\angle C = 90^\circ$$

$$CO \perp MN, CK \perp MN$$

$$PO \parallel MN, EF \parallel MN.$$

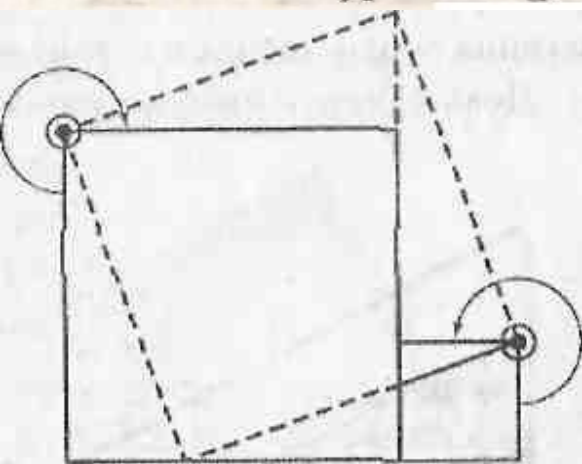
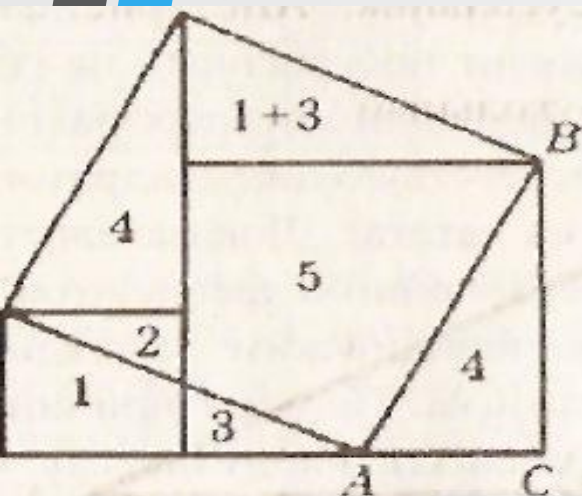
- Соответственно равные треугольники одинаково пронумерованы.

Доказательство Аннариция



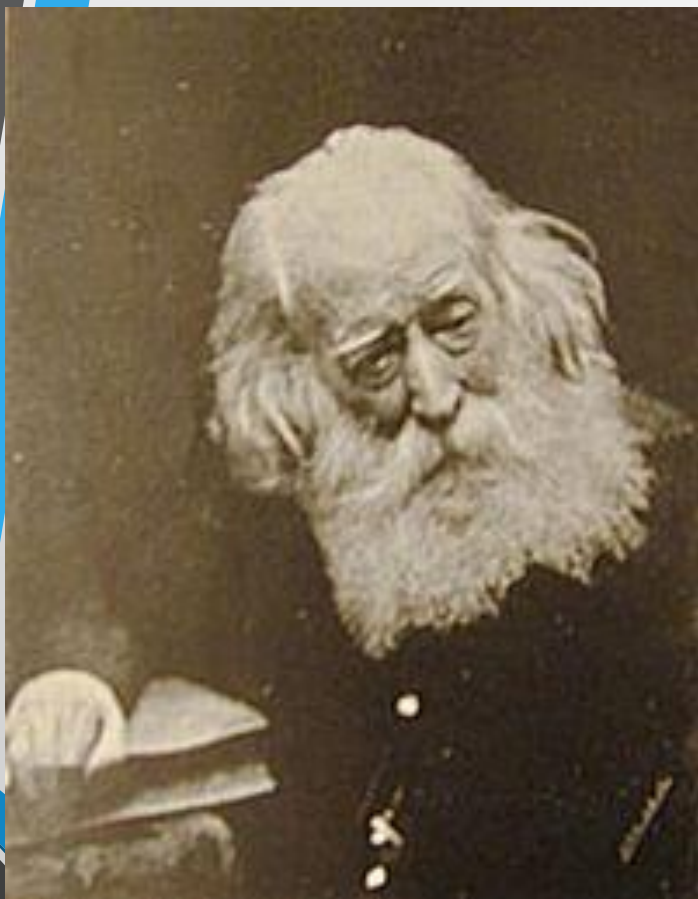
- Абу-л-Аббас ал-Фадл ибн Хатим ан-Найризи (ум. ок. 922) — видный персидский математик и астроном, уроженец города Найриза в Ширазе.
- Работал в «Доме мудрости» в Багдаде.
- В Западной Европе был известен под латинизированным именем Аннариций.

Доказательство Анналиция



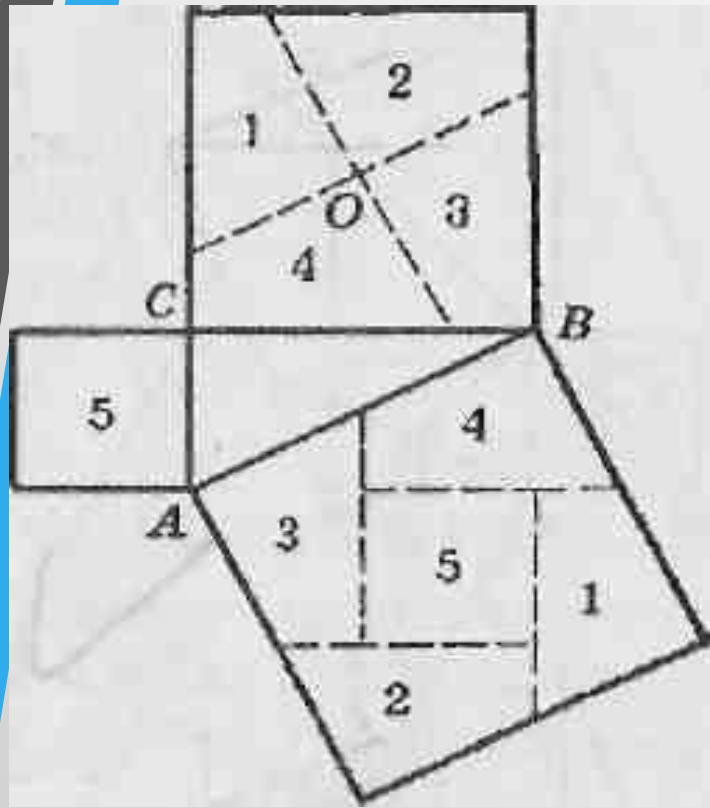
- Квадрат на гипотенузе разбит на 5 частей, из которых составляются квадраты на катетах. Любопытно, что это доказательство является простейшим среди огромного числа доказательств методом разбиения: в нём фигурирует всего 5 частей (или 7 треугольников). Это наименьшее число возможных разбиений.
- Также это доказательство называется «шарнирным», потому что здесь меняют своё положение только две части, равные исходному треугольнику, причём они как бы прикреплены к остальной фигуре на шарнирах, вокруг которых поворачиваются

Доказательство Перигалья



- Генри Перигаль, младший (01.03.1801 – 06.06.1898 г.) – британский биржевой брокер и математик-любитель, известен своим способом доказательства теоремы Пифагора и неортодоксальными убеждениями, что Луна не вращается.

Доказательство Перигала



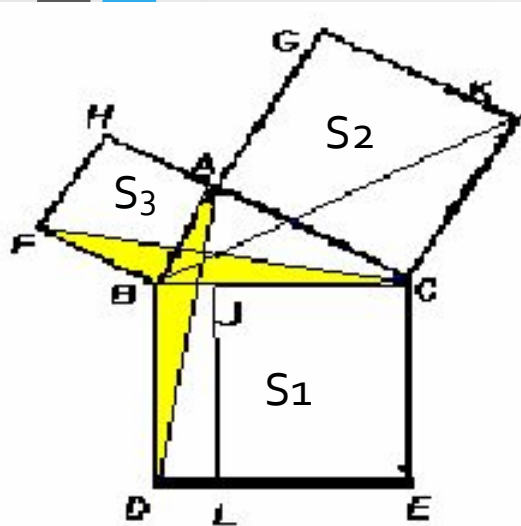
Через центр квадрата, построенного на большем катете, проводят прямые: одну - параллельную и одну - перпендикулярную гипотенузе.

В книгах фрагмент этого рисунка называют **«колесо с лопастями»**.

Соответственно равные многоугольники одинаково пронумерованы.

Это разложение квадратов интересно тем, что его попарно равные четырехугольники могут быть отображены друг на друга параллельным переносом.

Доказательство Евклида

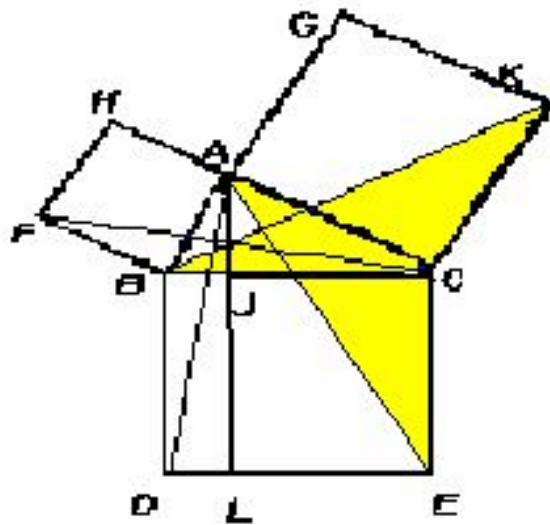


$\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle A = 90^\circ$, AJ – высота

Докажем : $S_1 + S_2 = S_3$

$\triangle ABD = \triangle BFC$ ($BF = AB$, $BC = BD$, $\angle BFC = \angle ABD$)

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{BJLD}$ (BD – общ. основание,
 LD – общ. высота)



$S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2} S_{ABFH}$ (BF – общ. основание,
 AB – общ. высота)

$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BFC} \Rightarrow S_{BJLD} = S_{ABFH}$

$\triangle BCK = \triangle ACE \Rightarrow S_{JCEL} = S_{ACKG}$

$S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{JCEL} + S_{JCEL} = S_{BCED}$

Доказательство Леонардо да Винчи

- Главные элементы доказательства — симметрия и движение.

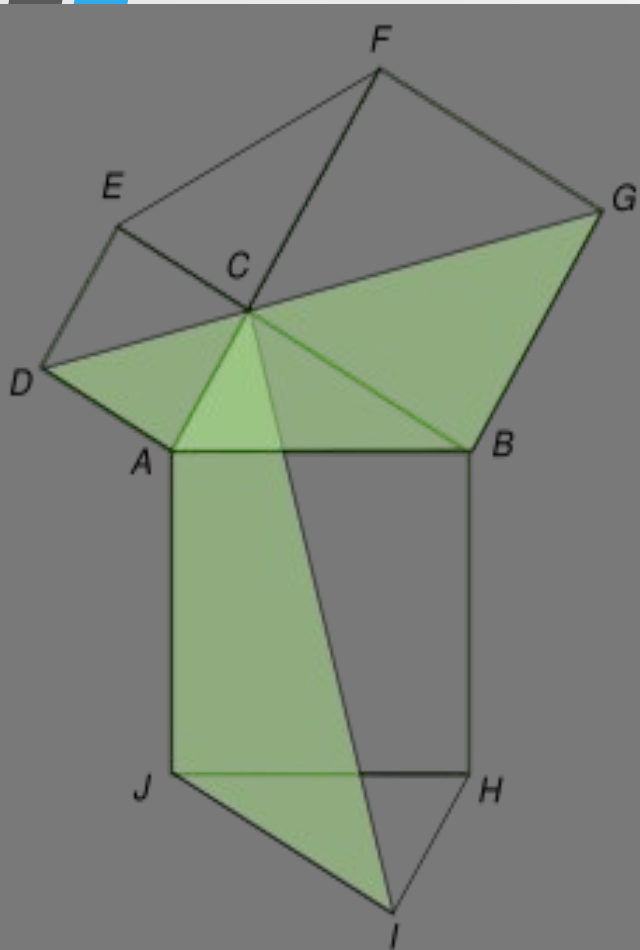
Как видно из симметрии, отрезок CI пересекает квадрат $ABHI$ на две одинаковые части (так как треугольники ABC и JHI равны по построению).

Пользуясь поворотом на 90° против часовой стрелки, мы усматриваем равенство заштрихованных фигур $CAJI$ и $GDAB$.

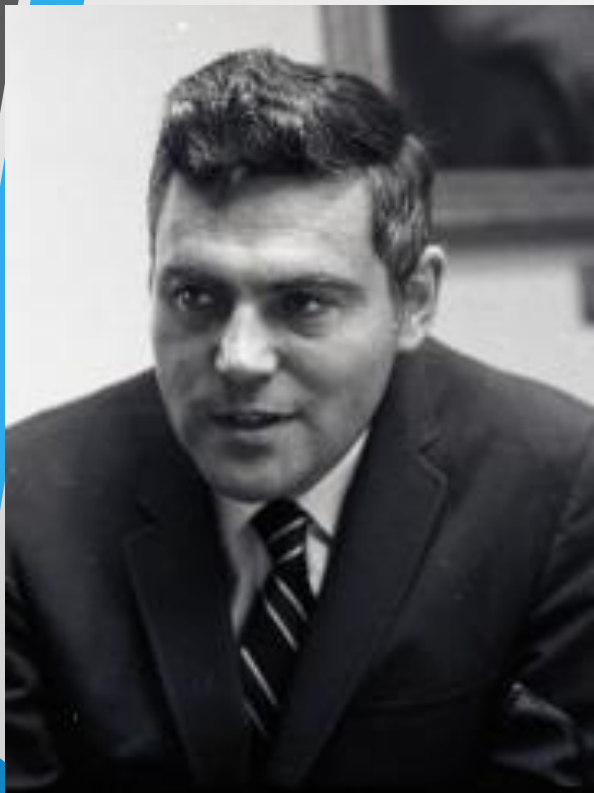
Теперь ясно, что площадь заштрихованной нами фигуры равна сумме половин площадей квадратов, построенных на катетах, и площади исходного треугольника.

С другой стороны, она равна половине площади квадрата, построенного на гипотенузе, плюс площадь исходного треугольника.

Отсюда и следует доказываемое нами равенство.



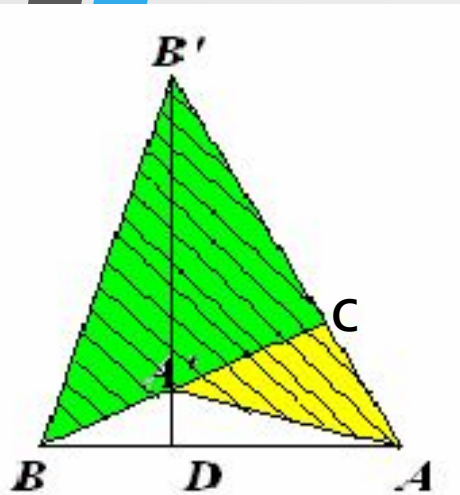
Доказательство Хоукинса



- Джеральд Стэнли Хокинс (1928—2003) — британский астроном, широко известен своими исследованиями в области археоастрономии.
- Доктора наук по радиоастрономии, профессор астрономии и председатель управления Бостонского университета, автор работ по самым различным темам.

Доказательство Хоукинса

- Хоукинс задаёт поворот плоскости по часовой стрелке с центром в точке C на 90 градусов. Тогда образом $\triangle BSA$ при этом повороте станет $\triangle B'SA'$



- Обозначим: $AC = a$, $BC = b$, $AB = c$

- Проведём $B'D$ – высоту $\triangle B'AB$

- Четырёхугольник $A'AB'B$ можно разложить на два равнобедренных $\triangle CAA'$ и $\triangle CBB'$

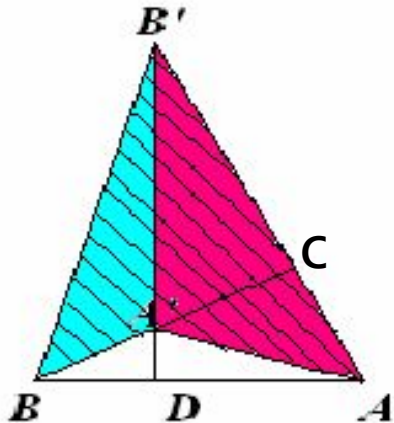
$$S_{CAA'} = \frac{a^2}{2}; S_{CBB'} = \frac{b^2}{2}$$

$$S_{A'AB'B} = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

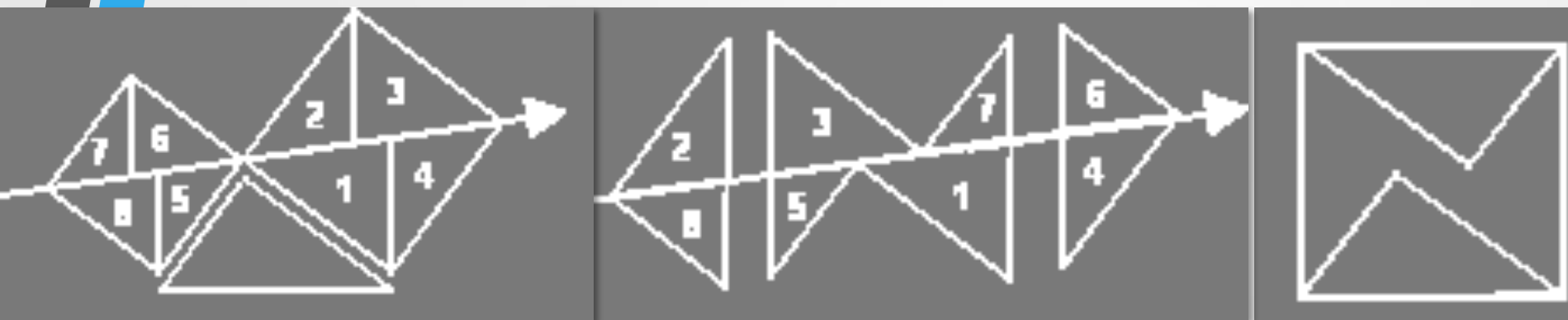
$\triangle A'B'A$, $\triangle A'B'B$ имеют общее основание $A'B'$
и высоты DA , DB

ПОЭТОМУ :

$$S_{A'AB'B} = c \frac{DA}{2} + c \frac{DB}{2} = c \frac{DA + DB}{2} = \frac{c^2}{2}$$



Доказательство Бетхера



Бетхер показывает, как из треугольников, входящих в состав квадратов, построенных на катетах, составить квадрат, построенный на гипотенузе.

Нижние треугольники 8 и 4 отодвигаем от фигуры 5-1, перераспределяем 7;6;2;3 так, как показано на втором рисунке.



Спасибо за внимание!