

Основы математической обработки информации

Семестр: 1

Лекции: 6

Практические занятия: 10

Контрольная работа: 1

Зачёт

Лекция 5.

Стохастические модели

§1. Неопределённость в математических моделях

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

§4. Моделирование дискретных случайных величин

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.



Число очков, выпавших на верхней грани кубика.

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.



Дальность прыжка на уроке физкультуры.

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Число взошедших семян при высадке в грунт одного пакета с семенами.



§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко predetermined. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.



Время ожидания автобуса на остановке.

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Площадь сектора, в который попал дротик при игре в дартс.





§1. Неопределённость в математических моделях

Пусть основные условия опыта, определяющие его протекание в общих, грубых чертах сохраняются неизменными; второстепенные – меняются из опыта в опыт и вносят случайные различия в результаты опытов.

В ряде практических задач этими случайными элементами пренебрегают, полагая, что явление протекает вполне определённым образом. Такова классическая схема построения математической модели в «точных науках»: из бесчисленного множества факторов, влияющих на явление, выделяют основные, решающие, а влиянием второстепенных пренебрегают.

Но существуют и другие задачи. В них многочисленные второстепенные факторы играют заметную роль и пренебречь ими уже нельзя.



§1. Неопределённость в математических моделях

Испытание: взвешивание тела на аналитических весах.

Событие: весы показывают конкретное значение массы.

Факторы, влияние которых, вносит случайность в результат испытания:

- положение тела на чаше весов;
- случайные вибрации аппаратуры;
- ошибки отсчёта показаний прибора;
- ...



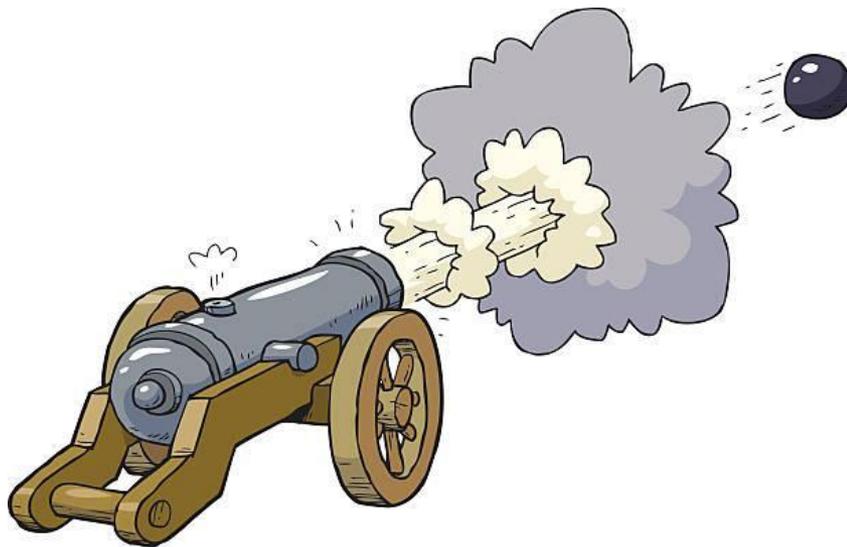
§1. Неопределённость в математических моделях

Испытание: выстрел из орудия, установленного под заданным углом к горизонту.

Событие: снаряд упал в конкретное место.

Факторы, влияние которых, вносит случайность в результат испытания:

- ошибки при изготовлении снаряда;
- погрешности при установки орудия;
- метеорологические условия;
- ...

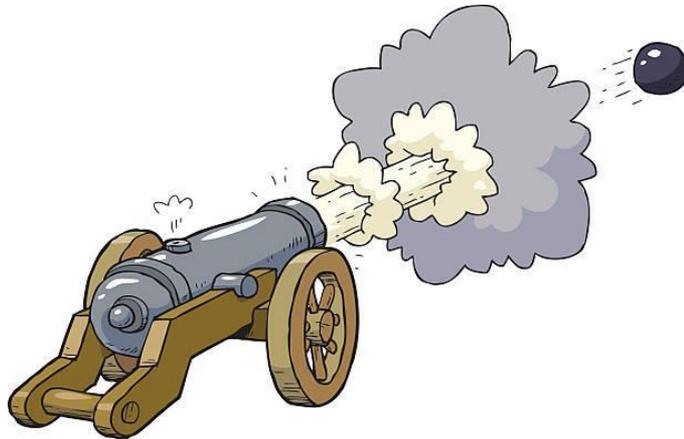


§1. Неопределённость в математических моделях

Точки падения снарядов рассеяны.

Если размеры цели велики, то рассеиванием можно пренебречь.

Если область рассеивания снарядов превышает размеры цели, то некоторые из них не попадут в цель.



Возникает ряд вопросов, принципиально связанных со случайным характером явления:
какой процент снарядов попадёт в цель?

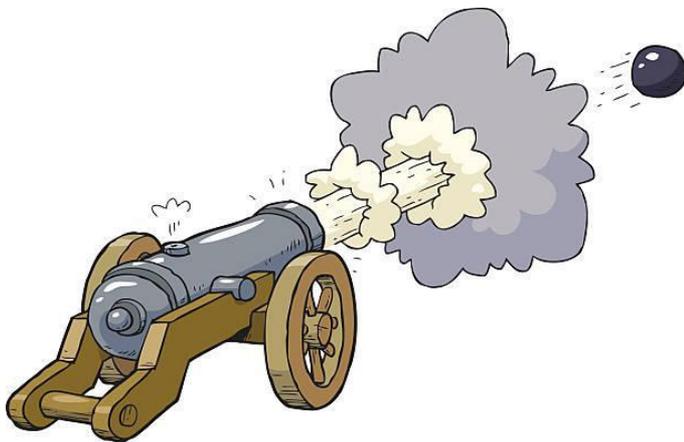
сколько нужно снарядов, чтобы достаточно надёжно поразить цель?

какие принять меры для уменьшения расхода снарядов?

§1. Неопределённость в математических моделях

Возникшие вопросы органически связаны со случайным характером явления. Пренебречь случайностью нельзя. Поэтому необходимо изучить случайное явление рассеивания снарядов с точки зрения закономерностей, присущих этому явлению:

- исследовать закон по которому распределяются точки падения снарядов;
- выяснить случайные причины, вызывающие рассеивание;
- сравнить причины рассеивания по степени значимости;
- ...



Какой процент снарядов попадёт в цель?

Сколько нужно снарядов, чтобы достаточно надёжно поразить цель?

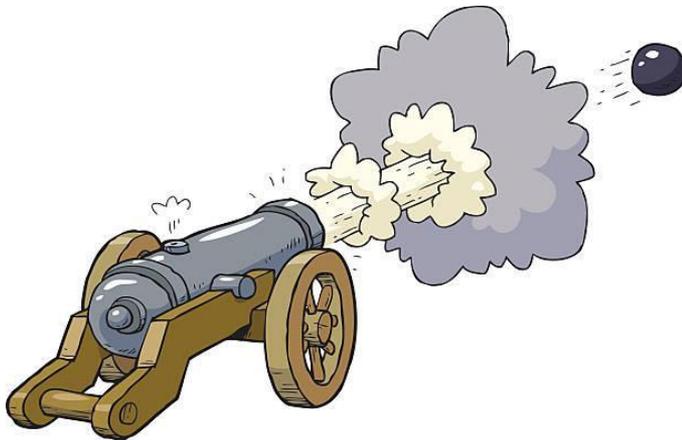
Какие принять меры для уменьшения расхода снарядов?

§1. Неопределённость в математических моделях

Выделение «основных» факторов протекания явления и второстепенных, называемых «случайными», достаточно условно.

Возникает иллюзия, что точность решения каждой задачи с помощью математической модели можно неограниченно повышать, включая в условие всё новые и новые группы факторов.

На практике попытка проанализировать влияние всех факторов, от которых зависит явление, приведёт к непомерной громоздкости и сложности решения, которое к тому же становится практически неосуществимым.



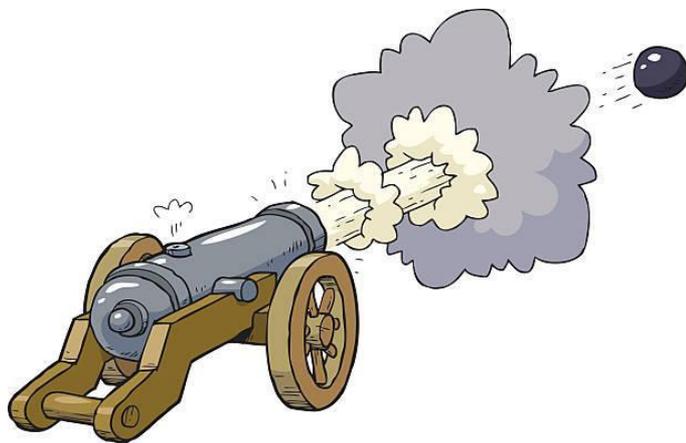
Например, можно поставить и решить задачу об определении траектории конкретного снаряда. Но это решение не только очень сложное, но и не имеет практической ценности, т.к. относится к конкретному снаряду, в конкретных условиях, которые больше никогда не повторятся.

§1. Неопределённость в математических моделях

Неопределённость, сложность, многопричинность случайных явлений требует специальных методов их изучения. Такие методы разрабатываются в **теории вероятностей**.

Наблюдая в совокупности массы однородных случайных явлений, можно обнаружить своего рода **устойчивости**, определённые закономерности, свойственные именно массовым случайным явлениям.

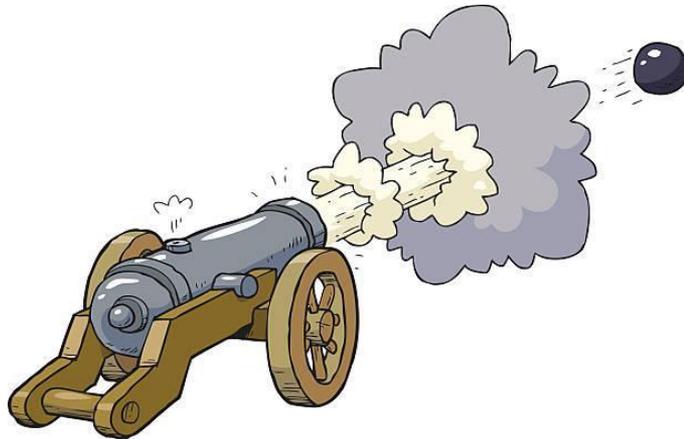
Например, точки падения снарядов распределяются в полном беспорядке. Но по мере увеличения количества выстрелов, в распределении точек начинает наблюдаться некая закономерность. Расположение точек оказывается приблизительно симметричным относительно некой центральной точки.



§1. Неопределённость в математических моделях

Такие «статистические» закономерности имеют место всегда, когда рассматриваются массовые однородные случайные явления. Индивидуальные особенности отдельных случаев как бы взаимно погашаются, нивелируются, и средний результат всей массы случайных явлений оказывается практически **неслучайным**.

Методы теории вероятностей приспособлены для исследования именно массовых случайных явлений, но они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления.



Вероятностный (статистический) метод в науке не противопоставляется классическому методу «точных наук», а является его дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учётом присущих ему элементов случайности.

§1. Неопределённость в математических моделях

ГЛОССАРИЙ ТЕРМИНОВ

Событие – всякий факт, который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Вероятность события – количественная характеристика степени возможности события.

Достоверное событие – событие, которое непременно произойдёт в результате опыта.

Невозможное событие – событие, которое в данном опыте никогда не произойдёт.

Случайное событие – событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти.

§1. Неопределённость в математических моделях

Испытание: ?

Случайное событие: ?



§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом ИСХОДОВ

В основе **классического определения вероятности события** лежит непосредственный подсчёт вероятностей.

Если исходы (события) в опыте:

- образуют **полную группу** (т.е. в результате испытания обязательно должно появиться хотя бы одно из них);
- являются **несовместными** (т.е. никакие два из них не могут появиться вместе);
- являются **равновозможными** (т.е. по условиям симметрии можно считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое),

то вероятность события A вычисляется как отношение числа исходов опыта, благоприятных наступлению события A к общему числу всех возможных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$



§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом ИСХОДОВ

Какова вероятность того, что ваш будущий ребёнок родится в апреле?

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: рождение ребёнка.

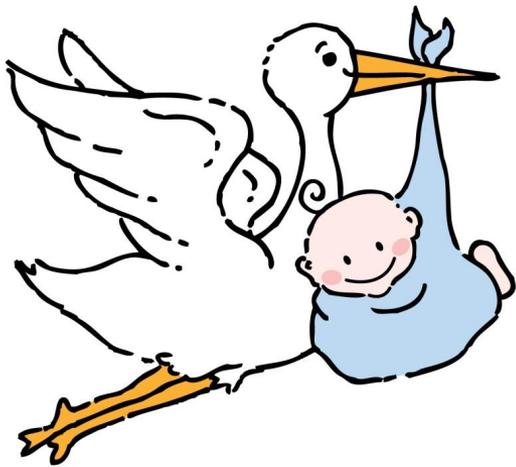
Событие: ребёнок родился в апреле.

Равновероятные исходы испытания: ребёнок родился в *наугад выбранный день года*.

Число всех исходов: конечно; n .

Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с конечным числом исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

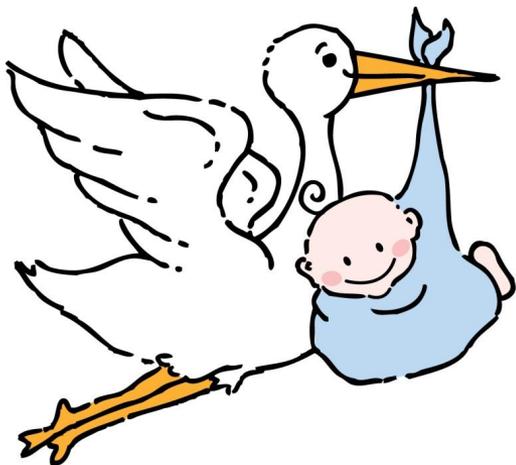


§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом ИСХОДОВ

Какова вероятность того, что ваш будущий ребёнок родится в апреле?

Аналитическое решение задачи

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{30}{365}$$



Ответ:

$$\frac{30}{365}$$

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом ИСХОДОВ

Из 15 изготовленных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что два выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор двух велосипедов.

Событие: выбраны велосипеды без дефекта.

Равновероятные исходы испытания: *выбраны наугад два велосипеда.*

Число всех исходов: конечно; n .

Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с конечным числом исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$



§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом ИСХОДОВ

Из 15 изготовленных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что два выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

Аналитическое решение задачи

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2}$$

$$P(A) = \frac{\frac{12!}{2! \cdot 10!}}{\frac{15!}{2! \cdot 13!}} = \frac{11 \cdot 12}{14 \cdot 15} = \frac{11 \cdot 12}{14 \cdot 15} = \frac{22}{35}$$



Ответ:

$$\frac{22}{35}$$

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом ИСХОДОВ

В группе из 6 юношей и 4 девушек выбирают по жребию четырёх дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор четверых дежурных.

Событие: выбраны 2 юноши и 2 девушки.

Равновероятные исходы испытания: *выбраны наугад четверо дежурных.*

Число всех исходов: конечно; n .

Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с конечным числом исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$



§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом ИСХОДОВ

В группе из 6 юношей и 4 девушек выбирают по жребию четыре дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

Аналитическое решение задачи

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \dots$$



Ответ:

$$\frac{3}{7}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

Классическое определение вероятности не применимо к опытам с бесконечным числом исходов. В таких случаях используют понятие **геометрической вероятности**.

Если исходы (события) в опыте:

- образуют **полную группу** (т.е. в результате испытания обязательно должно появиться хотя бы одно из них);
- являются **несовместными** (т.е. никакие два из них не могут появиться вместе);
- являются **равновозможными** (т.е. по условиям симметрии можно считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое)

и число их бесконечно, то вероятность события A вычисляется как отношение **меры множества** исходов опыта, благоприятных наступлению события A к мере множества всех возможных исходов

$$P(A) = \frac{\text{mes } M}{\text{mes } N}$$



§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

Замечание.

Согласно введённому определению **вероятность того, что случайная точка попадёт в конкретную точку области равна нулю.** (Мера множества, состоящего из одной точки равна нулю).

Однако это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным. В отличие от классического определения, когда равенство вероятности нулю равносильно тому, что событие невозможно.

Моделирование случайных явлений с применением определения геометрической вероятности состоит в описании множества всех возможных исходов опыта и множества исходов, благоприятных наступлению события.

В простейших случаях эти описания очевидно вытекают из условия. Иногда возникает необходимость ввести прямоугольную систему координат и описать соответствующие множества методом координат.

$$P(A) = \frac{\text{mes } M}{\text{mes } N}$$



§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

Найдите вероятность того, что точка, брошенная наугад в квадрат, попадёт внутрь вписанного круга.

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор точки внутри квадрата.

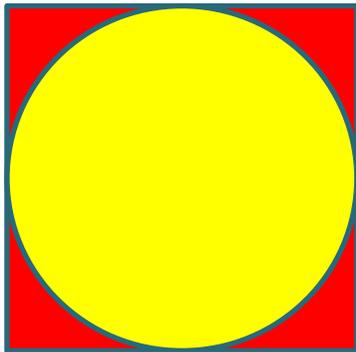
Событие: выбранная точка находится внутри круга.

Равновероятные исходы испытания: *выбрана наугад точка в квадрате.*

Число всех исходов: бесконечно.

Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов.

$$P(A) = \frac{\text{mes } M}{\text{mes } N}$$



§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

Найдите вероятность того, что точка, брошенная наугад в квадрат, попадёт внутрь вписанного круга.

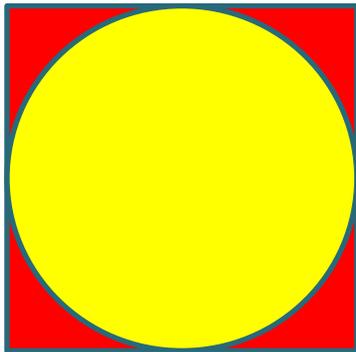
Аналитическое решение задачи

$$P(A) = \frac{\text{mes } M}{\text{mes } N} = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}}$$

$$P(A) = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{4}$$



§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

Оля пообещала подруге Кате позвонить с 9 до 10 часов. Найдите вероятность того, что их разговор начнётся в интервале с 9.20 до 9.25.

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор момента времени с 9 до 10 часов.

Событие: выбранный момент времени попадает в интервал с 9.20 до 9.25.

Равновероятные исходы испытания: *выбрана наугад точка в течение часа.*

Число всех исходов: бесконечно. *Задача может быть решена* помощью математической модели равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов.

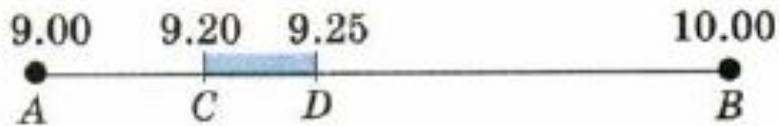
$$P(A) = \frac{\text{mes } M}{\text{mes } N}$$



§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

Оля пообещала подруге Кате позвонить с 9 до 10 часов. Найдите вероятность того, что их разговор начнётся в интервале с 9.20 до 9.25.

Аналитическое решение задачи



$$P(A) = \frac{\text{mes } M}{\text{mes } N} = \frac{L_{CD}}{L_{AB}}$$

$$P(A) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

Ответ:

$$\frac{1}{12}$$



§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

К сигнализатору поступают сигналы от двух устройств, причём поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T минут. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше I минуты. Найдите вероятность того, что сигнализатор сработает за время T , если каждое из устройств пошлёт по одному сигналу.



§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор момента подачи сигнала каждым

из двух устройств на промежутке времени длиной T .

Событие: моменты подачи сигнала устройствами отличаются меньше чем на 1 минуту.

Равновероятные исходы испытания: *выбраны наугад 2 момента времени в диапазоне длины T .*

Число всех исходов: бесконечно.
Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов.

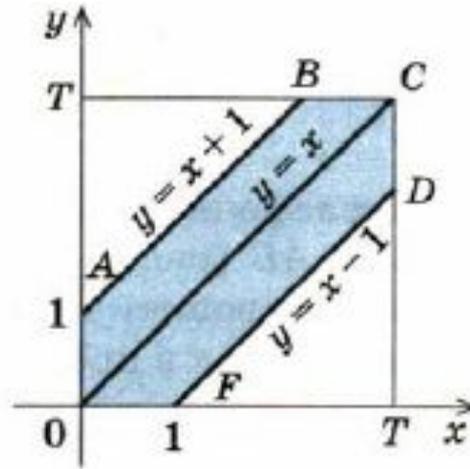


$$P(A) = \frac{\text{mes } M}{\text{mes } N}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом ИСХОДОВ

Аналитическое решение задачи

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq T, \\ 0 \leq y \leq T. \end{cases}$$



$$|y - x| < 1$$

$$-1 < y - x < 1$$

$$x - 1 < y < x + 1$$



$$P(A) = \frac{\text{mes } M}{\text{mes } N} = \frac{S_{\text{шестиугольника}}}{S_{\text{квадрата}}}$$

$$P(A) = \frac{T^2 - (T-1)^2}{T^2}$$

Ответ:

$$\frac{2T-1}{T^2}$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

ГЛОССАРИЙ ТЕРМИНОВ

Случайная величина – всякая переменная величина, которая в результате опыта (испытания) в зависимости от случая принимает одно из своих возможных значений (какое именно – заранее неизвестно).

Дискретная случайная величина – случайная величина множество значений которой дискретно.

Закон распределения случайной величины – соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Математическое ожидание случайной величины – среднее значение случайной величины.

Дисперсия случайной величины – рассеяние случайной величины около среднего значения (математическое ожидание квадрата отклонения величины от её математического ожидания).

Среднее квадратичное отклонение случайной величины – квадратный корень из дисперсии.

§4. Моделирование дискретных случайных величин

Площадь сектора, в который попал дротик при игре в дартс.



Число очков, выпавших на верхней грани кубика.



Время ожидания автобуса на остановке.



Дальность прыжка на уроке физкультуры.



Число взошедших семян при высадке в грунт одного пакета с семенами.



§4. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина (ДСВ)

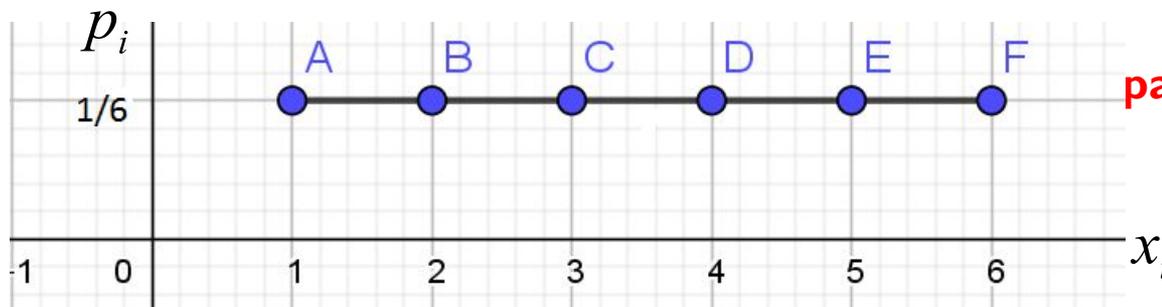
X - число очков, выпавших на верхней грани кубика



Закон распределения ДСВ

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$



Многоугольник распределения ДСВ

§4. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина

X - число очков, выпавших на верхней грани кубика



x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Числовые характеристики ДСВ

Математическое ожидание ДСВ

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина

X - число очков, выпавших на верхней грани кубика



x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Числовые характеристики ДСВ

Дисперсия ДСВ

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$$

$$D(X) = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$

$$\left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина

X - число очков, выпавших на верхней грани кубика



x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Числовые характеристики ДСВ
Среднее квадратичное отклонение ДСВ

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,71$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

В группе из 6 юношей и 4 девушек выбирают по жребию четыре дежурных. Составьте закон распределения числа девушек среди дежурных.

X - число девушек среди дежурных

Дискретная случайная величина

x_i	0	1	2	3	4
p_i					



Закон распределения ДСВ

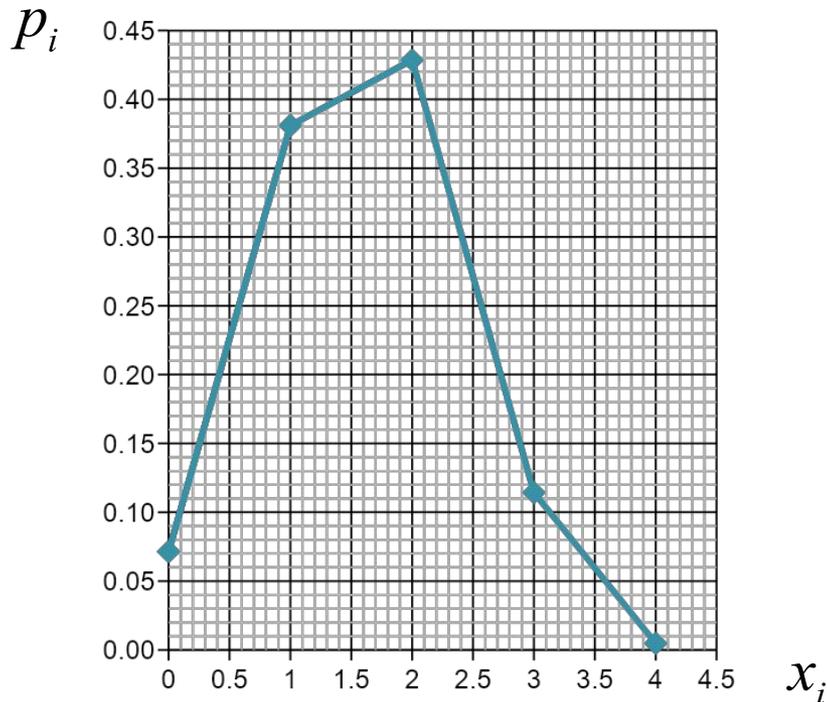
$$P(X = m) = \frac{C_4^m \cdot C_6^{4-m}}{C_{10}^4}$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

X - число девушек среди дежурных

x_i	0	1	2	3	4
p_i	15/210	80/210	90/210	24/210	1/210

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$



$$P(X = m) = \frac{C_4^m \cdot C_6^{4-m}}{C_{10}^4}$$



§4. Моделирование дискретных случайных величин

X - число девушек среди дежурных

x_i	0	1	2	3	4
p_i	15/210	80/210	90/210	24/210	1/210

Математическое ожидание ДСВ

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = 1,6$$

Дисперсия ДСВ

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = 0,64$$

Среднее квадратичное отклонение ДСВ

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,8$$



§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Площадь сектора, в который попал дротик при игре в дартс.



Число очков, выпавших на верхней грани кубика.



Время ожидания автобуса на остановке.



Дальность прыжка на уроке физкультуры.



Число взошедших семян при высадке в грунт одного пакета с семенами.



§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Непрерывная случайная величина (НСВ)

X - дальность прыжка на уроке физкультуры



$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Закон распределения НСВ

x_i						
p_i						

$$\sum p_i = 1$$

$$F(x) = P(X < x)$$

Функция распределения НСВ

$$f(x) = F'(x)$$

Плотность вероятности НСВ

§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Непрерывная случайная величина (НСВ)

X - дальность прыжка на уроке физкультуры



$$F(x) = P(X < x)$$

$$f(x) = F'(x)$$

Числовые характеристики НСВ

Математическое ожидание НСВ

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Дисперсия НСВ

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx$$

Среднее квадратичное отклонение НСВ

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Нормальное распределение НСВ (закон Гаусса)

X - дальность прыжка на уроке физкультуры



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Математическое ожидание

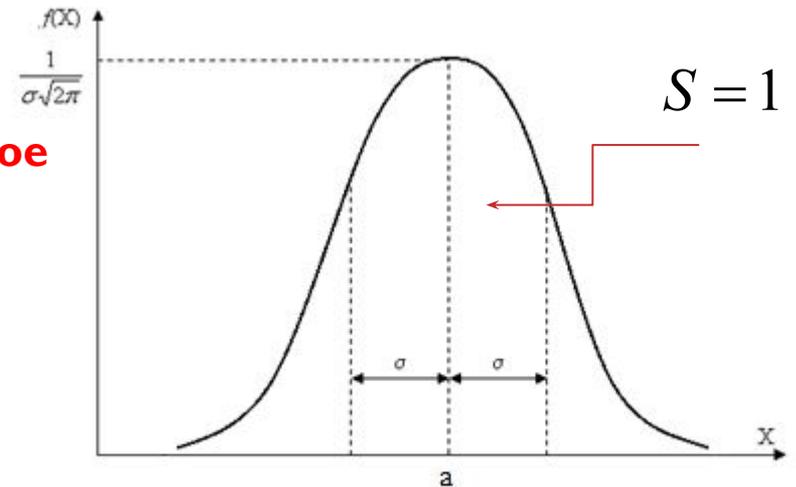
$$M(X) = a$$

Дисперсия

$$D(X) = \sigma^2$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X) = \sigma$$



Кривая Гаусса

§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Равномерное распределение

НСВ

X - время ожидания автобуса
на остановке



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x < a, x > b \end{cases}$$

**Математическое
ожидание**

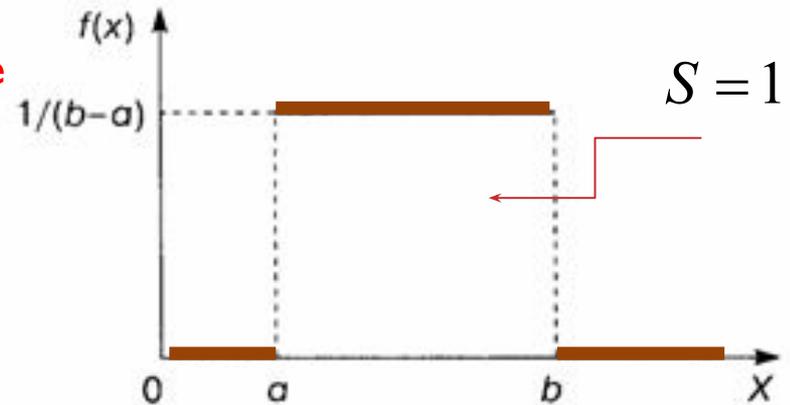
$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

Дисперсия

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

**Среднее квадратичное
отклонение**



Основы математической обработки информации

Продолжение следует...