



Раздел 4: Электростатика и постоянный электрический ток

Тема13. Электрическое поле в вакууме

Тема14. Проводники в электрическом поле

Тема15. Диэлектрики в электрическом поле

Тема16. Постоянный электрический ток

Тема 13. Электрическое поле в вакууме



1. Закон Кулона. Электростатическое поле.
2. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле.
3. Потенциальная энергия и потенциал.
4. Связь между напряженностью и потенциалом.
5. Поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса.
6. Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей.

Электростатика – это раздел физики, в котором изучается взаимодействие и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно выбранной инерциальной системы отсчета.

Электрические заряды

- 1. Электрический заряд – носитель электромагнитного взаимодействия.*
- 2. Электрический заряд может быть двух типов: положительный (при трении кожи о стекло) и отрицательный (при трении меха с эбонитом).*
- 2. Носителями электрического заряда являются заряженные элементарные частицы с элементарным зарядом $e=1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл : протон, электрон.*

4. Фундаментальный закон сохранения электрического заряда (выполняется в любых процессах рождения и уничтожения элементарных частиц):

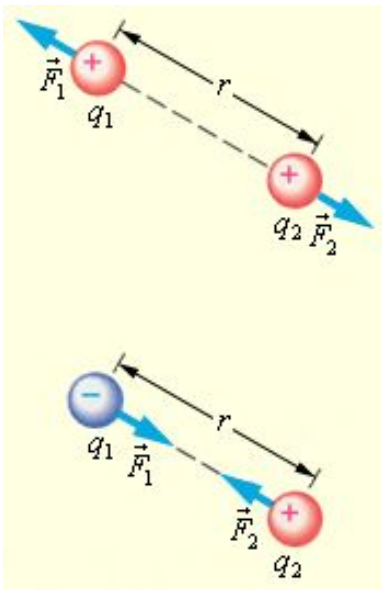
В любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется.

5. Электрический заряд является релятивистски инвариантным: его величина не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется он или покоится.

1 учебный вопрос: Закон Кулона.



Закон Кулона – закон о взаимодействии точечных зарядов:



Сила взаимодействия F двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме направлена вдоль линии, соединяющей оба заряда, прямо пропорциональна величинам этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения. В системе СИ

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2 \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

электрическая постоянная

*Взаимодействия зарядов передаются с помощью особого материального посредника, называемого **электрическим полем**.*

Действие электрического поля на помещенный в него заряд является основным его свойством.

Электрическое поле, созданное неподвижными зарядами, называется электростатическим (ЭСП).

*Характеристики ЭСП в вакууме:
напряженность (векторная) и потенциал (скалярная)*

Напряженность поля $\vec{E}$ - векторная характеристика электрического поля. Напряженность поля в некоторой точке определяется отношением силы действующей со стороны поля на заряд q_0 , помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Напряженность – есть сила, действующая на единичный точечный заряд.

$$[\vec{E}] = \frac{Н}{Кл}$$

$\vec{E}$ - силовая характеристика электрического поля.

Напряженность электрического поля точечного заряда

$$E = \frac{F}{|q_0|} = k \frac{|q|}{r^2}$$

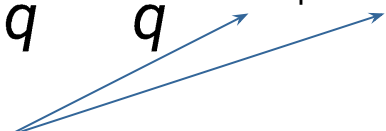
$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

Принцип суперпозиции полей

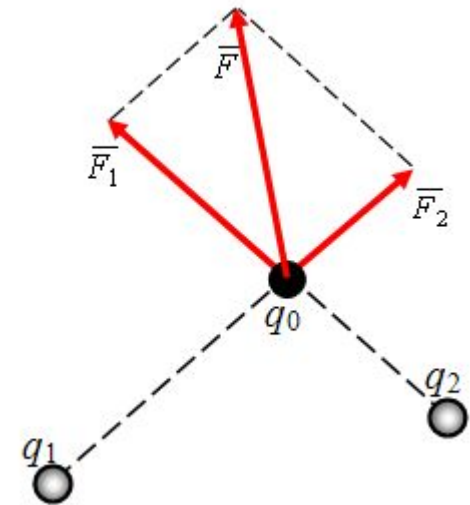
Напряженность поля, создаваемая в какой-либо точке пространства системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Следует из опытного факта:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{q} = \frac{\vec{F}_1}{q} + \frac{\vec{F}_2}{q} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$


напряженности полей одного из зарядов в отсутствии другого



Напряженность поля непрерывно распределенного заряда

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

Характеристики распределенных зарядов

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right] \quad \text{— линейная плотность зарядов;}$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right] \quad \text{— поверхностная плотность зарядов;}$$

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right] \quad \text{— объемная плотность зарядов.}$$

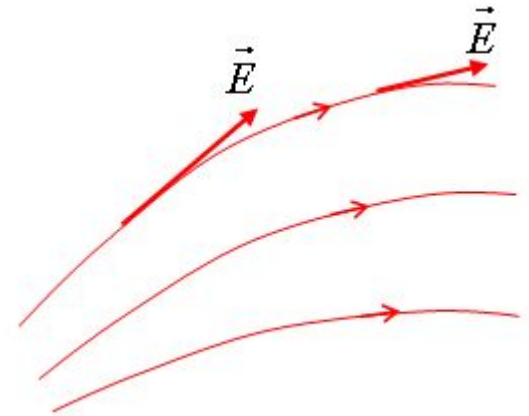
Графическое изображение электрических полей.

Силовые линии.

Силовые линии – это непрерывные линии, касательные к которым в каждой точке, через которую они проходят, совпадают с вектором напряженности электрического поля.

Свойства силовых линий:

- всегда начинаются на «+» зарядах и заканчиваются на «-» ;
- густота силовых линий пропорциональна напряженности электрического поля;
- не пересекаются.



Примеры электрических полей

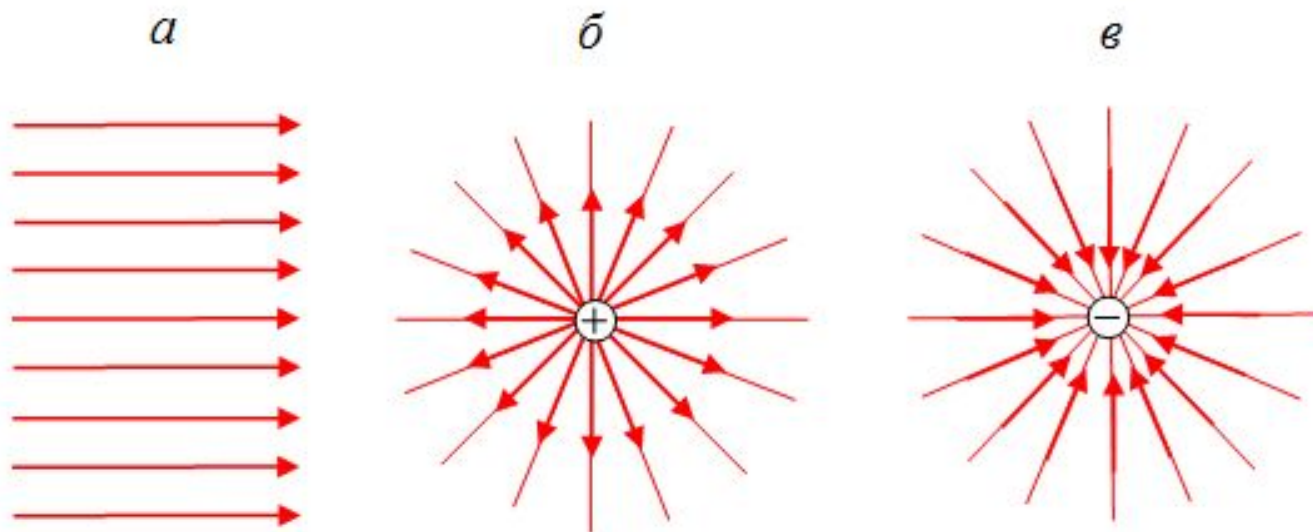


Рис. 5. Силовые линии электрических полей: однородного (а), точечных зарядов положительного (б) и отрицательного (в)

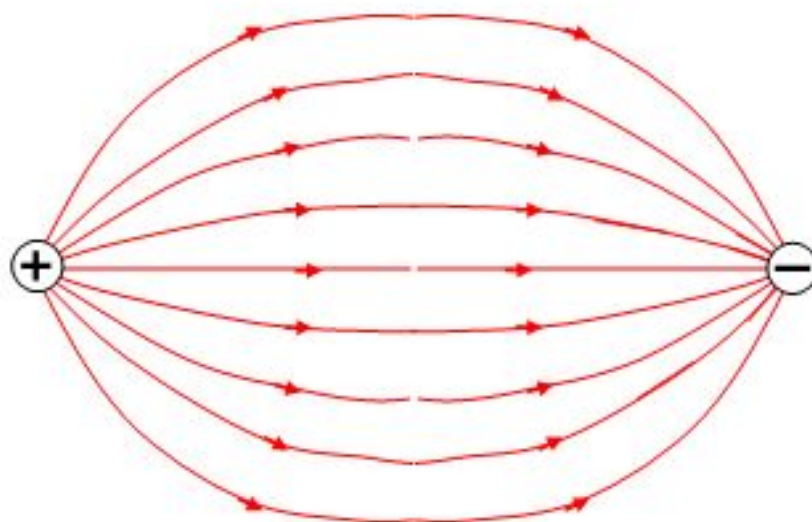
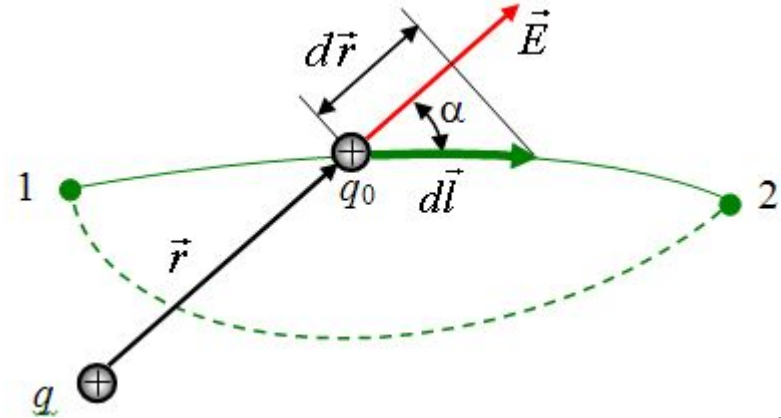


Рис. 6. Электрическое поле двух равных по модулю, и противоположных по знаку точечных зарядов

2 учебный вопрос: Работа по перемещению заряда в электростатическом поле.

Определим работу A этой силы при перемещении пробного заряда q_0 .



$$dA = |\vec{F}| |d\vec{l}| \cos \alpha = |\vec{F}| |d\vec{r}| = q_0 E dr$$

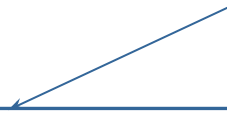
Работа по перемещению заряда q_0 из точки 1 в точку 2:

$$A = q_0 \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0 \int_1^2 E dr$$

$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$A = q_0 \int_1^2 E dr$$



$$A = q_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3)$$

Работа по перемещению заряда не зависит от формы траектории и пройденного зарядом пути, а зависит только от начального и конечного положения заряда.

Такое поле называется потенциальным, а кулоновская сила – консервативной.

При движении заряда по замкнутой траектории ($r_1 = r_2$) работа равна нулю:

$$A = q_0 \oint \vec{E} d\vec{r} = 0$$

Интеграл $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ называется циркуляцией вектора напряженности.

Если циркуляция поля равна нулю, то поле является потенциальным.

3 учебный вопрос: Потенциальная энергия и потенциал.



*При перемещении электрического заряда работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии:
 $A = -\Delta W$, где W – потенциальная энергия.*

При $r \rightarrow \infty$ $W \rightarrow 0 \Rightarrow$

Потенциальная энергия заряда q_0 , находящегося в поле заряда q на расстоянии r от него в соответствии с (3) равна:

$$W = A = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (4)$$

Отношение потенциальной энергии W к заряду q_0 не зависит от заряда q_0 и является энергетической характеристикой электростатического поля, называемой потенциалом.

Потенциалом называется скалярная величина, характеризующая энергию, которой обладает заряд, помещенный в данную точку поля, и численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда в этой точке поля:

$$\varphi = \frac{W}{+q_0} \quad (5)$$

Потенциал поля точечного заряда:
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (5a)$$

Принцип суперпозиции

Если поле создается системой зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$, то справедлив принцип суперпозиции

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

$$\varphi = \frac{W}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

Потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности

Разность потенциалов

$$A = W_1 - W_2 = q_0\varphi_1 - q_0\varphi_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6)$$

Работа, совершаемая электрическими силами при перемещении заряда между двумя точками поля, равна произведению этого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках пути.

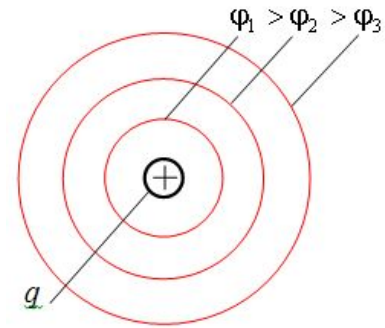
Свойства:

- 1. работа перемещения заряда по замкнутому контуру равна нулю: $\varphi_1 = \varphi_2$*
- 2. работа положительна, если заряд q_0 перемещается в направлении убывания потенциала ($\varphi_1 > \varphi_2$)*

Графическое изображение электрических полей.

Эквипотенциальные поверхности.

Эквипотенциальной поверхностью называется геометрическое место точек с одинаковым потенциалом ($\phi = \text{const}$).



Свойства эквипотенциальных поверхностей

- работа, совершаемая по перемещению заряда вдоль этой поверхности, равна нулю;
- кулоновская сила направлена перпендикулярно этой поверхности;
- эквипотенциальные поверхности не пересекаются;
- густота линий равного потенциала пропорциональна градиенту напряженности электрического поля.

4 учебный вопрос: Связь между напряженностью и потенциалом.



Работа на бесконечно малом отрезке:

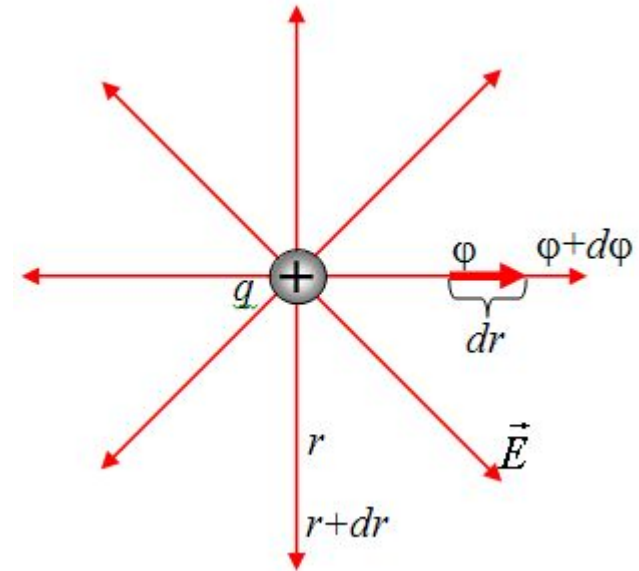
$$dA = q_0 E dr$$

$$dA = q_0 [\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -q_0 d\varphi$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \Rightarrow$$

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \varphi$$



$$\vec{E} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}\right)$$

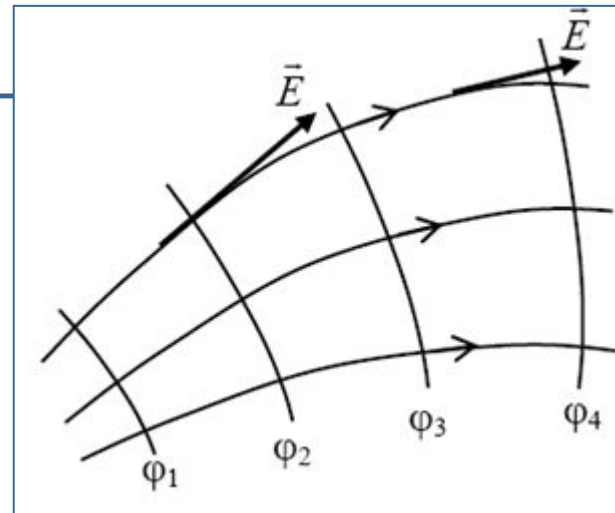
(7)

Матанализ: $\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ - производная функции по направлению

$\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности $\varphi = \text{const}$

Вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен поверхности $\varphi = \text{const}$ и направлен в сторону, противоположную $\vec{n}$, т.е. в сторону убывания потенциала.



Пример

Однородное поле плоского конденсатора ($E = \text{const}$)

$$-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_0^l E_l dl \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = E_l \cdot l \Rightarrow$$

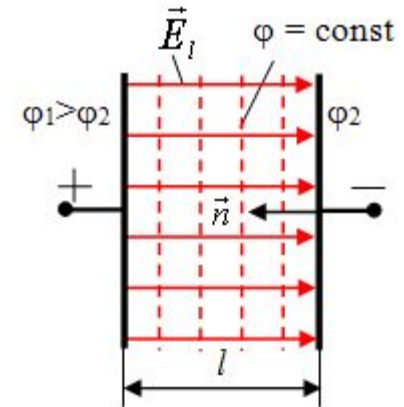
$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \quad (8)$$

Единицы измерения

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} \Rightarrow \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = 1\text{В}$$

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} \Rightarrow \frac{\text{Н}}{\text{Кл}};$$

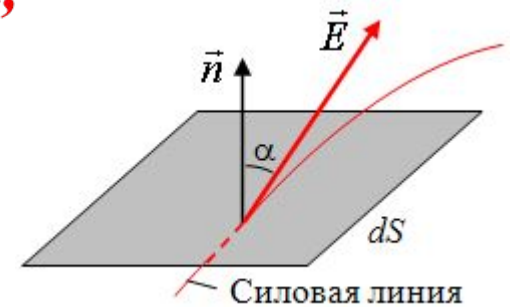
$$[E] = \frac{[\varphi]}{[l]} \Rightarrow \frac{\text{В}}{\text{м}}$$



5 учебный вопрос: Поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса.

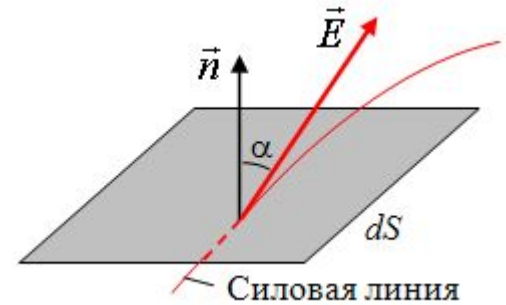
Основной задачей электростатики является задача о нахождении напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ электрического поля в каждой точке пространства. Основной способ базируется на теореме Гаусса

Потоком (Φ_E) вектора $\vec{E}$ электрического поля через плоскую поверхность площади dS называется скалярная физическая величина, характеризующая интенсивность поля в данном месте пространства и численно равная количеству силовых линий, пронизывающих данную площадку в направлении нормали к ней.



$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS \Rightarrow \quad (9)$$

$$\Phi_E = \int_S E_n dS \quad (9a)$$



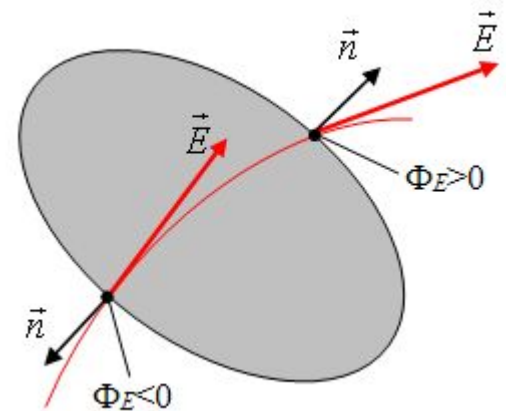
$$E_n = \vec{E} \cdot \vec{n} \quad E_n dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$$

тогда $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (10), (10a)$

Правило знаков:

$\Phi_E > 0$, если вектор $\vec{E}$ направлен наружу;

$\Phi_E < 0$, если вектор $\vec{E}$ направлен внутрь.



Поток Φ_E , создаваемый единичным положительным зарядом

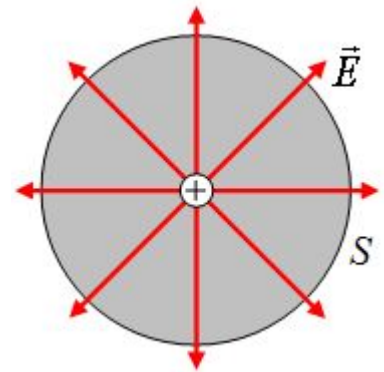
$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS \cos \alpha = E \cdot S$$

площадь сферы $S = 4\pi r^2$

для точечного заряда $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(11)



Для произвольного распределения зарядов поток вектора Φ_E определяется

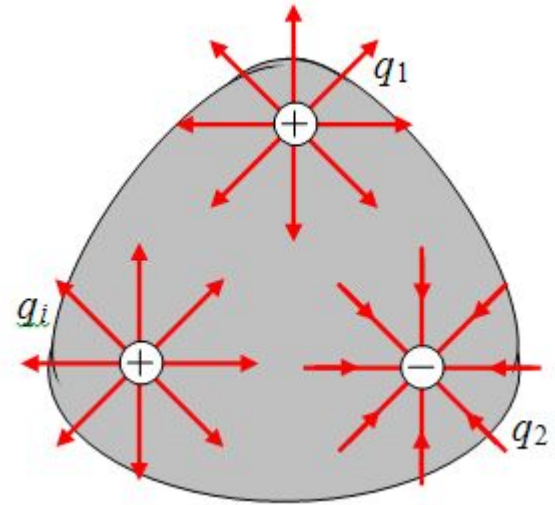
из принципа суперпозиции:

$$\Phi_{Ei} = \oint_S E_{ni} dS = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{Ei} = \sum_{i=1}^n \oint_S E_{ni} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^n \Phi_{Ei} - \text{полный поток через замкнутую поверхность}$$

$$\sum_{i=1}^n \oint_S E_{ni} dS = \oint_S \sum_{i=1}^n E_{ni} dS = \oint_S E_n dS$$



$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

- теорема Гаусса (12)

Поток вектора напряженности ЭСП через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .

Для непрерывно распределенного заряда с объемной плотностью $\rho = dQ/dV$, Кл/м³:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (13)$$

6 учебный вопрос: Применение теоремы Гаусса к расчету электростатических полей.

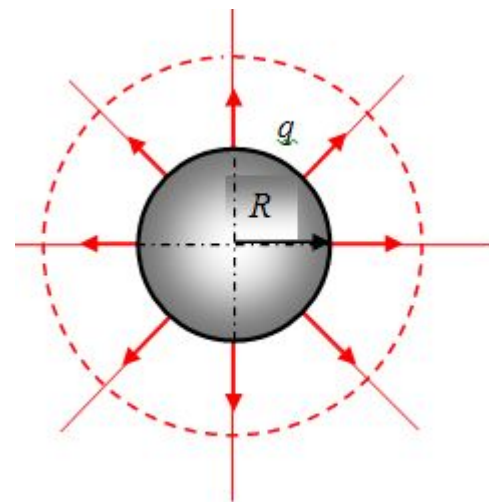


Поверхностно заряженная сфера

Внутри сферы ($r < R$):

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS \cos \alpha = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = 0$$

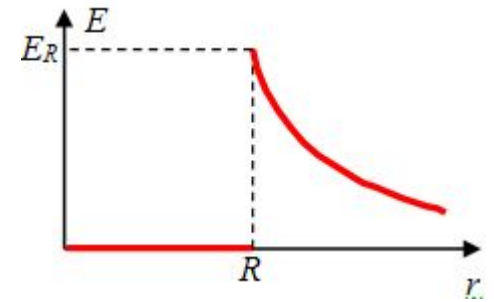
$E=0$, поле внутри сферы отсутствует



Вне сферы ($r > R$):

$$\Phi_E = \oint_S E dS \cos \alpha = E \oint_S dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad E_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \quad (14)$$

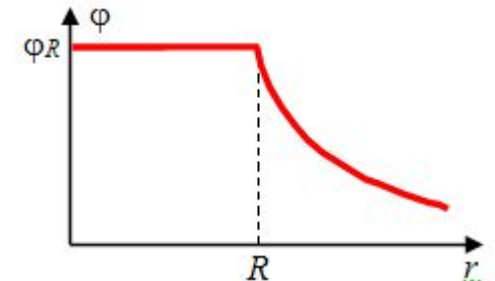


Потенциал

С учетом $E = -d\varphi/dr$ $d\varphi = -E \cdot dr$

Вне сферы ($r > R$):

$$\int_{\varphi_R}^{\varphi_r} d\varphi = - \int_R^r E dr \quad \varphi_r - \varphi_R = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{dr}{r^2}$$



$$\varphi_R - \varphi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \quad \varphi_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (15)$$

Внутри сферы ($r < R$): $d\varphi/dr = 0$ $\varphi = \varphi_R = \text{const}$

Объёмно заряженный шар

Объемная плотность заряда

$$\rho = \frac{q}{V}, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{q}{4/3\pi R^3}$$

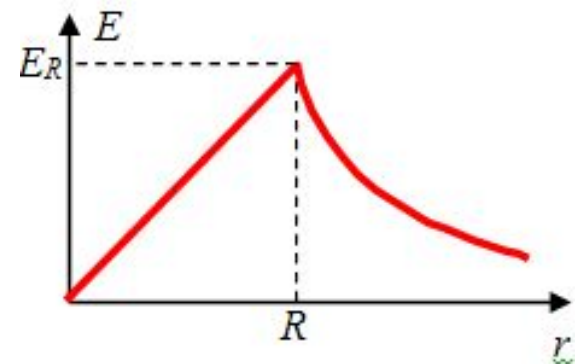
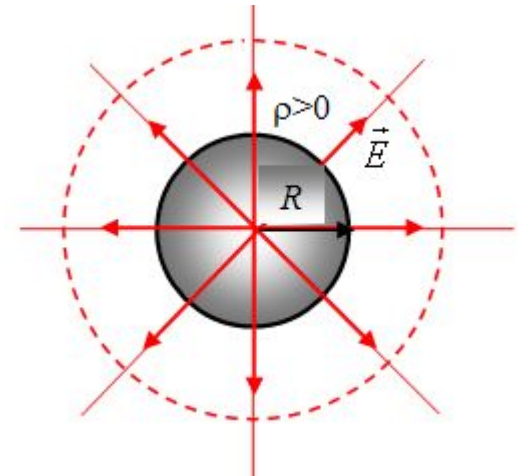
Вне шара ($r > R$): (14)

Внутри шара ($r < R$):

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r$$

$$E_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

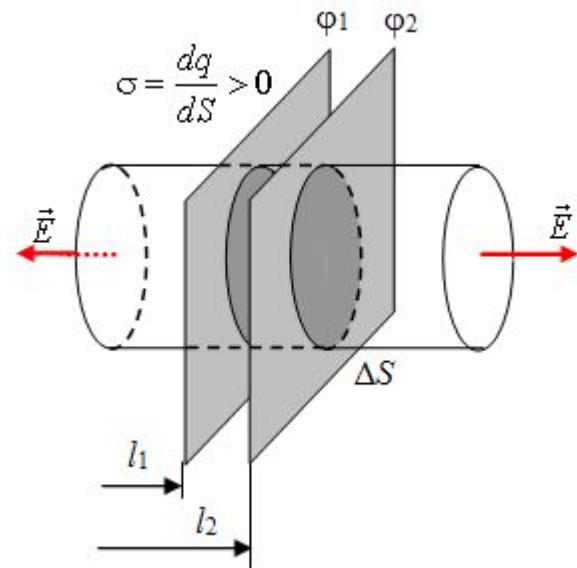


Бесконечная однородно заряженная плоскость

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$2E \cdot \Delta S = \sigma \Delta S \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



Найдем разность потенциалов между соседними плоскостями

$$-d\varphi = E dl \quad -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_{l_1}^{l_2} dl \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (l_2 - l_1)$$