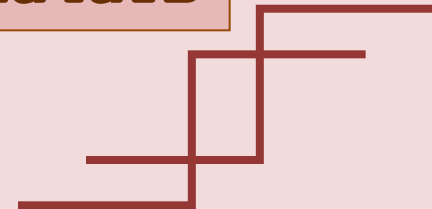




А В С
А В С

Введение в теорию графов

начать

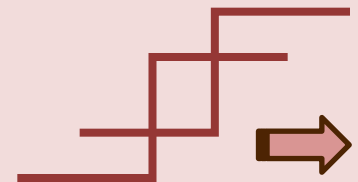


Введение в теорию графов

Граф отображает элементный состав системы и структуру связей.

А В С

А В С



Понятие графа

Граф – это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек. Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

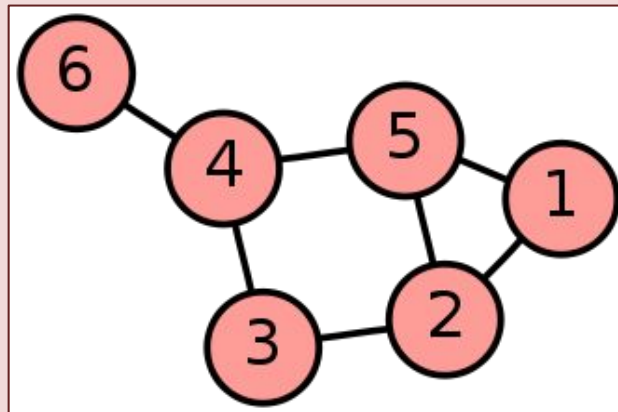
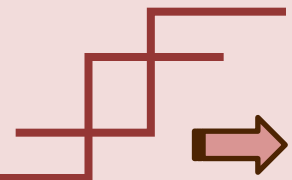


Рис. 1. Граф с шестью вершинами и семью ребрами



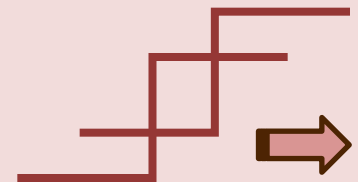
Элементы графа

Петля это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

Пустым (нулевым) называется граф без ребер.

Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

А В С
А В С
А В С



Нулевой граф

Граф, состоящий из «изолированных» вершин, называется нулевым графом

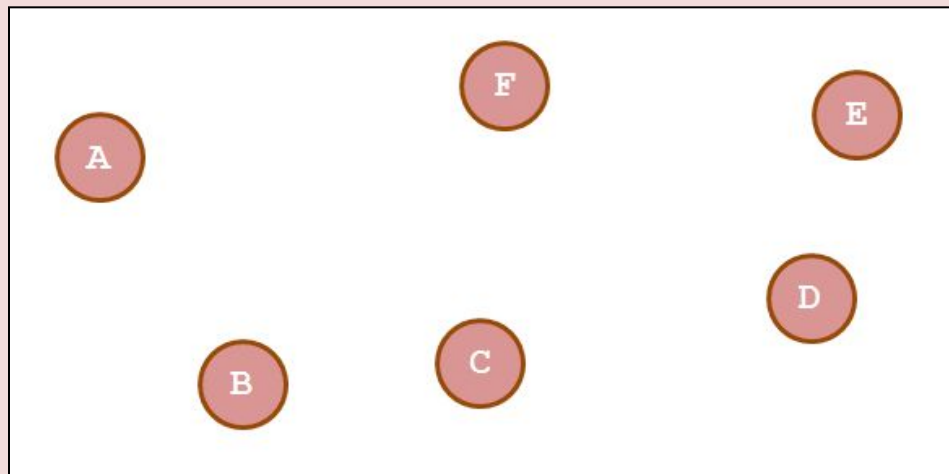
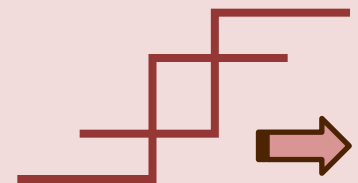
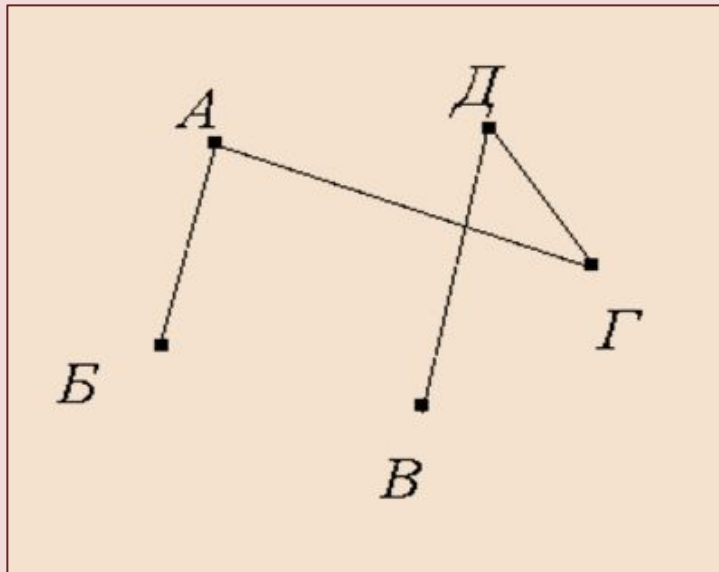


Рис. 2. Нулевой граф



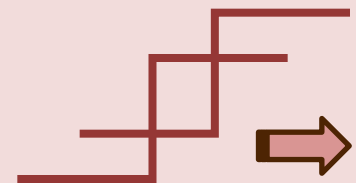
Неполный граф



Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются неполными графами.

Рис. 3. Неполный граф

А В С
А В С
А В С

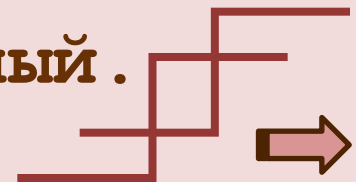


Степень графа

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной.

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется однородным.

Таким образом, любой полный граф – однородный.



Заметим, что если полный граф имеет n вершин, то количество ребер равно

$$n(n-1)/2$$

Задание 1. Существует ли полный граф с семью ребрами?

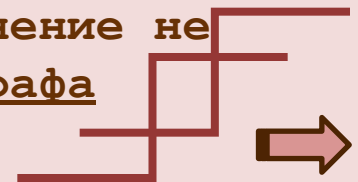
ОТВЕТ

Решение: Зная количество ребер, узнаем количество вершин.

$$n(n-1)/2=7.$$

$$n(n-1)=14.$$

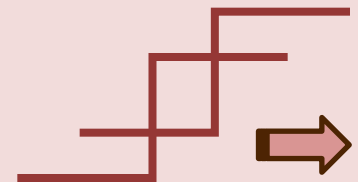
Заметим, что n и $(n-1)$ – это два последовательных натуральных числа. Число 14 нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел, значит, данное уравнение не имеет решений. Следовательно, такого графа не существует.



Задание 2.

1. Построить полный граф, если известно что он содержит в себе 7 вершин.
2. Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 10 команд.

А В С
А В С
А В С



Ориентированный граф

Граф называется ориентированным (или оргграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в оргграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами.

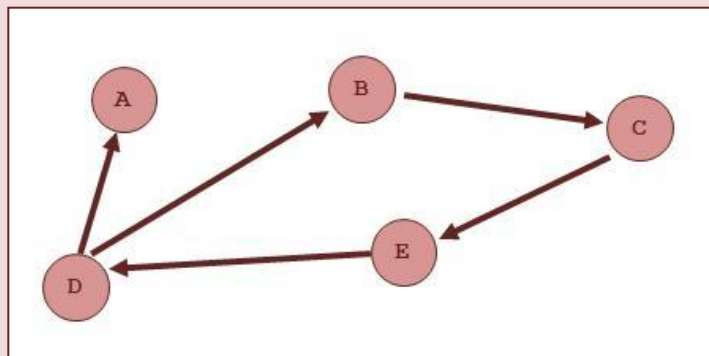
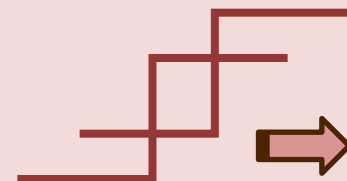


Рис. 4. Ориентированный граф



Ориентированный и неориентированный графы

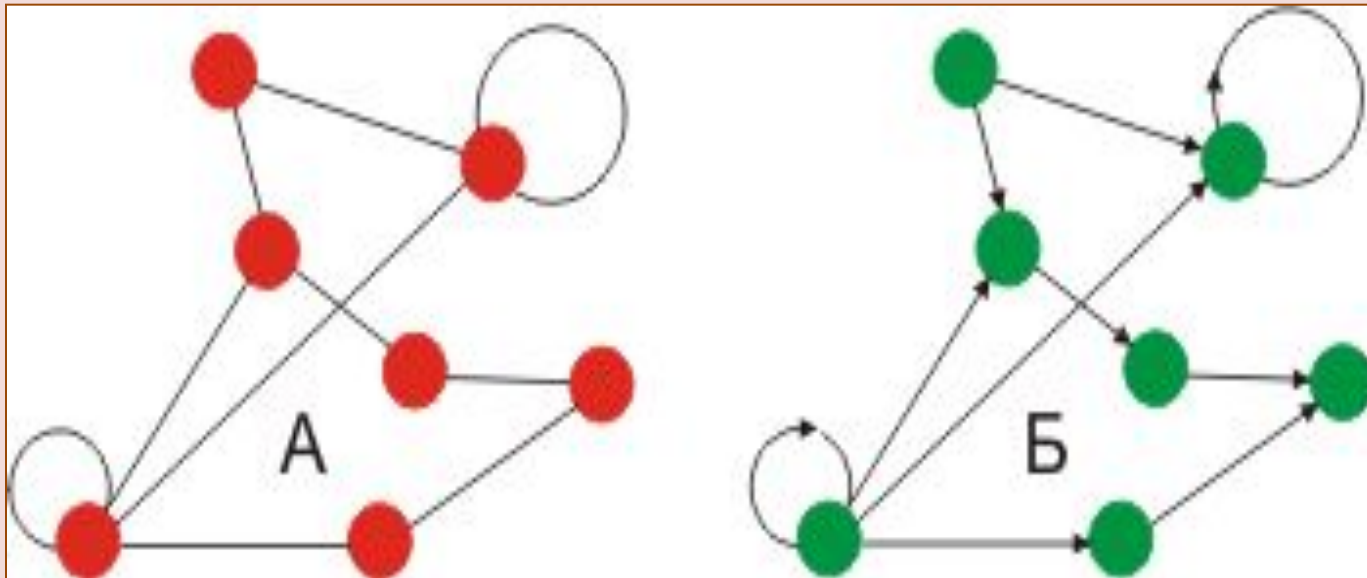
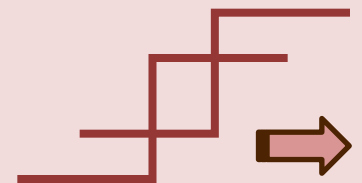


Рис. 5. Примеры неориентированного
и ориентированного графов (А и Б)

А В С
А В С
А В С

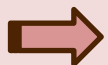
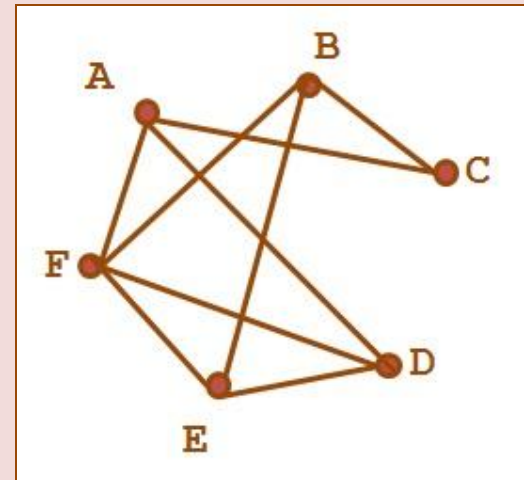


Задание 3. Построить граф по заданному условию:

В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили буквами А, В, С, D, Е и F. Через несколько недель некоторые из команд уже сыграли друг с другом:

ОТВЕТ

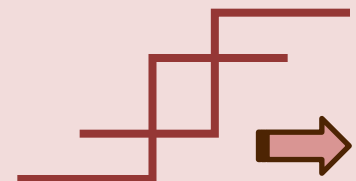
А	с	С, D, F;
В	с	С, Е, F;
С	с	А, В;
D	с	А, Е, F;
Е	с	В, D, F;
F	с	А, В, D.



Запомнить !

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление. Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие – нет.

А В С
А В С
А В С



Изображение графа

Один и тот же граф может выглядеть на рисунках по-разному. На рисунке 6 (а, б, в) изображен один и тот же граф.

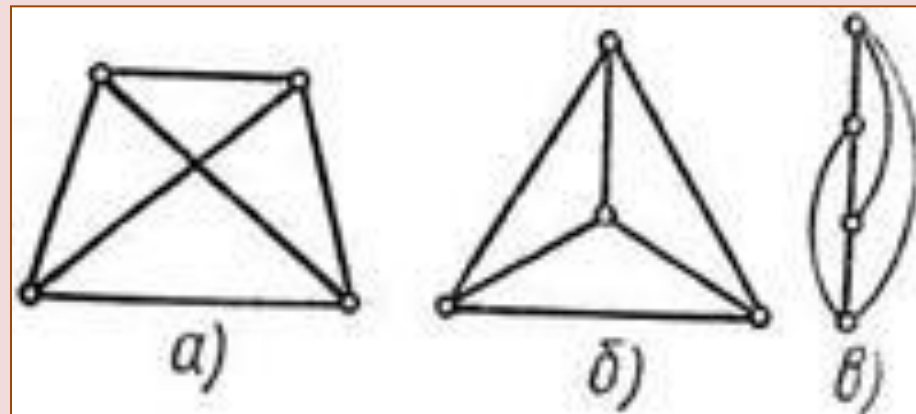
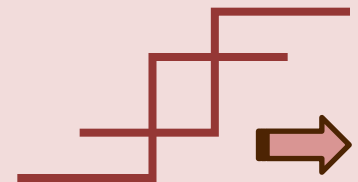


Рис. 6. Примеры изображения графа



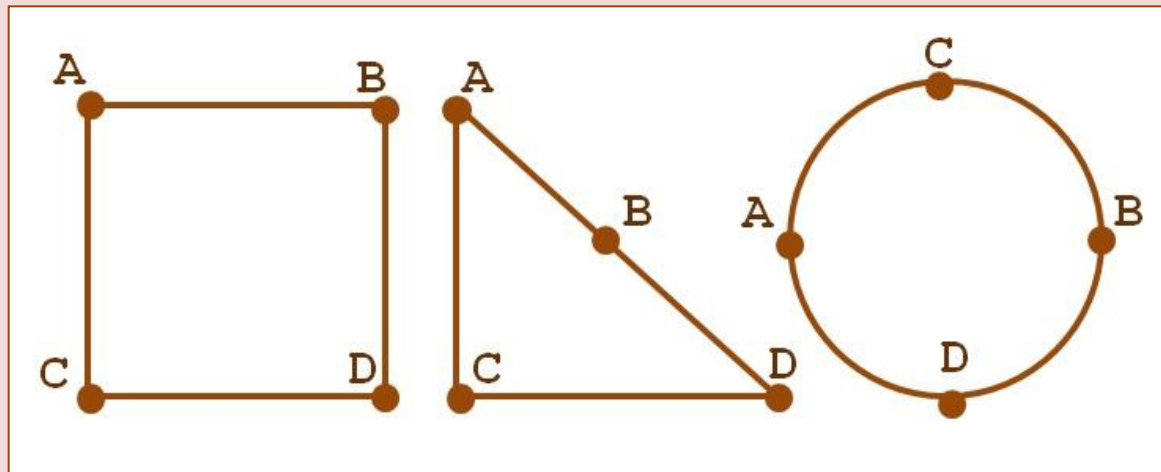
Задание 4.

Определить изображают ли фигуры на рисунке один и тот же граф или нет.

1)

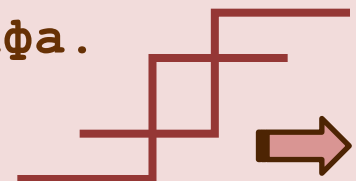
2)

3)



ОТВЕТ

Рисунок 1 и рисунок 2 являются изображениями одного графа. Рисунок 3 изображением другого графа

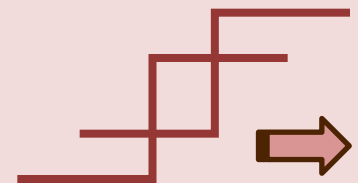


Путь в графе

Путём в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

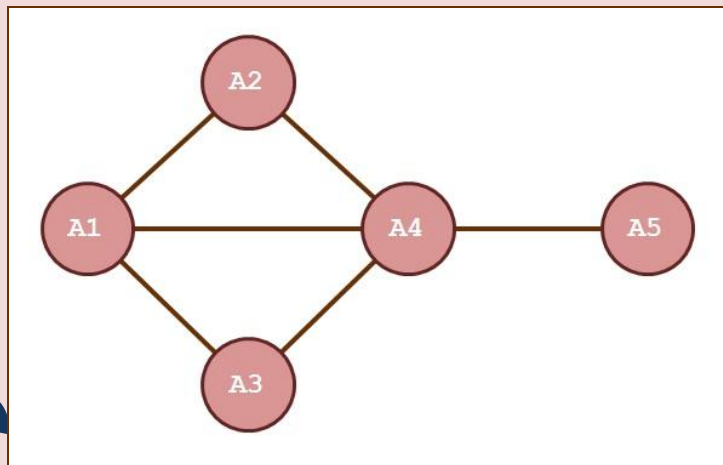
А В С

А В С



Задание 5.

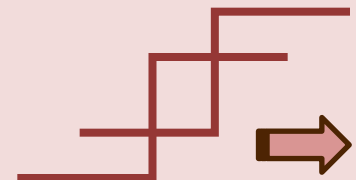
1. $(A1\ A4)$; $(A4\ A5)$.
2. $(A1\ A2)$; $(A2\ A4)$; $(A4\ A5)$.
3. $(A1\ A4)$; $(A4\ A2)$; $(A2\ A1)$; $(A1\ A4)$; $(A4, A5)$.
4. $(A1\ A4)$; $(A4\ A2)$; $(A2\ A1)$; $(A1\ A3)$; $(A3\ A4)$; $(A4, A5)$.



Определить какая из перечисленных последовательностей путей не является.

ОТВЕТ

Третья последовательность $(A1\ A4)$; $(A4\ A2)$; $(A2\ A1)$; $(A1\ A4)$; $(A4, A5)$.



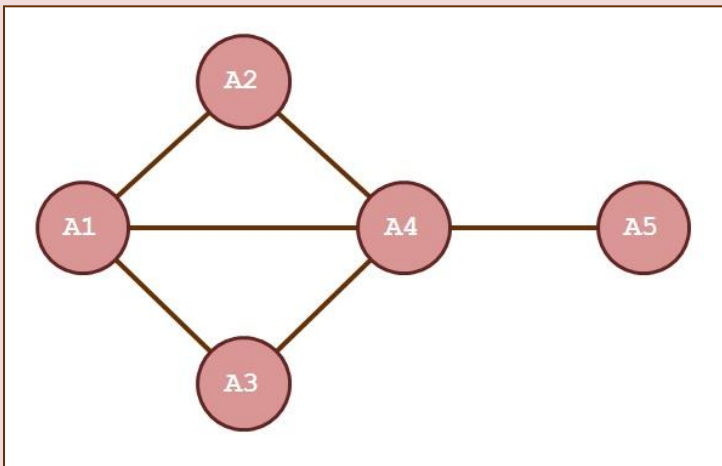
Путь называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 6.

1. $(A1\ A4)$; $(A4\ A5)$.
2. $(A1\ A2)$; $(A2\ A4)$; $(A4\ A5)$.
3. $(A1\ A4)$; $(A4\ A2)$; $(A2\ A1)$; $(A1\ A4)$; $(A4, A5)$.
4. $(A1\ A4)$; $(A4\ A2)$; $(A2\ A1)$; $(A1\ A3)$; $(A3\ A4)$; $(A4, A5)$.

Первая, вторая и четвертая последовательности являются путями, а третья нет, т.к. ребро $(A1, A4)$ повторяется. Первая и вторая последовательность являются простыми путями, а четвертая нет, т.к. вершины $A1$ и $A4$ повторяются.

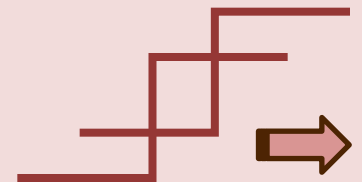
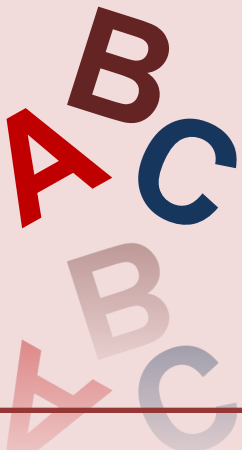
ОТВЕТ



Понятие цикла в графе

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

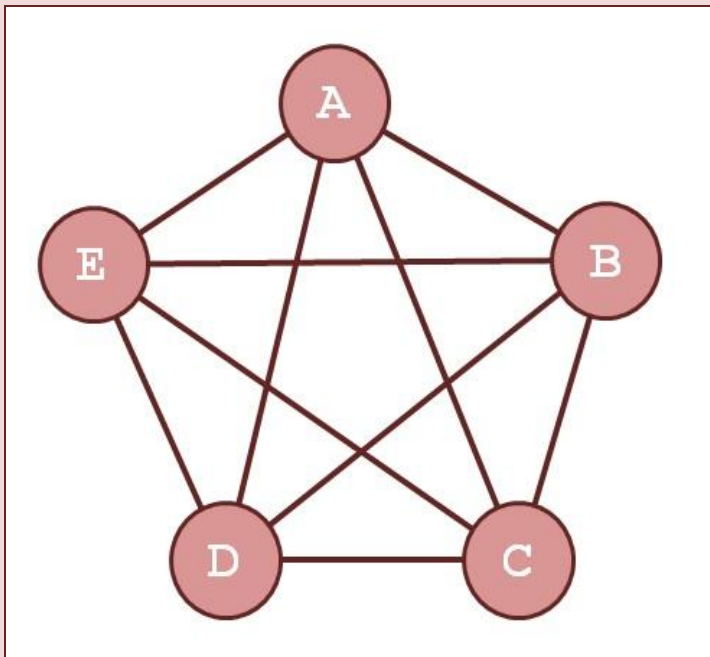


Задание 7.

Назовите в графе циклы, содержащие

- а) 4 ребра;
- б) 6 ребер;
- с) 5 ребер;
- д) 10 ребер.

Какие из этих циклов являются простыми?



ОТВЕТ

