

**Финансовый Университет при Правительстве РФ**

**Кафедра «Прикладная математика».**

**Угрозов Валерий Вячеславович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ  
ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ**

# **Тема1. Финансовые инструменты.**

## **1.1. Процентные вычисления.**

**Простые и сложные проценты.**

## **1.2.Потоки платежей. Рента.**

## **1.3.Облигация. Дюрация.**

## **1.4. Производные финансовые инструменты.**

# Методология финансово-экономических расчетов

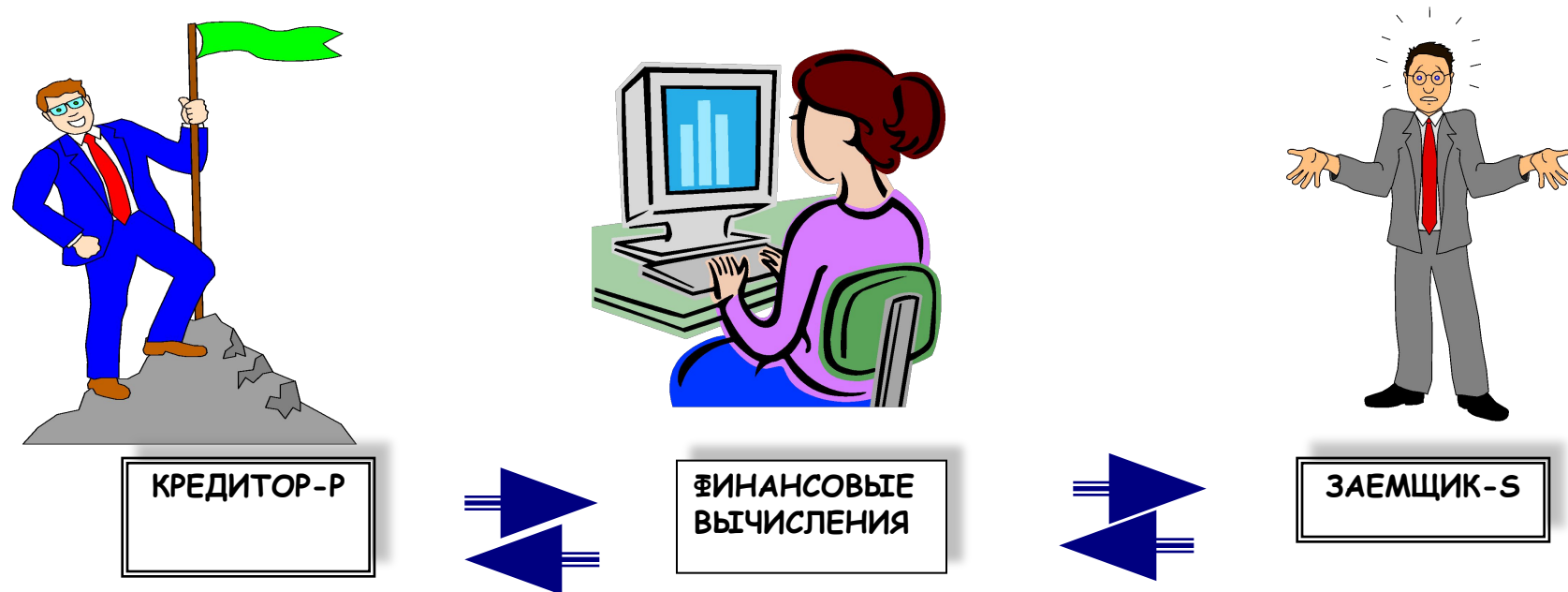


Рис.1. Схема взаимодействия кредитора и заемщика

- Заключая финансово-экономические сделки, договаривающиеся стороны оговаривают определенные условия, изменение которых сопряжены с выгодой для одной стороны и убытками с другой стороны. Учитывая это обстоятельство, обе стороны заинтересованы в объективной и грамотной количественной оценке условий сделки, которая строится на **основе финансовых вычислений**.

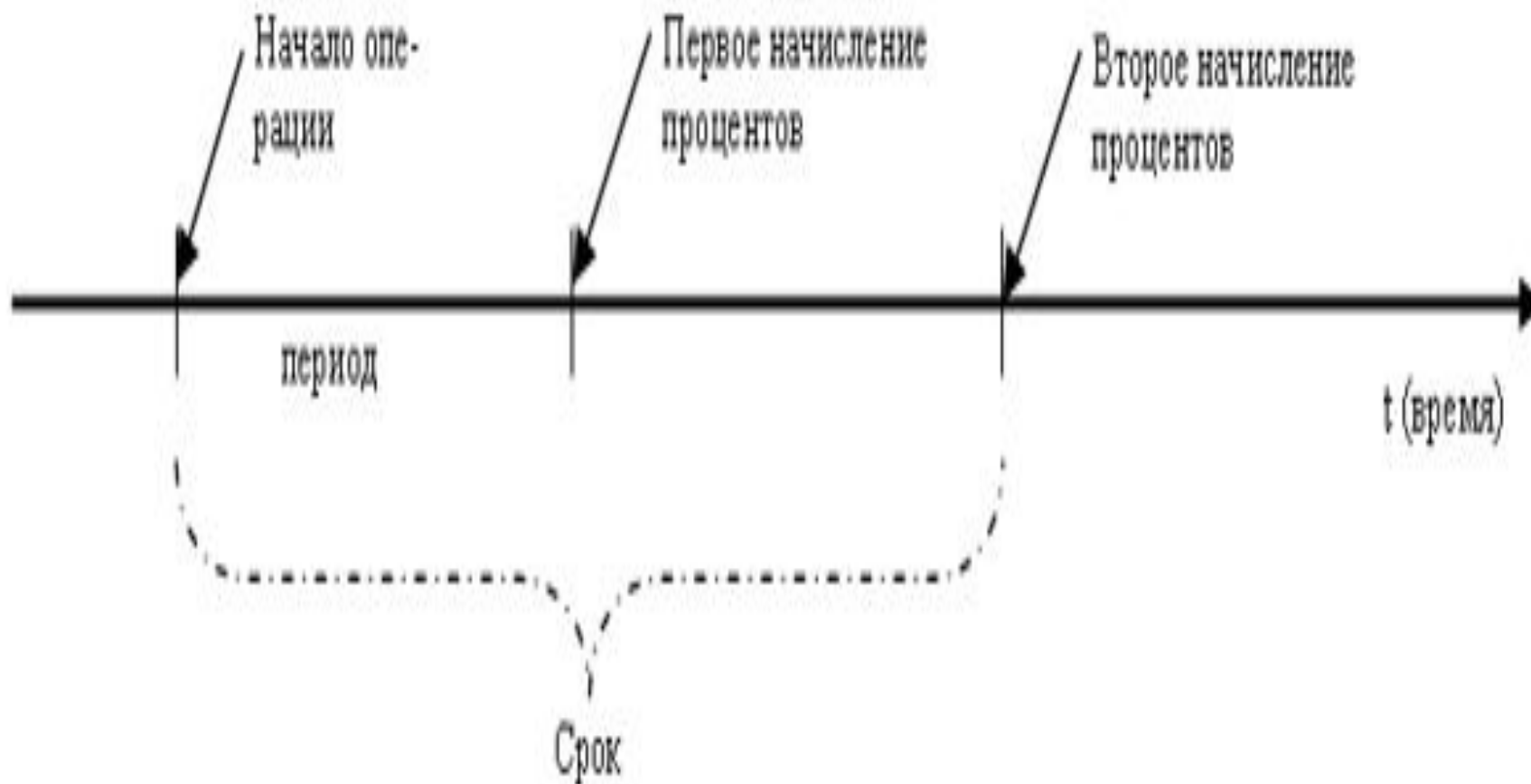
# Время как фактор в финансовых расчетах.

- Учет фактора времени обусловлен **неравноценностью денег**. Равные по абсолютной величине «сегодняшние» деньги ценнее будущих. Зависимость ценности денег от времени объясняется тремя причинами:
- 1. Деньги могут эффективно использоваться, как финансовый актив, **приносящий доход**, то есть их можно инвестировать и тогда они будут приносить доход.
- 2. **Инфляционные процессы** обесценивают деньги во времени, то есть сегодня на рубль можно купить товара больше чем завтра.
- 3. Неопределенность будущего и связанный с этим **риск** **повышают ценность имеющихся денег**. Имея рубль сегодня его уже можно израсходовать на потребление, а будет ли он завтра – еще вопрос.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

- **1.  $P$  – первоначальная сумма долга или современная (текущая) стоимость ( $PV$ - present value); )**
- **2.  $I$  – проценты (процентные деньги)  $I$  - абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в виде: выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, учета векселя, помещения денег в банк и т.д.**
- **3. Наращение первоначальной суммы - процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга.**
- **4.  $S=P+I$  – наращенная сумма или будущая стоимость ( $FV$ - future value), т.е. первоначальная сумма долга с начисленными на нее процентами к концу срока ссуды**

# Схема начисления процентов



# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

- Процентная ставка  $i$  - отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды.

$$i = (S - P) / P$$

- Период начисления  $n$  - интервал времени, к которому относится процентная ставка.
- Коэффициент наращения или множитель наращения  $K$ , – это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга

$$K = S / P$$



# Способы начисления процентных ставок

- **Простые** ставки процентов применяются к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды;
- **Сложные** ставки процентов применяются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.
- Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть:
- **Постоянными** – их величина не изменяется с течением времени;
- **Переменными («плавающими»)** – значение ставки может быть равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней (**маржи**).



# 1. Простые проценты

- Пусть :  $P$  - первоначальная сумма денег, ден. ед.,  $i$  - ставка простых процентов, в % или долях.

- **Схема начисления простых % :**

- $$S = P + Pi + Pi + Pi + \dots + Pi$$

- $S$  определяется по формуле простых процентов

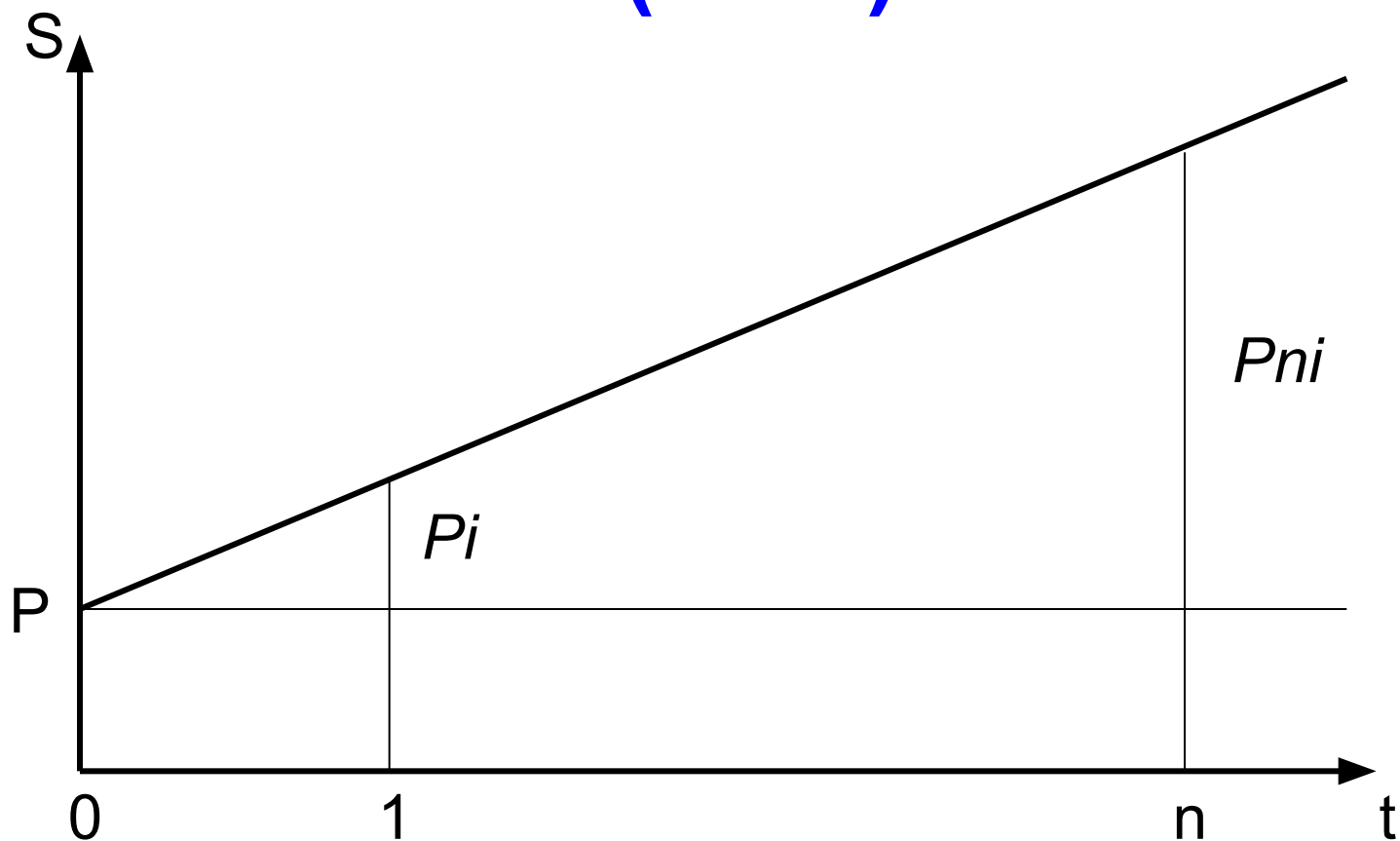
- $$S = P * (1 + n * i) = P + I \quad (1.1)$$

- $$I = P * n * i \quad (1.2)$$

- где  $K_{n,i} = S/P = (1 + n i)$  - множитель наращения;
- $I$  – проценты (процентные деньги)

# Простые проценты

$$S = P(1 + ni)$$



**Пример 1.1.** Ссуда размером  $P=100\ 000$  руб. выдана на срок  $n=1,5$  года при ставке простых процентов равной  $i=15\%$  годовых. Определить  $I$  - проценты и  $S$ -сумму накопленного долга

- Для расчета процентов  $I$  за пользование ссудой в течение 1,5 лет воспользуемся формулой (1.2):
- $I = P \cdot n \cdot i = 100\ 000 \cdot 1,5 \cdot 0,15 = 22\ 500$  руб.
- По формуле (1.1), находим сумму накопленного долга  $S$  по истечении 1,5 лет:
- $S = P + I = 100\ 000 + 22\ 500 = 122\ 500$  руб.

## *Практика начисления простых процентов*

- Ставка процентов обычно  
устанавливается в расчете за год!!!
- При продолжительности ссуды менее года, величину  $n$  выражают в виде дроби:
- $$n = t / T \quad (1.3)$$
где  $n$  - **срок ссуды** (измеренный в долях года),  $t$  - **срок операции** (срок пользования ссудой) в днях,  $T$  - **число дней в году** (временная база).

# Практика начисления простых процентов

- В практике используются три варианта расчета :
- а) точные проценты (“английская практика расчета”):
  - $$n = t_T / T_T \quad (1.3.1)$$
  - где  $t_T$  - точное число дней ссуды и  $T_T = 365$  или  $366$  дней.
- б) обыкновенные (коммерческие) проценты (“французская практика расчета”):
  - $$n = t_T / T_o \quad (1.3.2)$$
  - где  $T_o = 360$  дней
- в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (“германская практика расчета”),
  - $$n = t_o / T_o \quad (1.3.3)$$
  - где  $t_o$  - продолжительность ссуды определяется числом месяцев, когда все месяцы содержат по 30 дней, и дней ссуды.)
- Замечание. При расчетах дата выдачи и дата погашения долга считается **за один день**. Вариант расчета с приближенным измерением времени ссуды и точной временной базы **не применяется**.

пример: 1.2. Ссуда, размером 100 000 руб., выдана на срок с 21 января 2009 г. до 3 марта 2009 г. при ставке простых процентов, равной 15% годовых. Найти: а) **точные проценты** с точным числом дней ссуды; б) **обыкновенные проценты** с точным числом дней ссуды; в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

- **Решение.**
- Для вычисления воспользуемся формулами:  
$$I = P n i = P (t / T) i; \quad n = t / T$$
- а)  $T = 365, t = 41, \quad I_a = 100\,000 * 41 / 365 * 0,15 = 1\,684,93$  руб.
- б)  $T = 360, t = 41, \quad I_b = 100\,000 * 41 / 360 * 0,15 = 1\,708,33$  руб.
- в)  $T = 360, t = 42, \quad I_v = 100\,000 * 42 / 360 * 0,15 = 1\,750,00$  руб.



Б У Д У Щ Е Е...  
Возвращаемая сумма (S)



П р и в е д е н н а я с у м м а (P)

Ожидаемая к поступлению  
сумма (S)  
Учетная ставка (d)

# **Дисконтирование и учет по простым ставкам**

- В практике финансовых вычислений часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме  $S$ , соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму  $P$ .
- Расчет  $P$  по **ИЗВЕСТНОМУ ЗНАЧЕНИЮ  $S$**  называется дисконтированием суммы  $S$ .
- Величину  $P$ , найденную дисконтированием, называют современной величиной (текущей стоимостью) суммы  $S$ .
- Проценты в виде разности  $D = S - P$  называются дисконтом или скидкой.
- В финансовых вычислениях используется два вида дисконтирования:
  - **математическое дисконтирование;**
  - **банковский (коммерческий) учет.**



# ***Математическое дисконтирование***

- ***Математическое дисконтирование.***  
решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды.
- Если в прямой задаче рассчитывается наращенная сумма  $S = P(1 + n*i)$ , то в обратной находится

- $$P = S * 1 / (1 + n*i) \quad (1.5)$$

- **Дисконт суммы  $S$**  равен

- $$D = S - P \quad (1.6)$$

**Пример 1.4.** Через 90 дней после подписания договора должник уплатит 1 000 000 руб. Кредит выдан под 20% годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма и дисконт?

- Дано:  $S = 1\,000\,000$  руб.,  $n = t/K = 90/360$ ,  $i = 0,20$  или 20%. Найти  $P = ?$
- **Решение:** Воспользуемся формулами (1.5) и (1.6):
- $P = S / (1 + n*i) = 1\,000\,000 / (1 + 0,20*90/360) = 952\,380,95$  руб.
- $D = S - P = 1\,000\,000 - 952\,380,95 = 47\,619,05$  руб.

# **Банковский или коммерческий учет** (учет векселя)

- **Банковский или коммерческий учет** (учет векселя) заключается в том, что банк до наступления срока -**n** платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене –**P** ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока-**S**, то есть приобретает (учитывает) его с дисконтом-**D**. Для расчета процентов при учете векселей применяется **учетная ставка**, которая обозначена символом **d**.
- Простая годовая **учетная ставка** рассчитывается по формуле:
- $$d = (S - P) / S * n \quad (1.7)$$

# **Банковский или коммерческий учет**

- Размер дисконта, удерживаемого банком, равен

- 

- $$D = S * n * d = S * (t / T) * d, \quad (1.8)$$

- откуда

- $$P = S - D = S * (1 - (t / T) * d) \quad (1.9)$$

- **Замечание :**

- 1)  $n$  - измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах.
- 2) Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

Пример 1.5. Через 90 дней предприятие должно получить по векселю 1 000 000 рублей. Банк приобрел этот вексель с дисконтом. Банк учел вексель по учетной ставке 20% годовых (год равен 360 дням). Определить дисконт  $D$  и полученную предприятием сумму  $P$ .

- Дано:  $S = 1\,000\,000$  руб.,  $t = 90$  дней,  $d = 0,20$  или 20%. Найти  $D = ?$ ,  $P = ?$
- Решение.
- Для вычисления дисконта воспользуемся формулой (1.8)
- $D = S * (t / T) * d = 1\,000\,000 * (90/360) * 0,20 = 50\,000$  руб.
- По формуле (1.9) рассчитаем сумму, которую предприятие получит в результате учета векселя:
- $P = S - D = 1\,000\,000 - 50\,000 = 950\,000$  руб.

## 2. Сложные проценты

- Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях (сроком более 1 года), если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга.
- Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называют капитализацией процентов.

## **2.1. Наращение по сложным процентам с постоянной ставкой**

- Пусть первоначальная сумма долга равна  $P$ , тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит  $S_1 = P(1+i)$ , через 2 года:  $S_2 = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2, \dots$  через  $n$  лет:
- **Схема начисления:**  $\{P + Pi\} + \{P(1+i) + P(1+i)i\} + \{P(1+i)^2 + P(1+i)^2i\} + \dots =$
-

# **Формула наращенния для сложных процентов**

- 

- $$S = P \cdot (1 + i)^n, \quad (2.1)$$

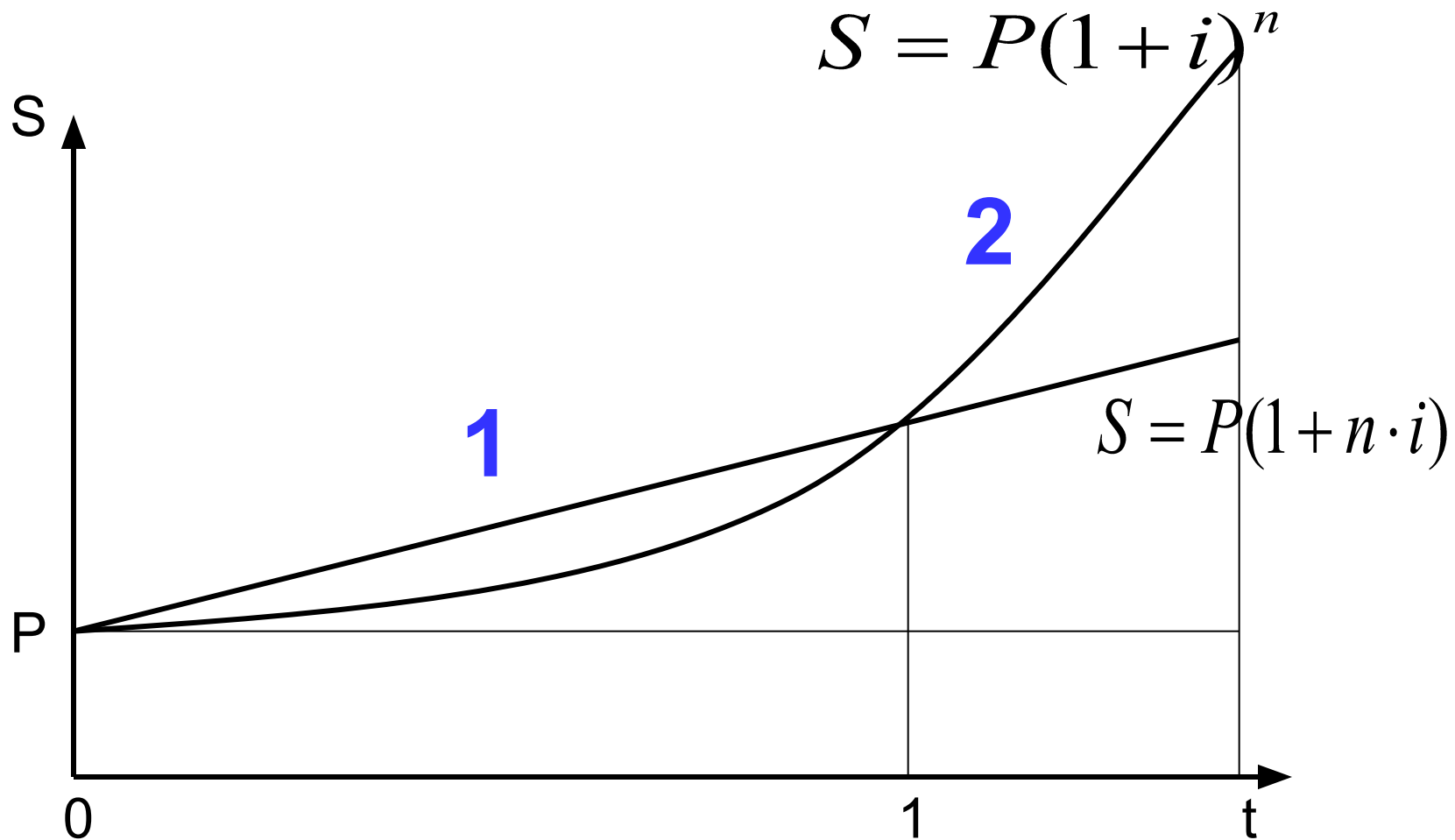
- где  $S$  – наращенная сумма,  $i$  – годовая ставка сложных процентов,  $n$  – срок ссуды,  $K_p = (1 + i)^n$  – множитель наращения.

- 

## **Замечание.**

- На практике обычно используют дискретные проценты (проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени: год, полугодие, квартал).





**Зависимость  $S$  от времени- $n$ : 1-простые % и 2-сложные %.**

**Пример 2.1. В кредитном договоре на сумму 1 000 000 руб. и сроком на 4 года зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20% годовых. Определить наращенную сумму по истечении указанного срока.**

- Дано:  $P = 1\,000\,000$  руб.,  $n = 4$  года,  $i = 0,20$  или 20%. Найти  $S = ?$

**Решение.**

- Используя формулу(2.1) получим:
- $S = P (1 + i)^n = 1\,000\,000 * (1 + 0,20)^4 = 2\,073\,600$  руб.

## **2.2. *Наращение по сложным процентам при изменении ставки во времени***

Если ставка сложных процентов меняется во времени, то формула наращения имеет вид:

$$S = P \cdot (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1 + i_m)^{n_m} = P \cdot \prod_{k=1}^m (1 + i_k)^{n_k} \quad (2.2)$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_k$  - значения ставок процентов, действующих в соответствующие периоды времени  $n_1, n_2, \dots, n_k$ ,  
множитель наращения.  $\prod_{k=1}^m (1 + i_k)^{n_k}$  -

# **Номинальная ставка процентов**

Пусть **годовая ставка сложных процентов** равна  $j$ , а **число периодов начисления в году**  $m$ . При каждом начислении проценты капитализируются, то есть добавляются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. Каждый раз проценты начисляют по ставке  $j/m$ .

Ставка  $j$  - называется **номинальной**.

**Начисление процентов по номинальной ставке**  
производится по формуле:

$$S = P * (1 + j/m)^N, \quad (2.3)$$

где  $N$  - число периодов начисления ( $N = m*n$ , может быть и дробным числом).

**Пример 2.3.** Ссуда 20 000 000 руб. предоставлена на **28 месяцев** под сложные проценты 18% годовых. Проценты начисляются **ежеквартально**. Вычислить наращенную сумму по истечении срока.

- Дано:  $P = 20\,000\,000$  руб.,  $j = 0,18$  (18%) ,
- $n = 28$  месяцев =  $28/12$  лет,  $m = 4$ . Найти  $S = ?$

**Решение.**

- **Всего за  $n$  лет имеем  $N = m \cdot n = 4 \cdot (28/12) = 28/3$  периодов начислений при ежеквартальном ( $m = 4$ ) начислении процентов в году.**
- **Далее по формуле (2.3) находим:  $S = 20\,000\,000 \cdot (1 + 0,18 / 4)^{(28/3)} = 30\,161\,206,25$  руб.**

# Эффективная ставка

- **Эффективная ставка** показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и  $m$ -разовое наращение в год по ставке  $j/m$ .

- Если проценты капитализируются  $m$  раз в год, каждый раз со ставкой  $j/m$ , то, по определению, можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1 + i_{\text{э}})^n = (1 + j/m)^{m \cdot n} \quad (2.4)$$

- где  $i_{\text{э}}$ ,  $j$  - эффективная и номинальная ставки.
- **Зависимость эффективной от номинальной ставки** выражается соотношением  $i_{\text{э}} =$

$$(1 + j/m)^m - 1 \quad (2.5)$$

- **Зависимость номинальной от эффективной ставки** выражена следующей формулой:

$$j = m [(1 + i_{\text{э}})^{1/m} - 1] \quad (2.6)$$

**Пример 2.4. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально –  $m=4$ , исходя из номинальной ставки  $j=0,16$  или 16% годовых.**

**Решение**

**Вычисления проводим по формуле (2.5) и находим**

$$i_{\text{э}} = (1 + 0,16 / 4)^4 - 1 = 0,170, \text{ или } 17,0\%.$$

**Пример 2.5. Определить, какой должна быть номинальная ставка- $j=?$  при ежеквартальном начислении процентов- $m=4$ , чтобы обеспечить эффективную ставку  $i_{\text{э}}= 12\%$  годовых.**

**Решение.**

**Вычисления произведем по формуле (2.6):**

$$j = m [(1 + i_{\text{э}})^{1/m} - 1] = 4 * [ (1 + 0,12)^{(1/4)} - 1 ] = 0,11495, \text{ т.е. } 11,495\%.$$

## **Дисконтирование по сложной ставке %**

- **Определение.** Величина  $P$  полученная дисконтированием  $S$ , называется **современной (текущей) стоимостью**, или **приведенной величиной  $S$** .

- $$P = S * 1 / (1 + i)^n \quad (2.7)$$

- При начислении процентов  $m$  раз в году :

- $$P = S / (1 + j / m)^{n * m} \quad (2.8)$$

- $$D = S - P - \text{дисконт}$$



**Пример 2.5.** Через 5 лет предприятию будет выплачена сумма 1 000 000 руб. Определить его современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов в 14% годовых.

- Дано:  $n = 5$  лет,  $S = 1\,000\,000$  руб.,  $i = 0,14$  или 14%.
  - Найти  $P = ?$
- Решение.**
- Вычисления выполним по формуле :
  - $P = S / (1 + i)^n = 1\,000\,000 / (1 + 0,14)^5 = 519\,368,66$  руб.

# ***Банковский учет.***

- Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

- $$P = S(1 - d_{сл})^n \quad (2.9)$$

- где  $d_{сл}$  - сложная годовая учетная ставка.

- ДИСКОНТ :

- $$D = S - P = S[1 - (1 - d_{сл})^n] \quad (2.10)$$

**Пример 2.6.** Через 5 лет по векселю должна быть выплачена сумма 1 000 000 руб. Банк учел вексель по сложной учетной ставке в 10% годовых. Определить сумму, которую получит векселедержатель и дисконт, который получит банк по истечении срока векселя.

- Дано:  $n = 5$  лет,  $S = 1\,000\,000$  руб.,  $d_{сл} = 0,10$  или 10%. Найти  $P = ?$ ,  $D = ?$
- **Решение.**
- Расчет суммы, которую получит векселедержатель, выполним по формуле (2.9):
- $P = S(1 - d_{сл})^n = 1\,000\,000 * (1 - 0,10)^5 = 590\,490,00$  руб.
- Расчет дисконта, который получит банк, выполним по формуле (2.10):
- $D = S - P = 1\,000\,000 - 590\,490 = 409\,510,00$  руб.

# Непрерывное начисление процентов

- *Непрерывное начисление процентов используется при анализе сложных финансовых задач, например, обоснование и выбор инвестиционных решений. Оценивая работу финансового учреждения, где платежи за период поступают многократно, целесообразно предполагать, что наращенная сумма непрерывно меняется во времени и применять*
- **формулу для непрерывного начисления процентов**
- **$S = P \cdot \exp^{j \cdot n} = P \cdot \exp^{\delta \cdot n}$ , (2.11)**
- *где  $\delta=j$  – сила роста*

**Пример .** Кредит в размере на 100 тыс. долларов получен сроком на 3 года под 8% годовых. Определить сумму подлежащего возврату в конце срока кредита, если проценты будут начисляться: а) один раз в год; б) ежедневно; в) непрерывно.

- Решение
- а) начисление один раз в год:  
$$S = 100'000 \cdot (1 + 0,08)^3 = 125'971,2 \text{ дол.};$$
- б) ежедневное начисление процентов:  
$$S = 100'000 \cdot (1 + 0,08 / 365)^{365 \cdot 3} = 127'121,6 \text{ дол.};$$
- в) непрерывное начисление процентов:  
$$S = 100'000 \cdot \exp^{0,08 \cdot 3} = 127'124,9 \text{ долларов.}$$

# ДОХОДНОСТЬ

- *Доходность — это относительный показатель, который говорит о том, какой процент приносит рубль инвестированных средств за определенный период.*
- В финансовой практике принято, что показатель доходности или процент на инвестиции обычно задают или определяют в расчетах на год, если специально не сказано о другом временном периоде. Поэтому, если говорится, что некоторая ценная бумага приносит 20%, то это следует понимать, как 20% годовых.

# Доходность за период

- Доходность за период — это доходность, которую инвестор получит за определенный период времени.

$$r = \frac{P_n}{P} - 1$$

где:  $r$  — доходность за период;

$P$  — первоначально инвестированные средства;

$p_n$  — сумма, полученная через  $n$  лет.

# Доходность в расчете на год

$$r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P}} - 1$$

где:  $r$  — доходность в расчете на год;  
 $n$  — число лет.

- Если сложный процент начисляется  $m$  раз в год, то доходность за год определяется на формуле:

$$r = m \sqrt[mn]{\frac{P_n}{P}} - 1$$



## Процентные ставки и инфляция

*Номинальная процентная ставка* — это процентная ставка без учета инфляции. В качестве номинальных выступают процентные ставки банковских учреждений. Номинальная ставка говорит об абсолютном увеличении денежных средств инвестора.

Реальная процентная ставка — это ставка, скорректированная на процент инфляции. Реальная ставка говорит о приросте покупательной способности средств инвестора.

$$1 + \underset{\text{ставка}}{\text{номинальная}} = (1 + \underset{\text{процента}}{\text{реальная ставка}}) \cdot \frac{\text{уровень цен в конце рассматриваемого периода}}{\text{уровень цен в начале рассматриваемого периода}}$$

$$1 + r = (1 + y)(1 + i)$$

$$1 + r = (1 + y)(1 + i)$$

где:  $r$  — номинальная ставка процента;  
 $y$  — реальная ставка процента;  
 $i$  — темп инфляции.

Выполнив преобразование получим

$$y = \frac{1 + r}{1 + i} - 1$$

Если  $y, i \ll 1$ , то

$$y = r - i$$