

Лекция 4. Основы планирования эксперимента.

Дополнительная литература по теме:

1. Фишер Р.А. Планирование эксперимента. Монография.
2. Налимов В.В. Теория эксперимента. М.: Наука, 1971. 207 с.
3. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных: перевод с английского.
М.: Мир, 1981. 520 с.

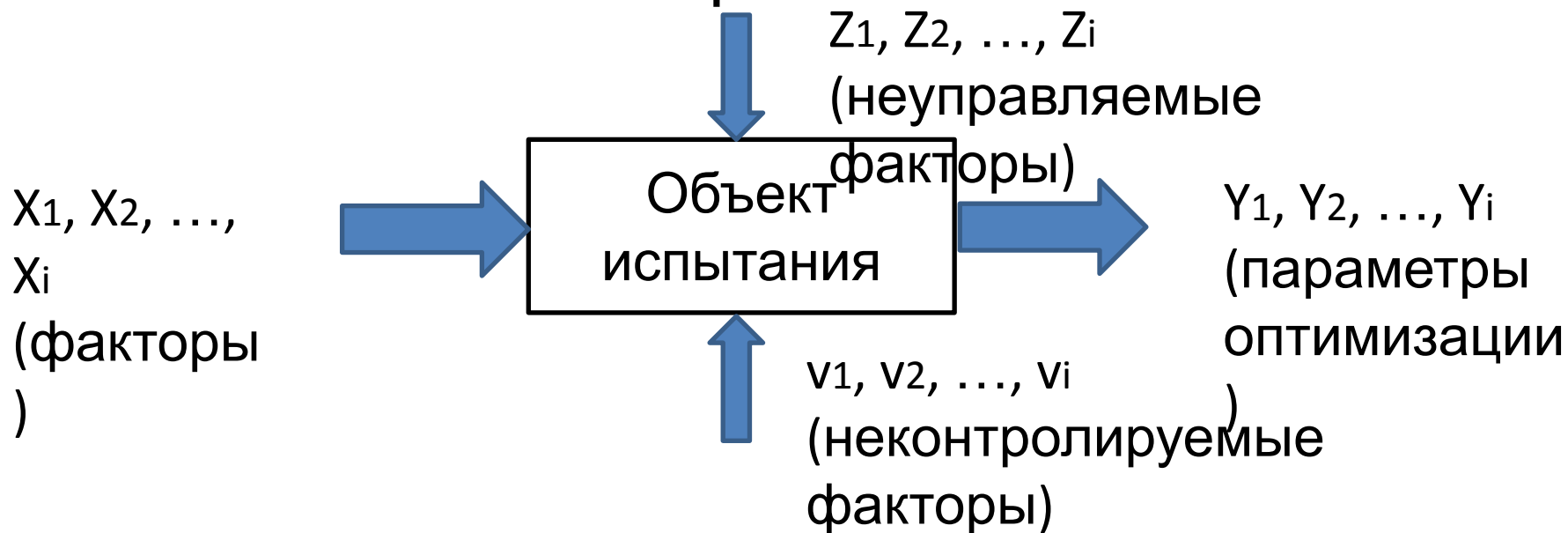
Виды эксперимента

Вид эксперимента	Особенности/цель
1. Элиминирующий	Выявить и устранить влияние неоднородностей
2. Сравнительный	Оценить влияние каждого фактора на процесс
3. Отсеивающий	Отобрать для исследования существенные факторы
4. Экстремальный	Выбор оптимальных режимов проведения эксперимента
5. Аппроксимирующий	Выявление математической модели процесса
6. Численный	Замена физического эксперимента математической моделью
7. Идентифицирующий	Определение характеристик/коэффициентов в математической модели объекта
8. Экстраполирующий	Предсказание изменений параметров объекта

Задачи с использованием планирования эксперимента

- Поиск оптимальных условий проведения эксперимента;
- построение интерполяционных формул;
- выбор существенных факторов;
- оценка и уточнение констант теоретических моделей...

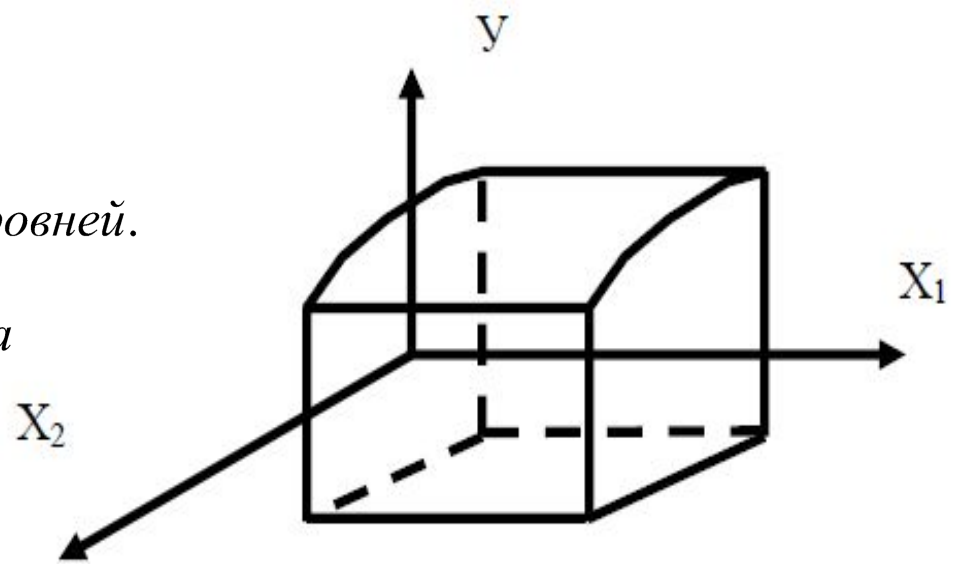
Схема «черного ящика»



Факторы			Параметры оптимизации
Любая величина, влияющая на параметр			Экономические величины (затраты, себестоимость...) или технические (к.п.д., температура, плотность потока, расход энергии...)
Контролируемы е+управляемые X	Контролируемые +неуправляемые Z	Неконтр-ые +неуправляемы e v	Y
<u>Требования к факторам:</u> 1. Операционная определимость. 2. Безопасность эксперимента при всех значениях. 3. Управляемость, экспериментатор устанавливает значение уровня по своему усмотрению. 4. Точность установления факторов должна быть существенно выше точности определения параметра. 5. Фактор должен быть количественным.			<u>Требования к параметрам:</u> 1. Должны оцениваться числом 2. Безопасность испытаний при любом сочетании параметров. 3. Одному сочетанию факторов должно соответствовать одно значение параметра. 4. Рекомендуется, чтобы параметр был единственным

$N = p^k$ – число экспериментов,
где k – число факторов; p – число уровней.

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – функция отклика



Функция
отклика

Полином первой

степени:

$$y = b_0 + \sum_1^k b_i x_i + \sum_1^k b_{ij} x_i x_j$$

Полином второй

степени:

$$y = b_0 + \sum_1^k b_i x_i + \sum_1^k b_{ij} x_i x_j + \sum_1^k b_{ii} x_i^2$$

Полином третьей

степени:

$$y = b_0 + \sum_1^k b_i x_i + \sum_1^k b_{ij} x_i x_j + \sum_1^k b_{ijj} x_i^2 x_j + \sum_1^k b_{ijj} x_i x_j^2 + \sum_1^k b_{iii} x_i^3$$

y – значения критерия;
 b_i – линейные коэффициенты;
 b_{ij} – коэффициенты двойного взаимодействия;
 x_i – кодированные значения факторов.

Относительные единицы факторов

Пример

$t, ^\circ\text{C}$	30	40	50
x	-1	0	+1

$$x_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}$$

где Δx_i – разница между средним и минимальным значением фактора (интервал варьирования);

x_i – значение фактора в абсолютных величинах;

x_{i0} – абсолютное значение фактора в центре эксперимента;

Если, например, $x_i = 45$, то его значение в относительных единицах:

$$x_i = \frac{45 - 40}{10} = 0,5$$

Обобщенный параметр

Если один параметр обозначен через y_1 , а другой – через y_2 , и число опытов N , то коэффициент парной корреляции $r_{y_1 y_2}$ будет:

$$\bar{y}_1 = \sum_{u=1}^N \frac{y_{1u}}{N}; \bar{y}_2 = \sum_{u=1}^N \frac{y_{2u}}{N}.$$

$$r_{y_1 y_2} = \frac{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1) \cdot (y_{2u} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{u=1}^N (y_{1u} - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{u=1}^N (y_{2u} - \bar{y}_2)^2}}$$

1) Минимальность отклонений откликов от опт.

$$y = \sqrt{k_1 \cdot \left(\frac{y_1 - y_{1\text{опт}}}{y_{1\text{э}}} \right)^2 + k_2 \cdot \left(\frac{y_2 - y_{2\text{опт}}}{y_{2\text{э}}} \right)^2 + \dots}$$

2) Построение отклика по двухбалльной шкале.

$$Y_i = \sqrt{\prod_{u=1}^n y_{ui}}$$

$$y_{1i} = \begin{cases} 1, \text{ если } y_{1i} < 30 \\ 0, \text{ если } y_{1i} \geq 30 \end{cases}$$

$$y_{2i} = \begin{cases} 1, \text{ если } y_{2i} > 85 \\ 0, \text{ если } y_{2i} \leq 85 \end{cases}$$

$$y_{3i} = \begin{cases} 1, \text{ если } y_{3i} < 110 \\ 0, \text{ если } y_{3i} \geq 110 \end{cases}$$

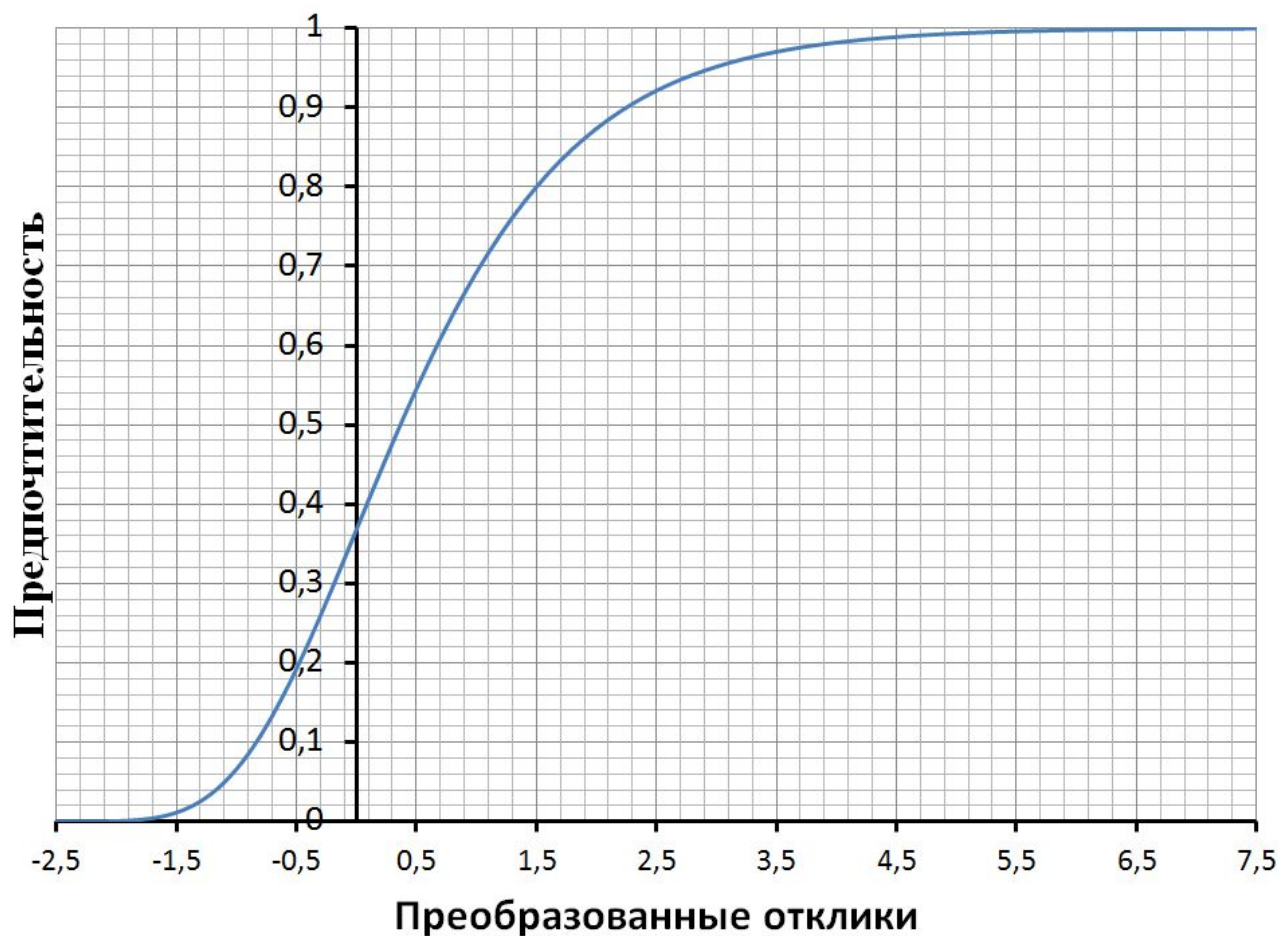
$$y_{4i} = \begin{cases} 1, \text{ если } y_{4i} < 2500 \\ 0, \text{ если } y_{4i} \geq 2500 \end{cases}$$

№ опыта	Отклики				Преобразованные отклики				Обобщенный параметр
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	Y
1	25	83	115	2900	1	0	0	0	0
2	27	86	105	2450	1	1	1	1	1
3	31	89	102	2490	0	1	1	1	0
4	29	88	109	2400	1	1	1	1	1
5	33	86	117	2590	0	1	0	0	0

2) Функция желательности Харрингтона.

Предпочтительность d_j	Отметки
Отлично	1,00 – 0,80
Хорошо	0,80 – 0,63
Удовлетворительно	0,63 – 0,37
Плохо	0,37 – 0,20
Очень плохо	0,20 – 0,00

$$d(y_{\text{безр}}) = e^{-e^{-y}}$$



$$Y_i = \frac{\sum_{j=1}^n d_j}{n}$$

Предварительное изучение объекта

- 1) Сбор априорной информации.
- 2) Формулирование цели работы.
- 3) Составление схемы эксперимента: список и классификация факторов.
- 4) Выбор критерия.
- 5) Проведение отсеивающего эксперимента (метод ранговой корреляции, метод случайного баланса, метод насыщенного планирования).
- 6) Выбор основного уровня – наилучшая комбинация факторов на основе предварительного изучения объекта.
- 7) Определение интервалов варьирования факторов.

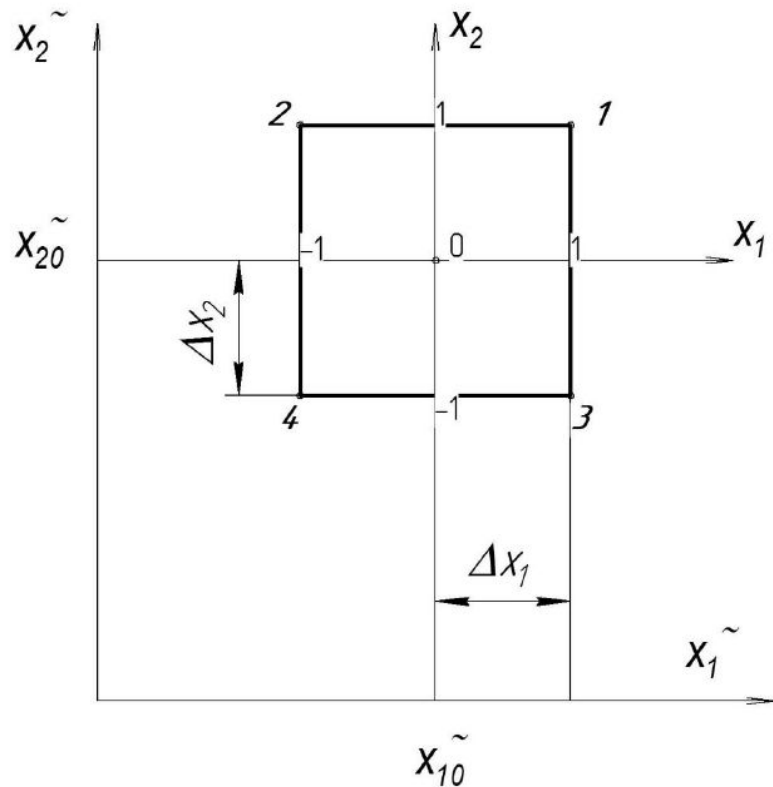
Полный факторный эксперимент

Матрица планирования эксперимента 2^2

$$N = p^k = 2^2 = 4.$$

№ опыта	x_1	x_2	y
1	+1	+1	y_1
2	-1	+1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	-1	-1	y_4

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$$



$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} \cdot y_i}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

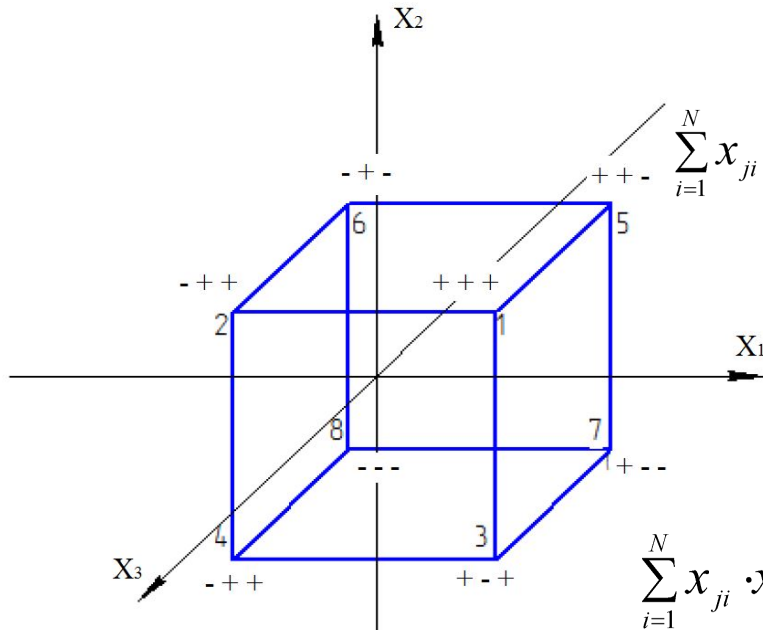
$$b_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

$$b_1 = \frac{(+1) \cdot y_1 + (-1) \cdot y_2 + (+1) \cdot y_3 + (-1) \cdot y_4}{4}$$

$$b_2 = \frac{(+1) \cdot y_1 + (+1) \cdot y_2 + (-1) \cdot y_3 + (-1) \cdot y_4}{4}$$

Матрица планирования эксперимента 2^3

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	+	y_1
2	-	+	+	y_2
3	+	-	+	y_3
4	-	-	+	y_4
5	+	+	-	y_5
6	-	+	-	y_6
7	+	-	-	y_7
8	-	-	-	y_8



**Первое
свойство**

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0, j, i - \text{номера фактора и опыта - соответственно.}$$

**Второе
свойство**

$$\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N$$

**Третье
свойство**

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} \cdot x_{ui} = 0, j, u - \text{номера двух любых вектор - столбцов.}$$

Дробный факторный

эксперимент

$\Delta = N - k = 2^k - k$; если $k = 10$, то $\Delta = 1014$.

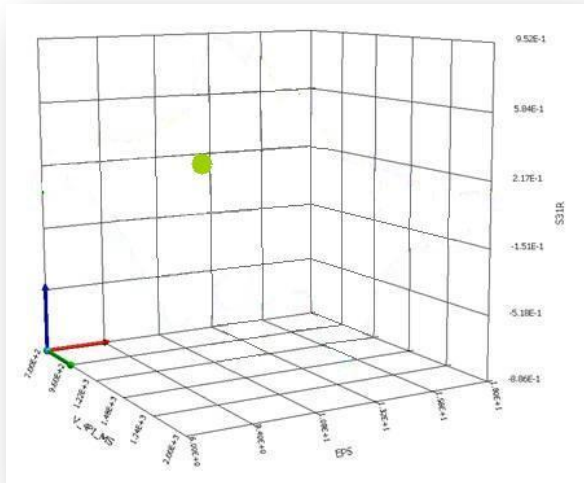
№ опыта	Фактор			
	X_1	X_2	X_3	$X_4(X_1 X_2 X_3)$
1	+	+	+	+
2	-	+	+	-
3	-	-	+	+
4	+	-	+	-
5	+	+	-	-
6	-	+	-	+
7	-	-	-	-
8	+	-	-	+

$X_4 = X_1 X_2 X_3$ – генерирующее
соотношение
 $X_1 X_2 X_3 X_4 = 1$ – определяющий
контраст

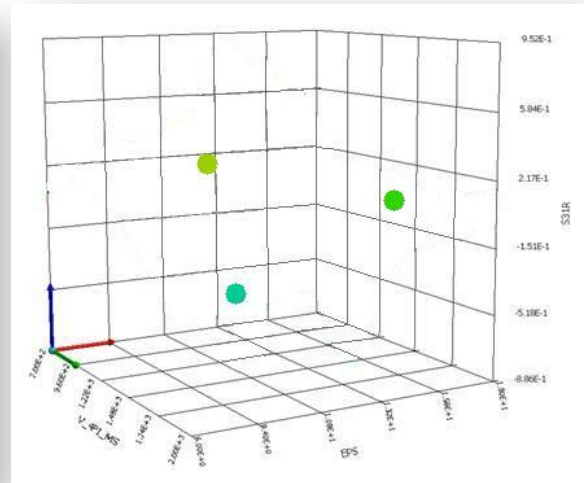
Планирование эксперимента в современных пакетах

(Ansys DesignXplorer)

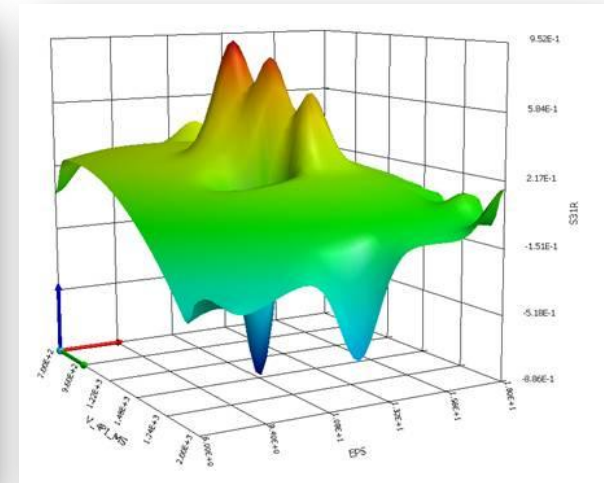
- Поиск условий для достижения наилучших характеристик;
- определение ключевых параметров, влияющих на конструкцию;
- исследование робастности конструкции.



Одиночный
расчет



Ручной перебор
вариантов



Поверхность отклика

- 1) Корреляционный анализ – поиск отношений между параметрами.
- 2) Планирование эксперимента (расчет необходимого набора вариантов)
- 3) Поверхность отклика – построение математической модели
- 4) Оптимизация (на основе поверхности отклика или прямые методы)
- 5) Анализ робастности, расчет 6-сигма.

1. Центральный композиционный план (CCD) (по умолчанию)
2. План Бокса-Бенкена
3. План оптимального заполнения пространства
4. Настраиваемый + заполнение
5. Инициализация разреженной сетки
6. Заполнение по методу Латинского Гиперкуба

