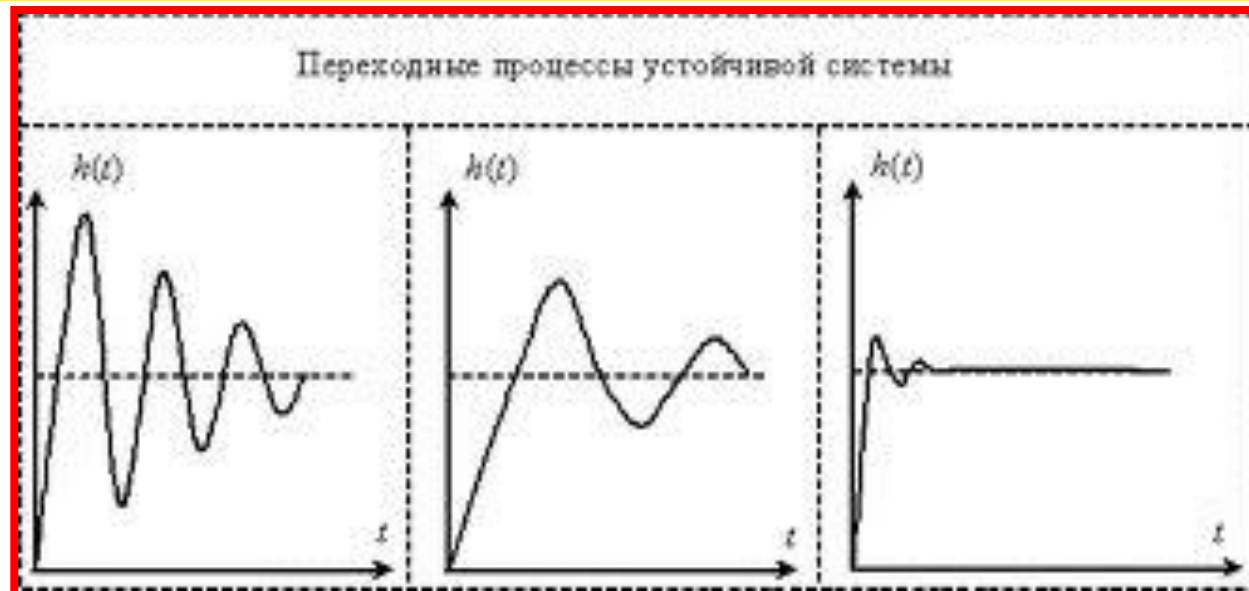


Дисциплина: Основы теории цепей



Лекция №14

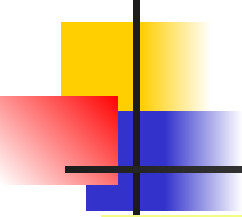
Тема: Операторный метод анализа переходных процессов





Учебные вопросы

- 1 Преобразование Лапласа и его свойства.
- 2 Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме. Операторная схема замещения.
- 3 Алгоритм анализа переходных процессов операторным методом.
- 4 Определение оригинала по его изображению. Теорема разложения.



Литература

- 1. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. "Радиотехника".-М.: Высшая школа, 2007, с. 331-342.**



Недостатки классического метода

1) ограниченность применения, используется в основном в тех случаях, когда исследуемая цепь имеет невысокий порядок сложности, а внешнее воздействие на нее после коммутации является гармонической функцией времени либо постоянно;

2) громоздкость при анализе переходных процессов цепей более второго порядка, так как нахождение свободной составляющей и постоянных интегрирований требует решение алгебраических уравнений высокого порядка.

Сущность операторного метода

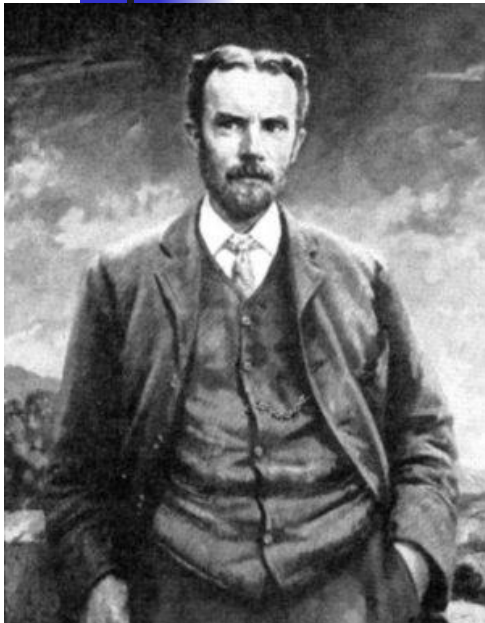
Расчет переходного процесса переносится из области функций действительной переменной (времени t) в область функций комплексного переменного $p = \alpha + j\omega$. При этом операции дифференцирования и интегрирования функций времени заменяются соответствующими операциями умножения и деления функций комплексного переменного на оператор p . Это существенно упрощает расчет, так как сводит систему дифференциальных уравнений к системе алгебраической.

Этапы развития операторного метода



1. Математическое обоснование
операторного метода впервые дано
в 1862г. русским математиком **М.Е.**
Ващенко-Захарченко, который
показал возможность применения
символического (операторного)
исчисления к интегрированию
дифференциальных уравнений на
основе прямого преобразования
Лапласа

Этапы развития операторного метода



2. В конце XIX в. английские инженеры-электрики **О.Хэвисайд** и **Д.Карсон** успешно применили и развили символический метод решения дифференциальных уравнений для расчета переходных процессов в электрических цепях

Преобразования Лапласа



Прямое преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

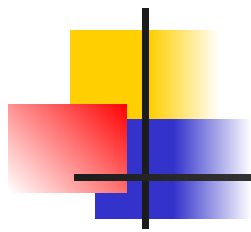
где $f(t)$ – ограниченная функция действительного переменного t , определенная при (при $t < 0$; $f(t) = 0$).

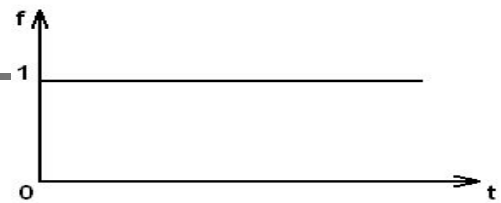
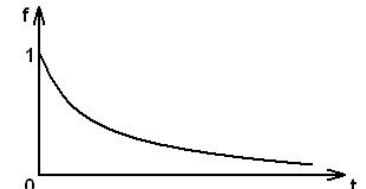
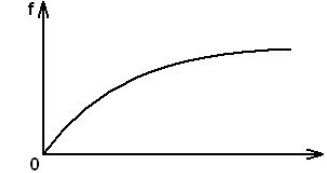
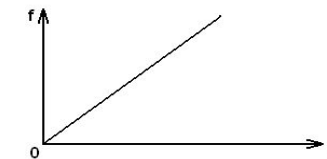
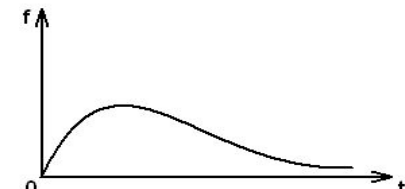
Обратное преобразование Лапласа определяют из решения уравнения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

Условные обозначения
соответствия оригинала и
изображения:

$$f(t) \equiv F(p); f(t) \leftrightarrow F(p); F(p) = L[f(t)]; f(t) = L^{-1}[F(p)]$$



Функция оригинал f(t)		Изображение функции F(p)
Выражение функции	Вид функции	
$1(t) \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0 \\ 1 \text{ при } t \geq 0 \end{cases}$		$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$		$\frac{1}{p + \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$		$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
t		$\frac{1}{p^2}$
$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$		$\frac{\beta - \alpha}{(p + \alpha)(p + \beta)}$



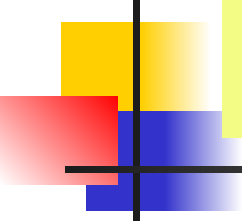
Свойства преобразования Лапласа

1. Теорема о сложении или линейность преобразования

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)]$$

2. Теорема о дифференцировании

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0_+)$$



Свойства преобразования Лапласа

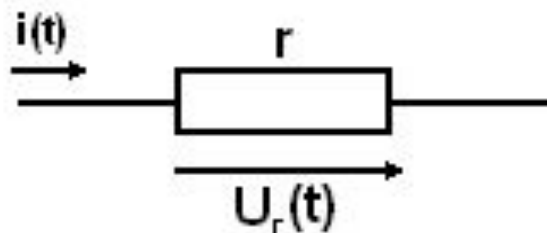
3. Теорема об интегрировании

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{p} F(p)$$

4. Теорема запаздывания

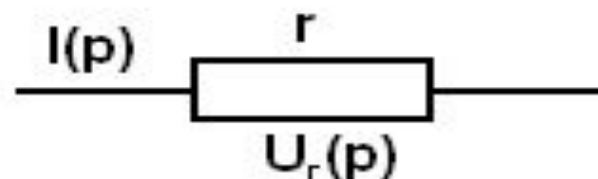
$$L[f(t - T)] = e^{-pT} L[f(t)] = e^{-pT} F(p)$$

Изображение напряжения на резистивном элементе



$$U_r(t) = r i(t)$$

$$U_r(p) = r \int_0^{\infty} e^{-pT} i(t) dt = r I(p)$$

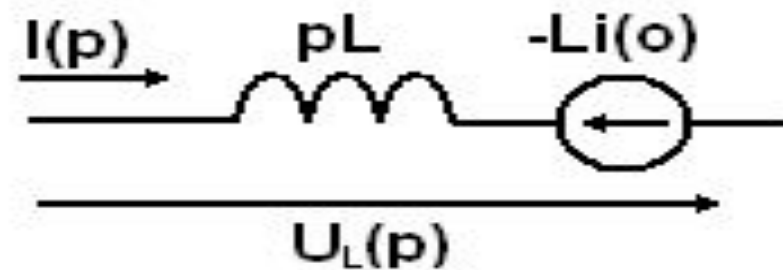
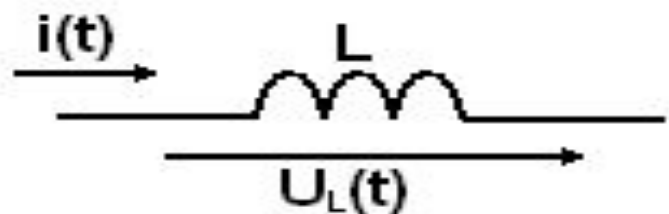


Операторная схема
замещения

$$U_r(p) = r I(p)$$

Закон Ома в операторной
форме для резистивного
элемента

Изображение напряжения на индуктивном элементе



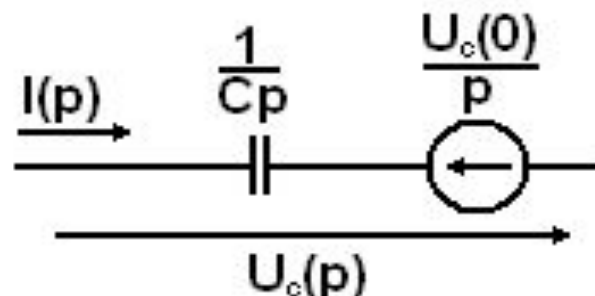
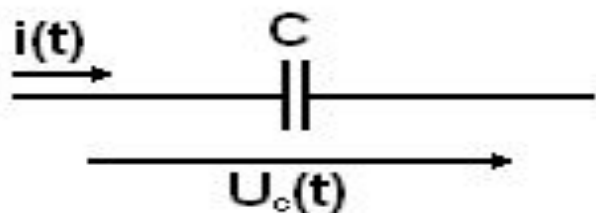
$$U_L = L \frac{di}{dt}$$

$$U_L(p) = -L i(0) + pLI(p)$$

Операторная схема
замещения

где $i(0) = i(0-) = i(0+)$ – ток в индуктивном элементе в момент коммутации $t = 0$, учитывающий начальные условия (согласно первого закона коммутации).

Изображение напряжения на ёмкостном элементе



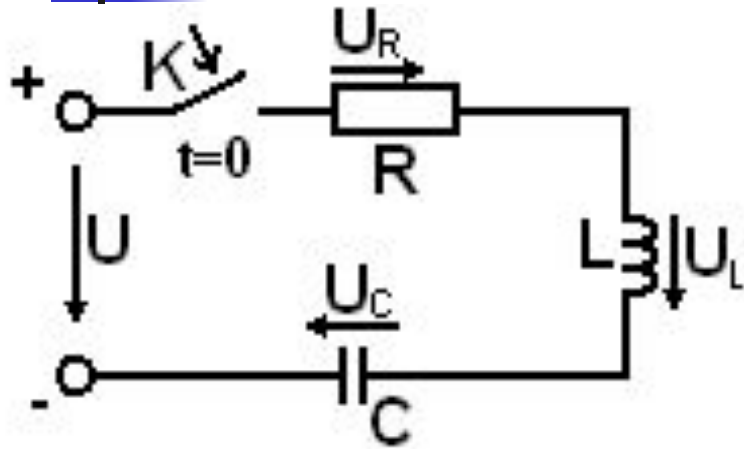
$$u_c(t) = u_c(0) \cdot 1(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt$$

**Операторная схема
замещения**

$$U_c(p) = \frac{u_c(0)}{p} + \frac{1}{Cp} I(p)$$

где $U_c(0) = U_c(0-) = U_c(0+)$ –
напряжение на емкостном
элементе, соответствующее
начальному условию (согласно
второго закона коммутации).

Закон Ома в операторной форме для последовательной цепи



$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - U_c / p}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{U_0(p)}{Z(p)}$$

где $U_0(p) = U(p) + Li(0) - \frac{U_c(0)}{p}$ – операторное напряжение

$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ – операторное сопротивление цепи

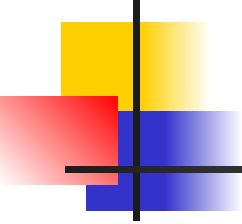
$$U_c(0_-) \neq 0; i_L(0_-) \neq 0$$

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t idt = Ri + L \frac{di}{dt} + U_c(0_-) + \frac{1}{c} \int_0^t idt$$

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}$$

$$U(p) = RI(p) + LpI(p) - Li(0) + \frac{U_c(0)}{p} + \frac{1}{Cp} I(p)$$

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = U(p) \cdot Y(p)$$



Законы Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0$$

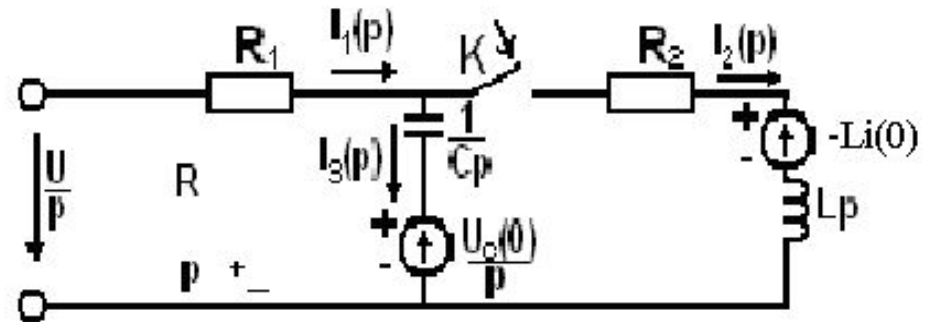
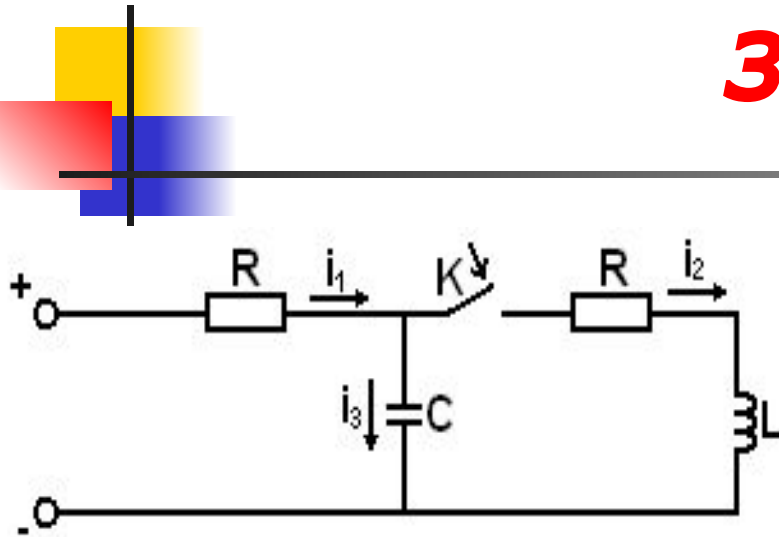
Он гласит: **алгебраическая сумма операторных токов в любом узле цепи равна нулю.**

Второй закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p)$$

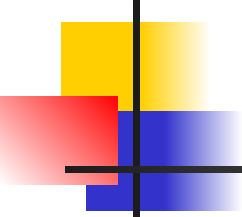
Он гласит: **алгебраическая сумма операторных падений напряжений на всех участках замкнутого контура равна алгебраической сумме операторных ЭДС, включенных в этот контур.**

Операторная схема замещения

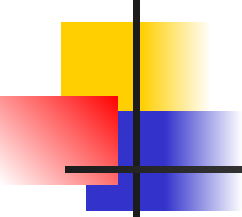


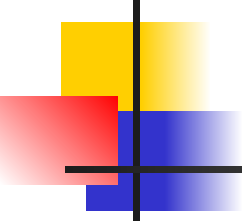
При составлении эквивалентных операторных схем источники тока и напряжений $i(t)$ и $U(t)$ заменяются соответствующими изображениями $I(p)$ и $U(p)$, индуктивность L заменяется на Lp , а емкость C – на $1/Cp$ при нулевых начальных условиях. Если начальные условия ненулевые, то последовательно с Lp добавляется источник напряжения $Li(0)$, а с C – источник напряжения $-Uc(0)p$

Алгоритм анализа переходных процессов операторным методом

- 
- 1. Изображается исходная расчетная схема замещения цепи и определяются начальные условия коммутации.*
 - 2. Все известные электрические величины и параметры изображаются в операторной форме (сложные функции – с помощью таблиц оригиналов и изображений) и осуществляется переход к операторной схеме замещения цепи.*

Алгоритм анализа переходных процессов операторным методом

- 
- 3. На основе законов Ома, Кирхгофа в операторной форме в соответствии с выбранным методом расчета цепи после ее коммутации составляется система операторных уравнений с учетом начальных условий, которая решается относительно изображений искомых переходных токов и напряжений.*
 - 4. Полученные изображения искомых переходных токов и напряжений преобразуются либо к табличным, либо к виду, удобному для применения теоремы разложения, и определяются оригиналы (переходные токи и напряжения).*
 - 5. Производится анализ характера переходного процесса.*



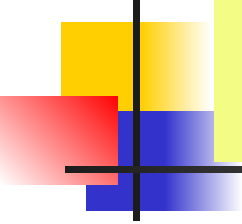
Способы перехода к оригиналам

*Способы перехода
к оригиналам*

*С помощью таблиц
оригиналов
и изображений*

*С помощью
обратного
преобразования
Лапласа*

*На основе
теоремы
разложения*



Теорема разложения

Теорема разложения формулируется следующим образом.

Если изображение искомой функции можно представить в виде рациональной дроби

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$$

где многочлены $F_1(p)$ и $F_2(p)$ общих корней не имеют;
 a_k и b_k – действительные числа,

Теорема разложения (продолжение)

то $F(p)$ можно разложить на ряд слагаемых, каждому из которых соответствует табличный интеграл

$$F(p) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} \cdot \frac{1}{p - p_2} + \dots + \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} + \dots + \frac{F_1(p_n)}{F_2'(p_n)} \cdot e^{p_n t}$$

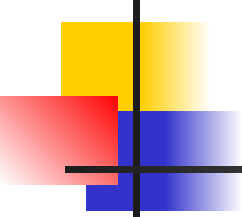
где $p_1, p_2, \dots, p_n$ – корни характеристического уравнения $F_2(p) = 0$;

$F_1(p_1), F_1(p_2), \dots, F_1(p_n)$ – значения многочлена числителя при соответствующих корнях

$p_1, p_2, \dots, p_n$ характеристического уравнения;

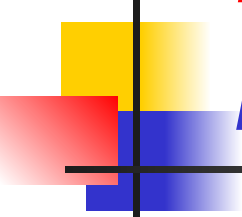
$$F_2'(p_1), F_2'(p_2), \dots, F_2'(p_n)$$

- значения производных многочлена знаменателя при соответствующих корнях $p_1, p_2, \dots, p_n$ характеристического уравнения.



Алгоритм применения теоремы разложения

1. Изображение искомой функции представить в виде рациональной дроби.
2. Составить характеристическое уравнение знаменателя и определить его корни $p_1, p_2, \dots, p_n$.
3. Определить значения многочлена числителя при каждом из корней характеристического уравнения.
4. Определить в общем виде производную многочлена знаменателя и ее значения при каждом из корней характеристического уравнения.
5. По теореме разложения записать оригинал (искомую функцию).



Пример. Пусть задано изображение в виде

$$F(p) = \frac{p + 2}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

Необходимо найти его оригинал.

Решение.

Обозначим $F_1(p) = p + 2$; $F_2(p) = p(p^2 + 5p + 4)$.

Найдем корни характеристического уравнения $F_2(p) = p(p^2 + 5p + 4) = 0$.

$p_1 = 0$; $p_2 = -1$; $p_3 = -4$.

При этом $F_1(p_1) = 2$; $F_1(p_2) = 1$; $F_1(p_3) = -2$.

Определим производную

$$F_2'(p) = 3p^2 + 10p + 4$$

Отсюда

$$F_2'(p_1) = 4$$

$$F_2'(p_2) = -3$$

$$F_2'(p_3) = 12$$

Окончательно получим:

$$f(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-4t}$$