

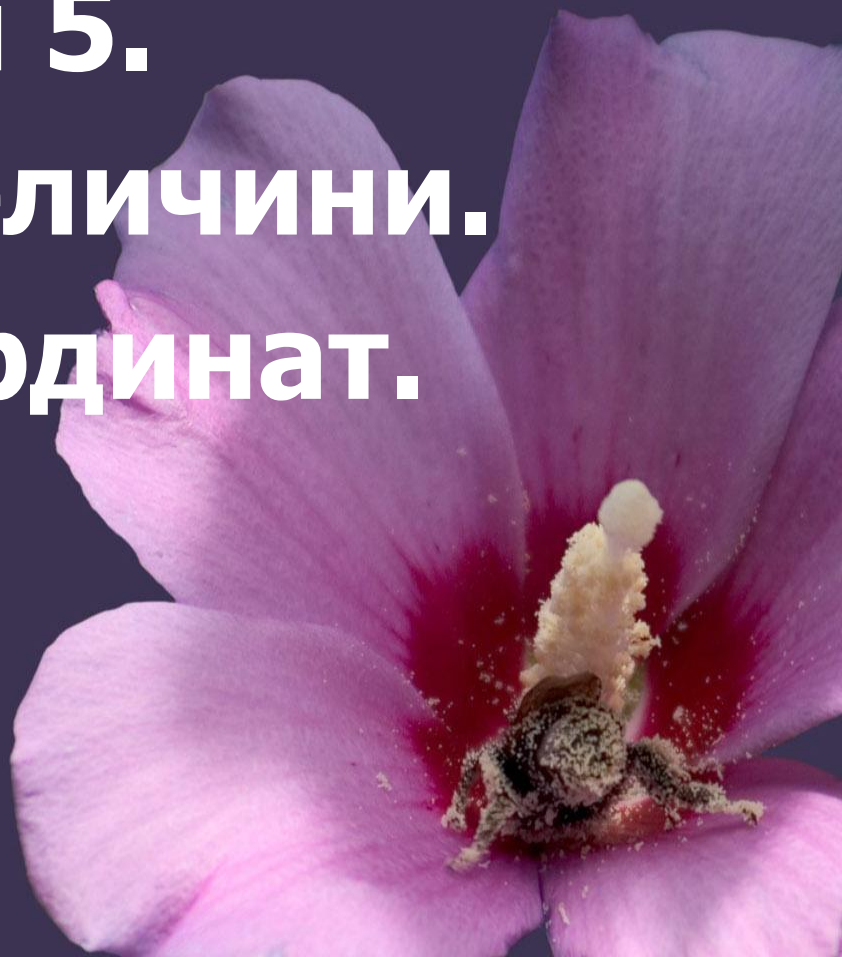
Тема 2.

Векторна алгебра

Лекція 5.

Векторні величини.

Метод координат.

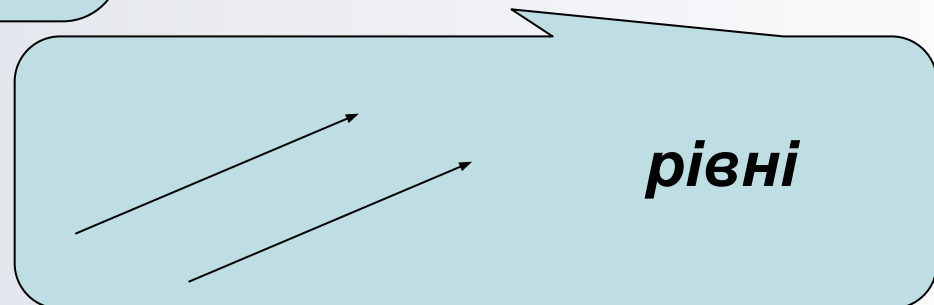
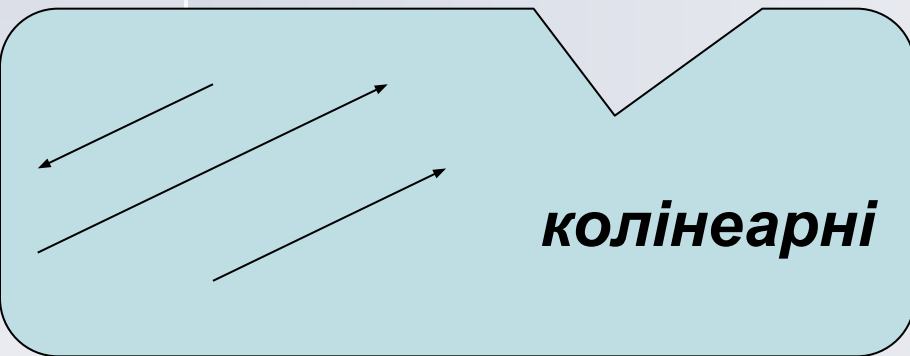
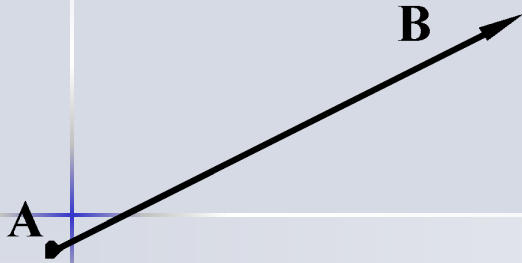


План

- Лінійні операції над векторами
- Проекція вектора на вісь
- Лінійна залежність та незалежність векторів
- Метод координат



Вектор – це впорядкована пара точок.



Відстань між початком і кінцем вектора називається його **довжиною**, або **модулем**.

Лінійні операції над векторами

Добуток
вектора на
число

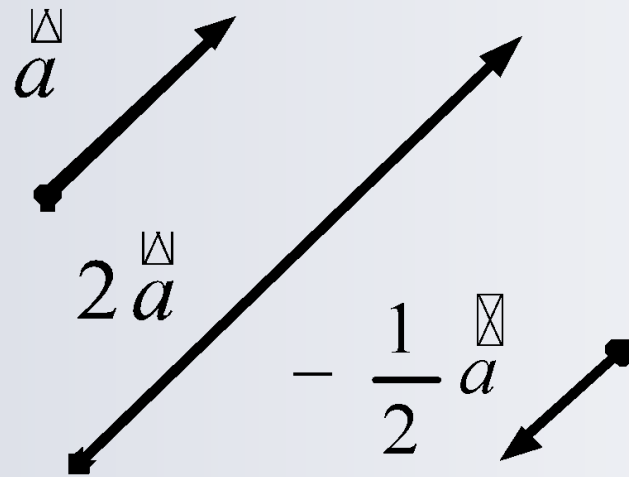
Сума двох
векторів

Різниця двох
векторів

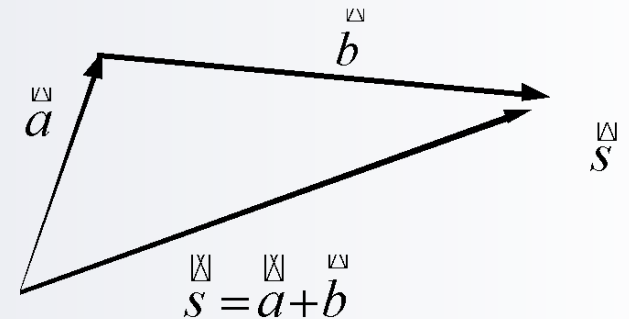
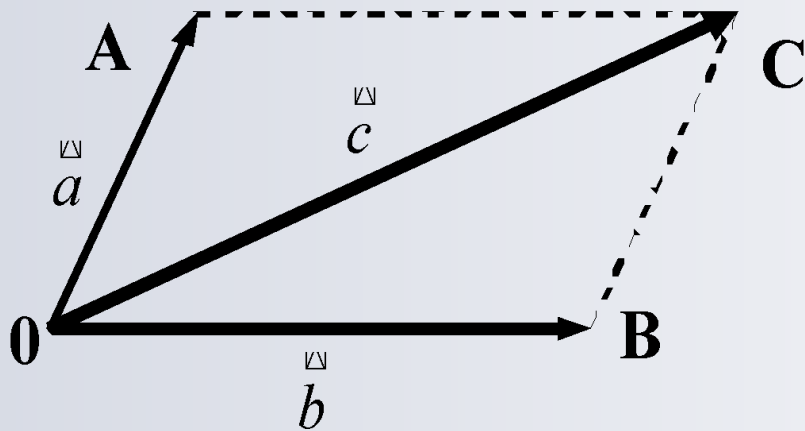
Правило
паралелограма

Правило
трикутника

Добутком вектора $\vec{a}$ на число m називається вектор, який має напрямок вектора $\vec{a}$, якщо $m > 0$, і протилежний напрямок, якщо m від'ємне.



Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий третій вектор $\vec{c}$, який виходить із їх спільного початку і є діагоналлю паралелограма, сторонами якого є вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$

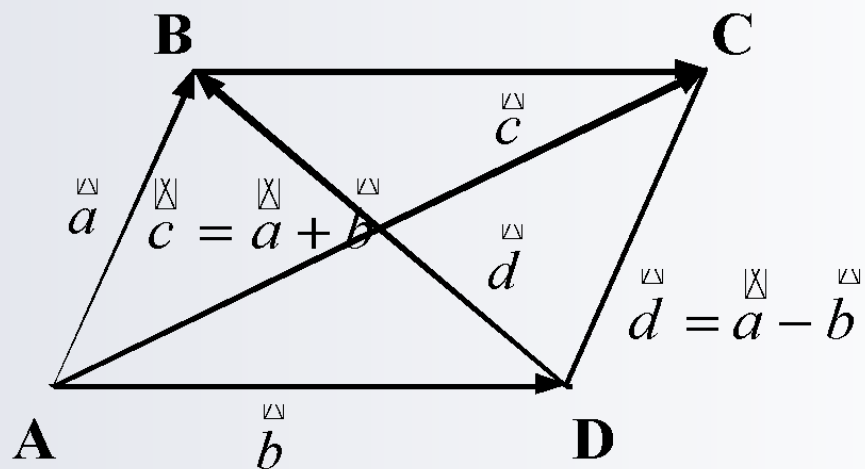
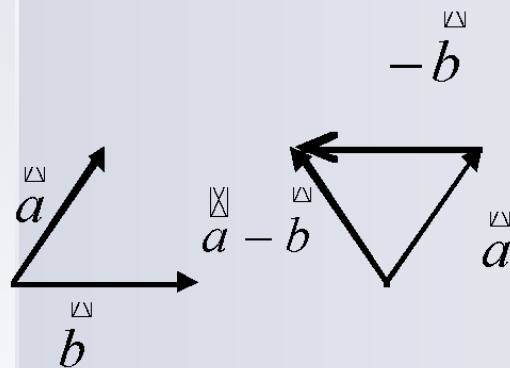


Властивості:

- $\overset{\boxed{\times}}{a} + \overset{\boxed{\nabla}}{b} = \overset{\boxed{\nabla}}{b} + \overset{\boxed{\times}}{a}$ - комутативність;
- $(\overset{\boxed{\times}}{a} + \overset{\boxed{\nabla}}{b}) + \overset{\boxed{\times}}{c} = \overset{\boxed{\times}}{a} + (\overset{\boxed{\nabla}}{b} + \overset{\boxed{\times}}{c})$ - асоціативність;
- $m(\overset{\boxed{\times}}{a} + \overset{\boxed{\nabla}}{b}) = m\overset{\boxed{\times}}{a} + m\overset{\boxed{\nabla}}{b}$ -
дистрибутивність по відношенню до
множення на число

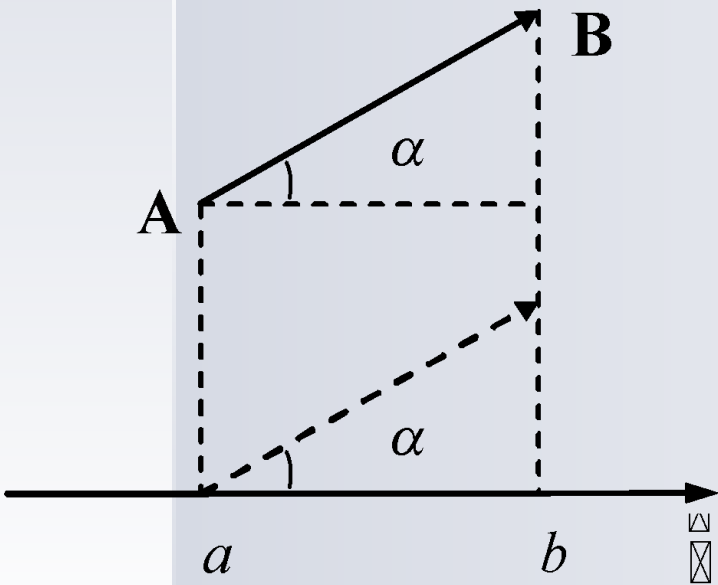
$$(\overset{\boxed{\times}}{m} + \overset{\boxed{\times}}{n})\overset{\boxed{\nabla}}{a} = \overset{\boxed{\times}}{m}\overset{\boxed{\nabla}}{a} + \overset{\boxed{\times}}{n}\overset{\boxed{\nabla}}{a}$$

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{d}$, який при додаванні до вектора $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$ якщо $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$.



Проекція вектора на вісь

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{e}$ називається довжина відрізка ab цієї осі, що міститься між основами проекцій початку і кінця вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{e}$.



$$pr_{\vec{e}} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \alpha$$

Властивості :

- рівні вектори мають рівні проекції;
- при множенні вектора $\overrightarrow{AB}$ на число m його проекція на вісь також множиться на це ж саме число;
- проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі проекцій цих векторів

Означення

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі сталі $c_1, c_2, \dots, c_m$, серед яких є хоча б одна відмінна від нуля, і для яких виконується рівність

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_m \vec{a}_m = 0.$$

Теорема Якщо система векторів лінійно залежна, то хоча би один з них можна представити у вигляді лінійної комбінації інших.

Теорема (обернена). Якщо один з векторів даної системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших, то така система векторів лінійно залежна.

Означення

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називається *лінійно незалежною*, якщо рівність $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_m \vec{a}_m = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли усі сталі c_i дорівнюють нулю ($i = 1, 2, \dots, m$).

Теорема . Довільні два колінеарні вектори лінійно залежні і, навпаки, два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Теорема . Три компланарних вектори лінійно залежні і, навпаки, три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Теорема . Довільні три ненульові вектори на площині є лінійно залежними.

Теорема . Довільні чотири вектори у просторі лінійно залежні.

Базисом на прямій називається будь-який ненульовий вектор на цій прямій.

Базисом на площині називаються два не колінеарні вектори зі спільним початком на цій площині, взяті в певному порядку.

Базисом в просторі називаються довільні три не компланарні вектори, які беруться в певній послідовності.

Теорема

Якщо вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис в просторі, то будь-який вектор $\vec{a}$ цього простору може бути представлений до того ж єдиним чином, як лінійна комбінація векторів базису.

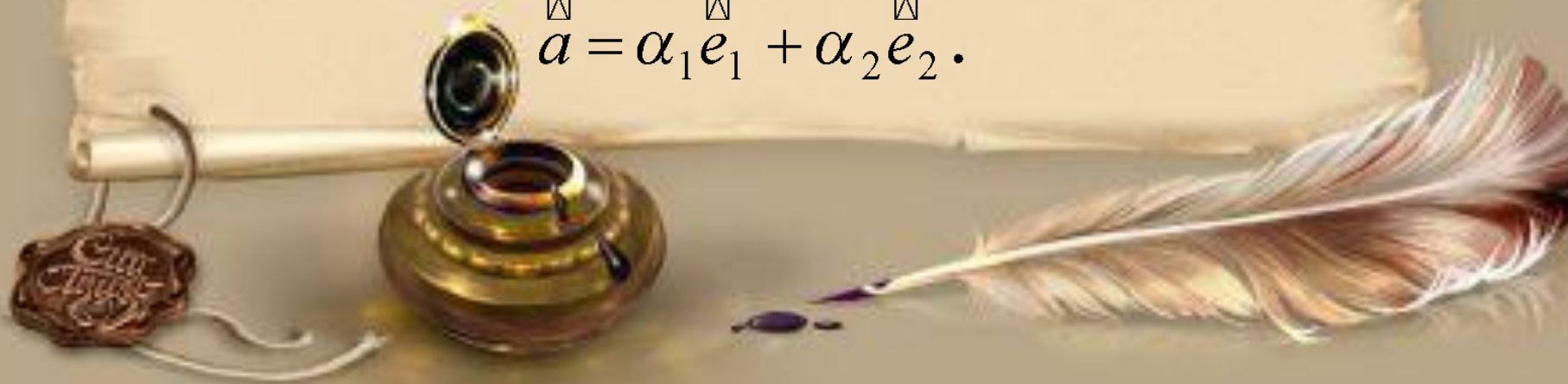
$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3.$$



Теорема

Якщо на площині вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ утворюють базис, то будь-який з ними компланарний вектор $\vec{a}$ можна представити і при тому єдиним чином як лінійну комбінацію векторів базису.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2.$$



Означення

Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис і вектор

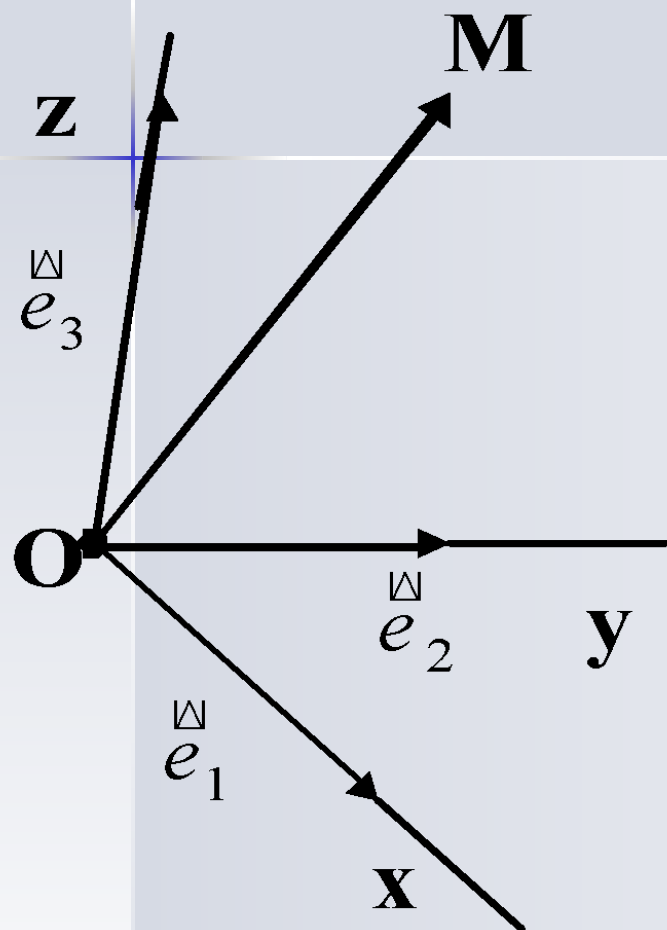
$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3, \text{ то числа } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

називаються **координатами вектора** $\vec{a}$ в даному базисі.

Декартова системи координат

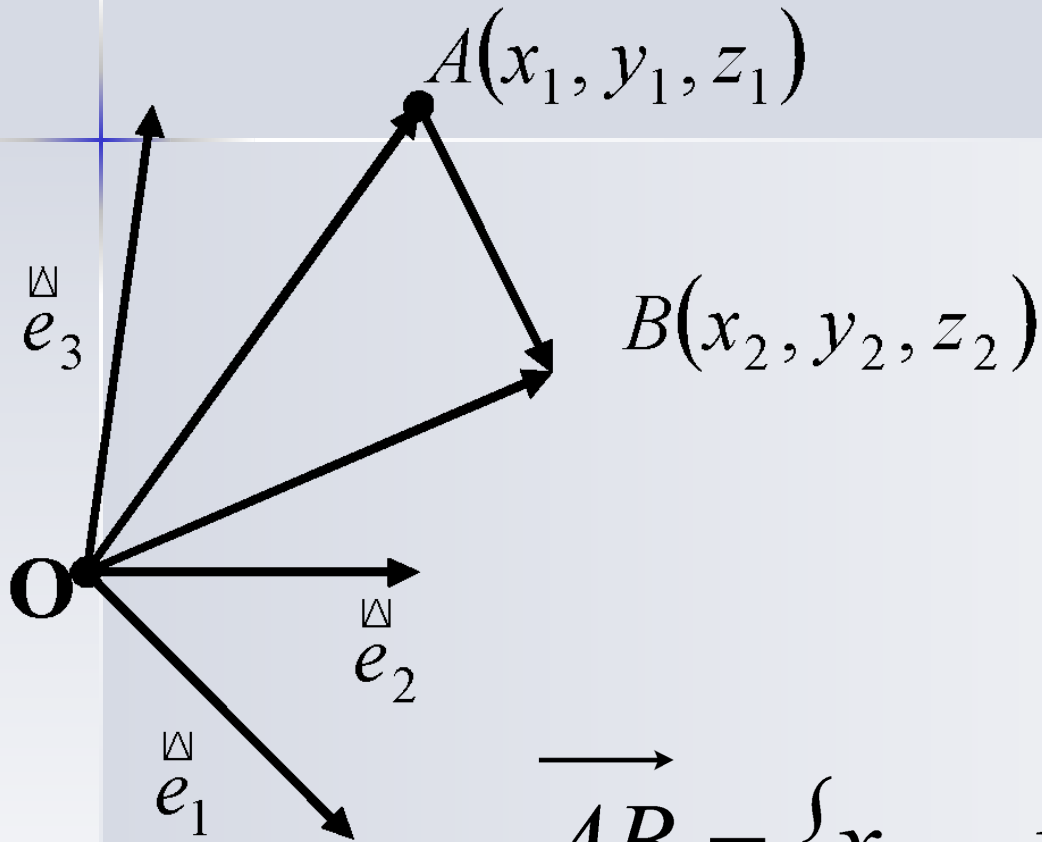
*Декартовою системою
координат* в просторі називається
сукупність точки O та базису

$$\begin{matrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ e_1, & e_2, & e_3. \end{matrix}$$



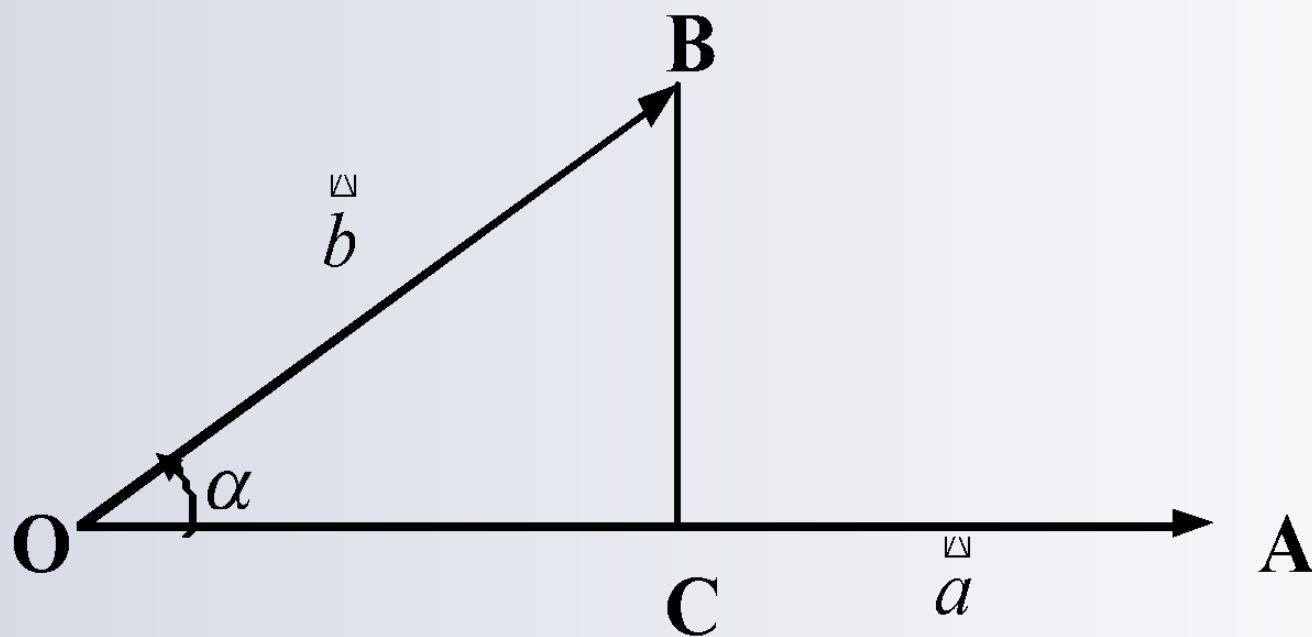
Координати радіус-вектора
точки M по відношенню до
початку координат
називаються
координатами точки M у
даній системі координат.

Координати вектора



$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

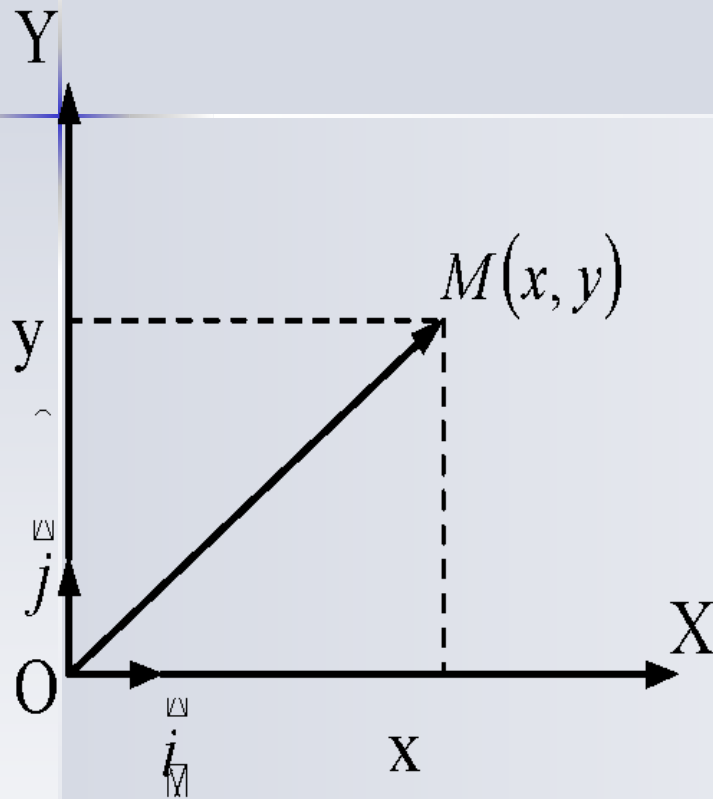
Кутом між двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається найменший кут $\angle AOB$ між цими векторами, зведеними до спільного початку O .



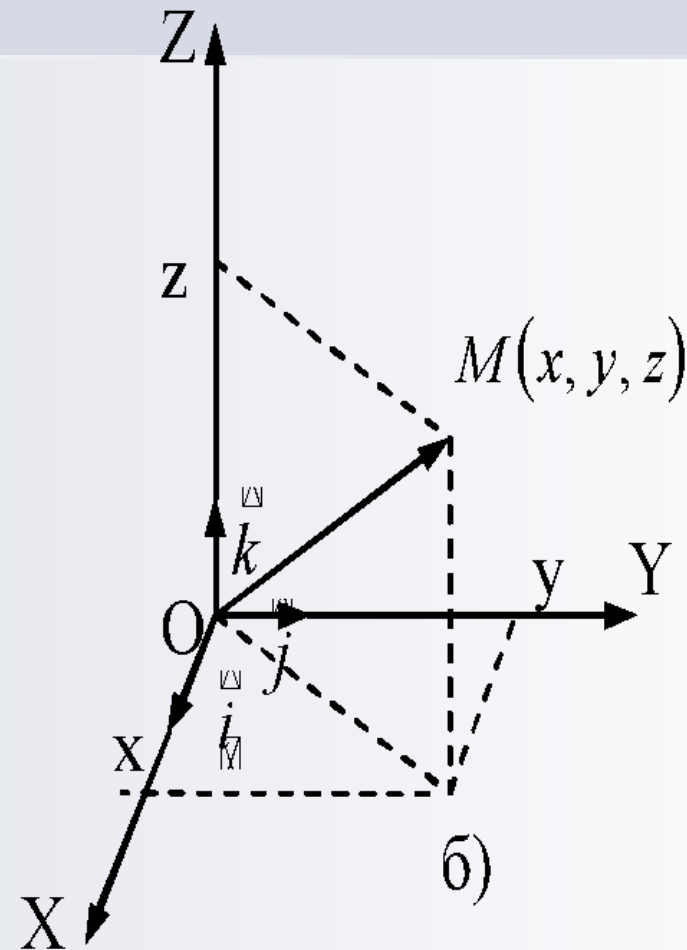
Базис називається *ортонормованим*, якщо довжина кожного базисного вектора дорівнює одиниці і вони попарно ортогональні.

Декартова система координат з ортонормованим базисом називається *прямокутною системою координат*.

Прямокутна декартова система координат на площині та в просторі



a)



b)

Відстань між двома точками

- На площині

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- В просторі

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
- $\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$
- $\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$

Напрямні косинуси

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Ділення відрізка в заданому відношенні

- Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M(x, y, z)$

Та

$$M_1M = \lambda \cdot MM_2$$

M_1



M

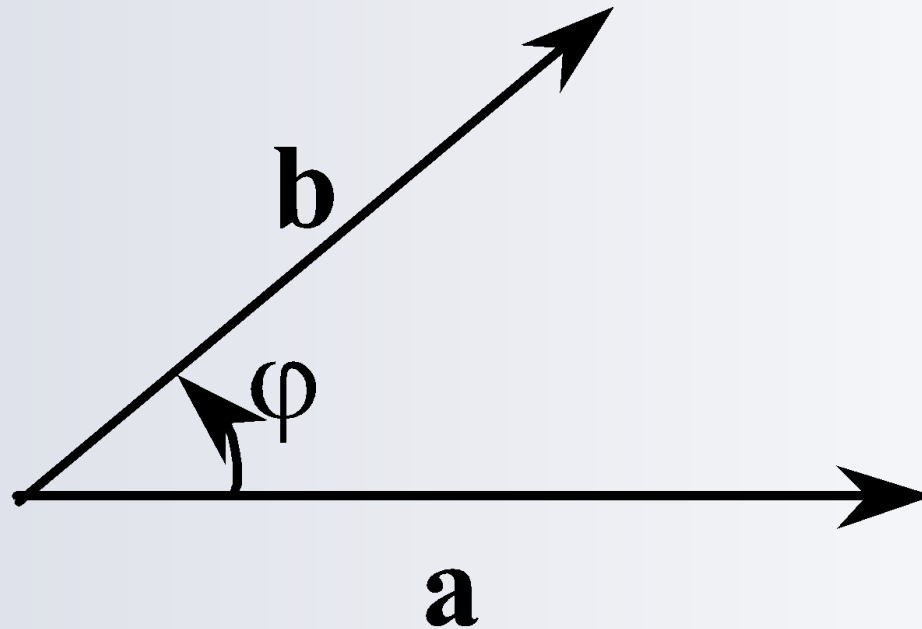
M_2

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Означення

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на косинус кута між ними.

Скалярный добуток



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

ВЛАСТИВОСТІ:

1. Скалярний добуток комутативний, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2,$

3. Скалярний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли співмножники ортогональні або хоча б один з них дорівнює нулю.

4. Скалярний добуток асоціативний відносно скалярного множника, тобто

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

5. Скалярний добуток дистрибутивний відносно додавання, тобто для довільних трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має місце рівність

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

6. Вектори ортонормованого базису задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Вираз скалярного добутку через координати

Якщо $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,

тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Застосування:

1. Кут між векторами

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

2. Умова ортогональності двох векторів

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

3. Фізичний зміст

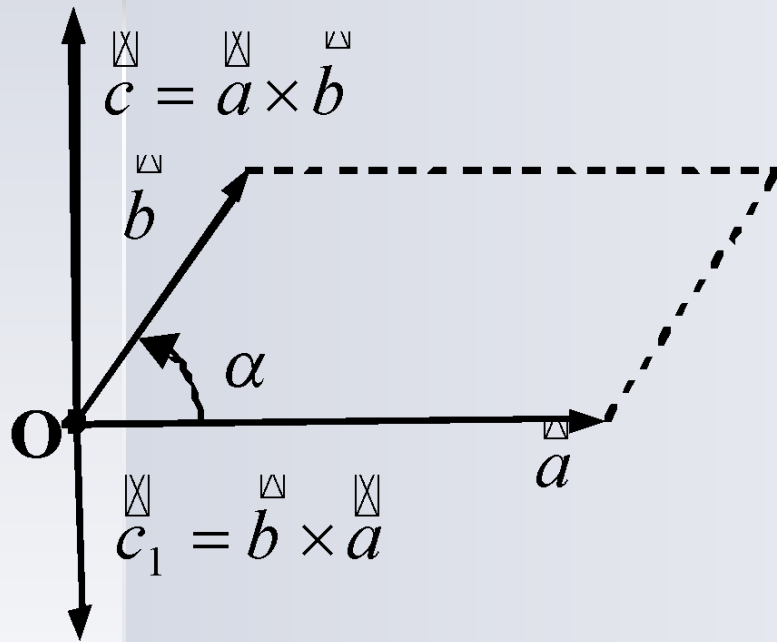
якщо матеріальна точка, на яку діє сила, здійснила переміщення s ,
То робота дорівнює скалярному добутку сили на переміщення

$$A = (F, s)$$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, в якого:

- 1) довжина чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) вектор $\vec{c}$ напрямлений таким чином, щоб найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ здійснювався проти годинникової стрілки, якщо дивитись на нього з кінця вектора $\vec{c}$.

Векторний добуток



$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

Властивості:

- $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ - антикомутативність;
- $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]; [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$

асоціативність відносно скалярного множника;

- $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ дистрибутивність відносно додавання;
- $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ означає колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

векторний добуток основних ортів

	$\hat{i}$ i	$\hat{j}$ j	$\hat{k}$ k
$\hat{i}$ i	0	k	$-j$
$\hat{j}$ j	$-k$	0	i
$\hat{k}$ k	j	$-i$	0

Вираз векторного добутку через координати

Якщо $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, '

тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Застосування:

1. умова колінеарності векторів

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

2. Геометричний зміст

- Площа паралелограма

$$S = \left| \overset{\square}{\mathbf{a}} \times \overset{\square}{\mathbf{b}} \right|$$

- Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} \left| \overset{\square}{\mathbf{a}} \times \overset{\square}{\mathbf{b}} \right|$$

3. Фізичний зміст

Момент сили

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке отримуємо, якщо перемножимо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ векторно, а потім отриманий вектор помножимо скалярно на вектор $\vec{c}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$$

Геометричний зміст

Мішаний добуток некопланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ по модулю дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ задані своїми координатами в прямокутній системі координат

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}; \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Умова компланарності

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Властивості:

- $([\overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxminus}{b}], \overset{\boxtimes}{c}) = (\overset{\boxtimes}{a}, [\overset{\boxminus}{b}, \overset{\boxtimes}{c}])$
- $(\overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxminus}{b}, \overset{\boxtimes}{c}) = (\overset{\boxminus}{b}, \overset{\boxtimes}{c}, \overset{\boxtimes}{a}) = (\overset{\boxtimes}{c}, \overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxminus}{b})$
- $(\overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxminus}{b}, \overset{\boxtimes}{c}) = -(\overset{\boxminus}{b}, \overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxtimes}{c})$

Подвійний векторний добуток

Подвійним векторним добутком

векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається вираз виду

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

Завдання на самопідготовку

- **Законспектувати і вивчити слайди:
5-10, 19-27, 30-31, 33-35.**
- **Шумко Л.І. , Шумко Л.Г. Вища
математика, курс лекцій, 2005.
§2.1-2.5.**