

Від рівноважного теплого випромінювання до лазера

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Prof. Oleksandr
Slobodyanyuk

Physics Department of
Taras Shevchenko University of Kyiv,
Ukraine

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
фізичний факультет**

**Від рівноважного
теплового випромінювання
до лазера**

Проф. О. В. Слободянюк
slobod@univ.kiev.ua

Історія фізики

- **Ancient history**
- **Scientific revolution**
- **18th-century developments**
 - Mechanics
 - Thermodynamics
- **19th century**
 - Laws of thermodynamics
 - James Clerk Maxwell
- **20th century: birth of modern physics**
 - Radiation experiments
 - Albert Einstein's theory of relativity
 - Special relativity
 - General relativity
 - Quantum mechanics
- **Contemporary and Particle Physics**
 - Quantum field theory
 - Unified field theories
 - Standard Model
 - Cosmology
 - Higgs boson

Ancient history and Scientific revolution

- **Ancient history**
 - Ancient Greece
 - India and China
 - Muslim scientists
 - Medieval Europe
- **Scientific revolution**
 - Nicolaus Copernicus
 - Galileo Galilei
 - René Descartes
 - Sir Isaac Newton
 - Other achievements
 - Early thermodynamics

20th century: birth of modern physics

- 20th century: birth of modern physics
 - Radiation experiments
 - Albert Einstein's theory of relativity
 - Special relativity
 - General relativity
 - Quantum mechanics

Рівноважне теплове випромінювання

- **Рівноважне теплове випромінювання** існує при термодинамічній рівновазі між випромінюванням і системою тіл, що знаходяться при однаковій температурі.
- Рівноважне теплове випромінювання характеризують температурою та відповідною рівноважною спектральною густиною випромінювання

Рівноважна спектральна густина випромінювання

Густина енергії електромагнітного поля:

$$W = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

Спектральна густина енергії випромінювання на одиничний інтервал частот:

$$\frac{dW}{d\nu} = w(\nu) = w_\nu$$

Повна (інтегральна) густина енергії випромінювання:

$$W = \int_0^{\infty} w(\nu) d\nu$$

Закони теплового випромінювання

(1)

Рівноважна спектральна густина енергії випромінювання залежить лише від температури T і не залежить від властивостей і природи тіл, що знаходяться в порожнині, а також від природи і властивостей стінок порожнини.

(перший закон Кірхгофа, 1860 р.)

Випромінювальна здатність тіла

Випромінювальна здатність нагрітого тіла на заданій частоті чисельно дорівнює густині потоку власного випромінювання (потужності випромінювання цього тіла з одиниці його поверхні) в одиничному інтервалі частот [в одиниці частоти]

$$E_{\nu} = \frac{d\Phi_{\nu,T}^e}{d\nu} = E_{\nu}(T) = E_{\nu,T}$$

$$\Phi^e(T) = \int_0^{\infty} E_{\nu,T} d\nu$$

Поглиналина здатність тіла

Поглиналина здатність тіла визначається відношенням поглинутої ним потужності до падаючої потужності

$$A_v = \frac{d\Phi_v^{abs}}{d\Phi_v^i}$$

Поглиналина здатність тіла також залежить від його температури

$$A_v = A(T) \rightarrow A_{v,T}$$

Відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності (1)

Можна показати, що в інтервалі частот $[\nu, \nu + d\nu]$:

$$\frac{E_{\nu, T}}{A_{\nu, T}} = d\Phi_{\nu}^i = \frac{1}{4} c w_{\nu},$$

**тобто, відношення випромінювальної
здатності тіла до його поглинальної
здатності з точністю до сталого множника
співпадає зі спектральною густиною
рівноважного випромінювання.**

Відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності (2)

Оскільки спектральна густина рівноважного випромінювання w_ν відповідно до першого закону Кірхгофа не залежить від властивостей і природи тіл, з яким перебуває у рівновазі випромінювання, а є універсальною функцією температури та частоти, то **кожна з величин**

$$\frac{E_{\nu,T}}{w_{\nu,T}}$$

і

може змінюватись у дуже широких межах, але їх відношення залишається однаковим для всіх тіл незалежно від їх природи і властивостей.

Закони теплового випромінювання (2)

**Відношення випромінювальної
здатності тіла до його поглинальної
здатності не залежить від природи
тіла, тобто є універсальною функцією
температури та частоти.**

(другий закон Кірхгофа)

Абсолютно чорне тіло (1)

- Тіло, яке повністю поглинає всю падаючу на нього променисту енергію називають ***абсолютно чорним тілом***. Поглинальна здатність абсолютно чорного тіла дорівнює одиниці для будь яких температур і частот,

$$\alpha_{\nu, T} = 1$$

- Реалізувати абсолютно чорне тіло з хорошим наближенням можна у вигляді замкненої порожнини з невеликим отвором.

Абсолютно чорне тіло (2)

Закон Кірхгофа справедливий для всіх без винятку тіл: відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності має бути однаковим для довільного тіла і для абсолютно чорного тіла:

$$\frac{E_{v,T}}{A_{v,T}} = \frac{\epsilon_{v,T}}{a_{v,T}} = \epsilon_{v,T}$$

де $\epsilon_{v,T}$ - випромінювальна здатність абс. ч.
Т

Випромінювальна здатність довільного тіла

Для довільного тіла випромінювальна здатність є

$$E_{\nu,T} = \varepsilon_{\nu,T} A_{\nu,T}$$

Отже, випромінювальна здатність *будь-якого* тіла завжди менша за випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла і може бути знайдена за відомими $\varepsilon_{\nu,T}$ і $A_{\nu,T}$.

Функція $\epsilon_{\nu,T} = f(\nu, T)$?

Коли буде встановлено явний вигляд
універсальної функції температури та
частоти $\epsilon_{\nu,T} = f(\nu, T)$

то можна буде обчислювати розподіл
енергії в спектрі будь-якого нагрітого тіла,
для якого відома поглинальна здатність ,
яку, в свою чергу, можна знайти за
спектром поглинання.

Функція $\epsilon_{\nu,T} = f(\nu, T)$?

Можна шукати або функцію

$$\epsilon_{\nu,T} = f(\nu, T)$$

або функцію

$$w_{\nu,T} = f'(\nu, T)$$

Це була одна з центральних задач фізики кінця 19-го сторіччя, яка була розв'язана М.Планком саме на початку 20-го сторіччя.

Попередники М. Планка (1)

Закон Стефана-Больцмана:

Повна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла пропорційна четвертому степеню температури

$$\epsilon_T = \int \epsilon_{\nu,T} d\nu = \sigma T^4$$

де $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ так звана *стала Стефана-Больцмана*.

Стефан, 1879 р., експеримент

Больцман, 1884 р., теоретично показав, що лише для абс. ч. т.

Попередники М. Планка (2)

Формула Віна

У 1893 р. Вільгельм Він розглянув адіабатичне стискання рівноважного випромінювання у порожнині з дзеркальними стінками з урахуванням зміни частоти світла при відбитті від рухомого дзеркала і теоретично обґрунтував формулу

$$\epsilon_{\nu,T} = c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

$$\epsilon_{\lambda,T} = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

Лише один аргумент!

Формула Віна

Отже, задачу знаходження універсальної функції

$$\varepsilon_{\nu, T} = f(\nu, T)$$

від двох аргументів було зведено до задачі про знаходження функції

$$\varepsilon_{\nu, T} = f(\nu / T)$$

що залежить лише від одного (!) аргументу $\left(\frac{\nu}{T}\right)$.

Узгодження формули Віна з законами випромінювання та експериментом (1)

Виходячи з формули Віна можна дістати закон Стефана-Больцмана:

$$\epsilon_T = \int_0^{\infty} \epsilon_{\nu, T} d\nu = \int_0^{\infty} c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \left| \frac{\nu}{T} = x, d\nu = T^4 dx \right| = cT^4 \int_0^{\infty} x^3 f\left(\frac{x}{T}\right) dx = \sigma T^4$$

$$c \int_0^{\infty} x^3 f\left(\frac{x}{T}\right) dx = \sigma$$

Узгодження формули Віна з експериментом: закон зміщення Віна

З формули Віна випливав важливий висновок, який дістав назву *закону зміщення Віна*: **добуток температури тіла T на довжину хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини випромінювання, є величина стала**

$$T \lambda_{\max} = b$$

який чудово узгоджувався з експериментом.
Сучасне значення сталої $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К} = 2,898 \cdot 10^6 \text{ нм} \cdot \text{К}$.

Формула Релея-Джинса

Релей у 1900 р. запропонував загальний метод відшукування функції $w_{\nu,T}$, що ґрунтувався на класичних уявленнях про рівномірний розподіл кінетичної енергії по степеням вільності. Джинс застосував методи класичної статистичної фізики до хвиль в порожнині, і в 1905 р. прийшов до тієї ж формули, що й Релей, яка дістала назву формули Релея-Джинса:

$$w_{\nu,T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

Формула Релея-Джинса

Ця бездоганна з точки зору класичної фізики формула задовільно узгоджувалась з експериментом лише в області низьких частот. Щодо області високих частот, то тут вона була абсолютно непридатна, оскільки не мала максимуму, а натомість передбачала монотонне нічим не обмежене квадратичне за частотою зростання спектральної густини енергії. Відповідно, обчислена за її допомогою інтегральна густина енергії рівноважного випромінювання, прямує до нескінченності.

П. Еренфест назвав такий сценарій
ультрафіолетовою катастрофою.

Закон випромінювання Віна

Дещо раніше, у 1896 р., Вільгельм Він припустив, що випромінювання, яке випускається речовиною, має розподіл за частотами аналогічний максвелівському розподілу швидкостей молекул в газі і виходячи з цього запропонував формулу для спектральної густини енергії випромінювання на одиничний інтервал частот, яка на відміну від формули Релея-Джинса, мала максимум і добре узгоджувалася з експериментальними даними в області високих частот (далеко від максимуму):

$$w_{\nu, T} = C_1 \nu^3 \exp\left(-\frac{C_2 \nu}{T}\right)$$

Формула Планка

14 грудня 1900 р. професор кафедри теоретичної фізики Берлінського університету Макс Планк (Max Karl Ludwig Planck, 1858-1947) на засіданні Німецького фізичного товариства представив результати своєї роботи з доведення на основі мікроскопічного підходу формули для спектральної густини енергії випромінювання абсолютно чорного тіла, яку він запропонував за два місяці перед тим на підставі інтерполяції експериментальних даних та деяких теоретичних міркувань.

Від цього дня бере початок квантова

Формула Планка (1)

$$W_{\nu, T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

h стала Планка

Формула Планка (2)

Формула Планка спочатку була отримана як суто інтерполяційна формула, одна з багатьох існуючих на той час і одна з найпростіших, яка, щоправда, на відміну всіх інших запропонованих формул, дуже добре описувала відому на той час експериментальну залежність спектральної густини енергії випромінювання абсолютно чорного тіла від частоти в усьому інтервалі частот $[0, \infty]$. Саме так до неї ставився сам М. Планк, коли вперше оприлюднив її на засіданні Німецького фізичного товариства 19 жовтня 1900 р.

Формула Планка (3)

Саме це рідкісне узгодження цієї формули з експериментом (згадаємо про доволі обмежені успіхи інших дослідників) надихнуло Планка на її теоретичне доведення з мікроскопічних міркувань. Сама інтерполяційна формула була отримана на основі класичних моделей і класичної термодинаміки. В процесі її теоретичного обґрунтування Планк зіткнувся з необхідністю припустити, що **світло поглинається і випромінюється дискретними порціями – квантами, енергія яких пропорційна до частоти випромінювання.** $\varepsilon = h\nu$

Формула Планка (4)

Ця знаменита формула, настільки ж широко відома як і формула², є власне першою формулою нової, квантової фізики, принципи і математичний апарат якої було розроблено пізніше.

З цієї формули видно, що розмірність сталої h є добуток енергії на час, тобто **дія**, відома з класичної механіки.

Саму величину h можна розглядати як елементарний квант дії.

Саме **за відкриття кванта дії** М. Планк став Нобелівським лауреатом (1918 р.)

Формула Планка (5)

Формула Планка в принципі не могла бути «виведена» з відомих на той час законів класичної фізики, включаючи термодинаміку і надзвичайну по своїй передбачувальній силі електродинаміку Максвелла. Тому на шляху М. Планка до свого відкриття були і геніальні здогадки і вимушені кроки.

Ми не будемо повторювати цей шлях, а лише відзначимо декілька моментів суттєвих для нашого розгляду.

Формула Планка (6)

М. Планк розпочав свої дослідження проблеми з моделювання випромінювання абсолютно чорного тіла сукупністю гармонічних осциляторів, з якої випливала формула для спектральної густини енергії випромінювання абсолютно чорного тіла:

$$w_{\nu,T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U \quad (1)$$

записаної як добуток кількості осциляторів, що припадає на одиничний інтервал частот, на середню енергію осцилятора .

Формула Планка (7)

Ключовим моментом, у такому підході, як виявилось, є правильний запис середньої енергії осцилятора U , яка повинна бути функцією температури .

Якщо порівняти попередню формулу (1) з законом Віна, записаним у формі

$$w_{\nu,T} = C'_1 \nu^2 h \nu \exp\left(-\frac{C_2 \nu}{T}\right)$$

де - h універсальна стала, то можна отримати вираз для U :

$$U = h \nu \exp\left(-\frac{C_2 \nu}{T}\right)$$

Формула Планка (8)

Якщо порівняти попередню формулу

$$w_{\nu,T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U$$

із законом Віна, записаним у формі

$$w_{\nu,T} = C'_1 \nu^2 h \nu \exp\left(-\frac{C_2 \nu}{T}\right)$$

де - ***h*** універсальна стала, то можна отримати вираз для ***U***:

$$U = h \nu \exp\left(-\frac{C_2 \nu}{T}\right)$$

Формула Планка (9)

Далі Макс Планк увів гіпотезу про ентропію рівноважного випромінювання, маючи на увазі, що незалежні осцилятори поля мають випадкові фази, і їх сукупність можна характеризувати ентропією і температурою.

Тоді до системи лінійних гармонічних осциляторів, що моделюють електромагнітне поле, можна застосувати перший принцип термодинаміки

$$dU = TdS - PdV$$

Формула Планка (10)

Ентропія системи лінійних гармонічних осциляторів, що моделюють електромагнітне поле:

$$dU = TdS - PdV$$

де V – об'єм, у якому локалізоване поле, P – тиск; середню енергію U та ентропію S беремо з розрахунку на один осцилятор, а температуру T виміряна в **енергетичних одиницях**. Перехід до шкали Кельвіна здійснюється простою заміною у формулах температури, виміряної в енергетичних одиницях, на вираз – добуток сталої Больцмана на температуру в градусах Кельвіна.

Формула Планка (11)

З першого начала термодинаміки маємо

$$\left. \frac{dS}{dU} \right|_{V=\text{const}} = \frac{1}{T}$$

$$U = h\nu \exp\left(-\frac{C_2\nu}{T}\right) \longrightarrow \ln \frac{U}{h\nu} = -\frac{C_2\nu}{T} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left. \frac{dS}{dU} \right|_{V=\text{const}} = -\frac{1}{C_2\nu} \ln \frac{U}{h\nu}$$

Формула Планка (12)

З першого начала термодинаміки маємо

$$\left. \frac{dS}{dU} \right|_{V=\text{const}} = \frac{1}{T}$$

$$U = h\nu \exp\left(-\frac{C_2\nu}{T}\right) \longrightarrow \ln \frac{U}{h\nu} = -\frac{C_2\nu}{T} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left. \frac{dS}{dU} \right|_{V=\text{const}} = -\frac{1}{C_2\nu} \ln \frac{U}{h\nu}$$

Формула Планка (13)

Вираз для другої похідної виявився ще

простішим:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{1}{C_2 \nu U}$$

В 1899 р. Отто Люммер і Ернст Прінґсгайм виявили, що формула Віна незадовільно описує результати вимірювань спектральної густини енергії в області низьких частот, а в наступному році Франц Курльбаум та Генріх Рубенс виявили, що спектральна густина енергії при низьких частотах прямо пропорційна температурі:

З урахуванням цього факту для довгохвильової області спектру отримаємо 

Формула Планка (14)

$$W_{\nu,T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U$$

$$W_{\nu,T} = CT$$

$$W_{\nu,T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} CT$$

$$U = CT$$

Формула Планка (15)

Для середньої енергії осцилятора $U=CT$ з першого закону термодинаміки $dU=Tds-pdV$ за $V=const$ також можна знайти першу, а потім і другу похідну від ентропії за енергією U :

$$\frac{dS}{dU} = \frac{C}{U}$$

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{C}{U^2}$$

Формула Планка (16)

Планк об'єднав два вирази для **другої похідної** від ентропії S за енергією U , один з яких відповідає формулі, що добре описує спектральну густину енергії в області **високих** частот, а другий – формулі, що добре описує спектральну густину енергії в області **низьких** частот в одну просту інтерполяційну формулу:

$$\left(\frac{d^2 S}{dU^2} \right) = \left(-\frac{1}{C_2 \nu U} \right) + \left(-\frac{C}{U^2} \right)^{-1}$$

Формула Планка (17)

Зауважимо, що Планк взяв суму не самих других похідних від ентропії за енергією, а суму їх обернених величин, що, ймовірно, було тим «винахідницьким кроком», який дозволив після простих алгебраїчних перетворень одержати зручну для інтегрування формулу, з якої можна було знайти U . Дійсно

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2S}{dU^2}\right) &= -\frac{1}{C_2\nu U + \frac{U^2}{C}} = -\frac{C}{(C_2\nu UC + U^2)} = -\frac{C_2\nu C}{C_2\nu U(C_2\nu C + U)} = \\ &= -\frac{U + C_2\nu C - U}{C_2\nu U(U + C_2\nu C)} = -\frac{1}{C_2\nu} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{U + C_2\nu C} \right).\end{aligned}$$

Формула Планка (17)

Отже:

$$\left(\frac{d^2 S}{dU^2} \right) = -\frac{1}{C_2 \nu} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{U + C_2 \nu C} \right)$$

Інтегруванням за U отримаємо першу похідну від S :

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{C_2 \nu} \ln \left(\frac{U + C_2 \nu C}{U} \right) + \text{const} \quad (*)$$

Формула Планка (18)

Після підстановки до лівої частини $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$ одержимо:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{C_2\nu} \ln \left(\frac{U + C_2\nu C}{U} \right) + const$$

Оскільки при $T \rightarrow \infty$ $U \rightarrow \infty$, то $const = 0$.

Отже $U = \frac{C_2\nu C}{e^{C_2\nu/T} - 1}$, а при $\nu \rightarrow \infty$ $U = C_2\nu C e^{-C_2\nu/T}$ (**)

Порівнюючи множники при експоненті у формулі та у раніше отриманому з формули Віна виразі (**)

$$U = h\nu \exp \left(-\frac{C_2\nu}{T} \right)$$

одержимо $C_2\nu C = h\nu$, звідки $C = h / C_2$.

Формула Планка (19)

Отже, остаточно:

$$W_{\nu,T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

де h - стала Планка.

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 6,62 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с}.$$

Інтерполяційна формула Планка – вершина класичної фізики

З сучасної точки зору формулу Планка можна розглядати як добуток спектральної об'ємної густини станів на середню енергію квантового осцилятора U .

Але на 19 жовтня 1900 року ця формула була з одного боку вершиною класичної фізики (феноменологічних теорій, що оперували виключно з неперервними фізичними величинами – термодинаміки та електродинаміки Максвелла), а з іншого – надзвичайно вдалою інтерполяційною формулою, яку Планк “вгадав”, виходячи з деяких теоретичних міркувань та спираючись на експериментальні дані накопичені на той час.

Першою формулою нової, квантової, фізики вона стала лише після її мікроскопічного обґрунтування Максом Планком, оприлюдненого 14 грудня 1900 року на засіданні Німецького фізичного товариства.

Мікроскопічне обґрунтування формули Планка (1)

Планк відштовхувався від ідеї Больцмана про пропорційність ентропії до логарифму від кількості різних мікроскопічних станів, яка увійшла в сучасну фізику у вигляді формули $S = k \ln W$.

Повна енергія N осциляторів з середньою енергією W , що моделюють поле в порожнині, є NU , а повна ентропія, записана через середню ентропію S на один осцилятор, є $NS = \ln W$,

де за нашою домовленістю опущено сталу Больцмана k . Кількість різних мікроскопічних станів W – це хоч і дуже велике, але ціле число. Отже і величина W і пов'язані з нею величини в принципі **повинні змінюватись дискретно, а не неперервним чином.**

Мікроскопічне обґрунтування формули Планка (2)

За Планком: : **«повну енергію треба уявляти собі не у вигляді неперервної величини, а у вигляді дискретної, що складається з цілого числа рівних частин,**

$$NU = p\varepsilon,$$

де p – ціле, взагалі кажучи, велике число; ε потрібно визначити».

Отже в нашому випадку W – це кількість різних способів розподілу p елементів за N

осцилятори, тобто

$$W = \frac{N!}{(N-p)! p!}.$$

Мікроскопічне обґрунтування формули Планка (3)

Для обчислення **W** скористаємось формулою

Стірлінга: $\ln N! \approx \ln(N/e)^N$, $N \gg 1$

Оскільки в нашому випадку $N \gg 1$, $p \gg 1$

$$\ln W = (N + p) \ln(N + p) - N \ln N - p \ln p$$

Оскільки $p/N = U/\varepsilon$, то середня ентропія **S** на один осцилятор (для цього треба покласти $N=1$), є

$$S = \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon}.$$

Мікроскопічне обґрунтування формули Планка (5)

З іншого боку, ентропію з розрахунку на один осцилятор можна отримати простим інтегруванням за енергією U з інтерполяційної формули (*) для dS/dU :

$$S = \frac{h}{C_2} \left[\left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) - \frac{U}{h\nu} \ln \frac{U}{h\nu} \right]$$

Мікроскопічне обґрунтування формули Планка (6)

Отже, маємо два вирази для ентропії S , що
припадає на один осцилятор:

$$S = \frac{h}{C_2} \left[\left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{h\nu} \right) - \frac{U}{h\nu} \ln \frac{U}{h\nu} \right]$$

та

$$S = \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \ln \left(1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon}.$$

Зіставлення цих двох виразів дає $C_2 = h$, $\varepsilon = h\nu$

.

Мікроскопічне обґрунтування формули Планка (7)

Уведене Планком при мікроскопічному обґрунтуванні своєї формули нове для фізики уявлення про дискретний характер фізичної величини – енергії стало вихідним пунктом для квантової фізики, а сама формула Планка від тепер стала не просто вдаюю інтерполяційною формулою, а набула характеру фундаментального закону.

Формула Планка (19)

З сучасної точки зору формулу Планка можна розглядати як добуток спектральної об'ємної густини станів на середню енергію квантового осцилятора U .

$$W_{\nu,T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \times \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

густина станів × середня енергія квантового осцилятора

Стала Планка може бути виміряна в різних експериментах. Найточніші на сьогоднішній день вимірювання з використанням ефекту Джозефсона дають:

$$\begin{aligned} h &= (6,626196 \pm 0,000050) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = \\ &= (6,626196 \pm 0,000050) \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Формула Планка (19)

Частіше користуються величиною $\hbar = (1,0545919 \pm 0,00000080) \cdot 10^{-27}$ ерг · с,

яку називають сталою Планка «перекреслене».

Цю величину використовують, коли замість частоти користуються циклічною частотою ω .

Зокрема, формула Планка тоді набирає вигляду

$$W_{\omega, T} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1},$$

а енергія кванта $E = \hbar \omega$.

Формула Планка (20)

Формула Планка описує всі властивості рівноважного випромінювання. З неї як граничні випадки можна отримати наближені формули Релея-Джинса для низьких частот і Віна (закон випромінювання Віна) для високих частот.

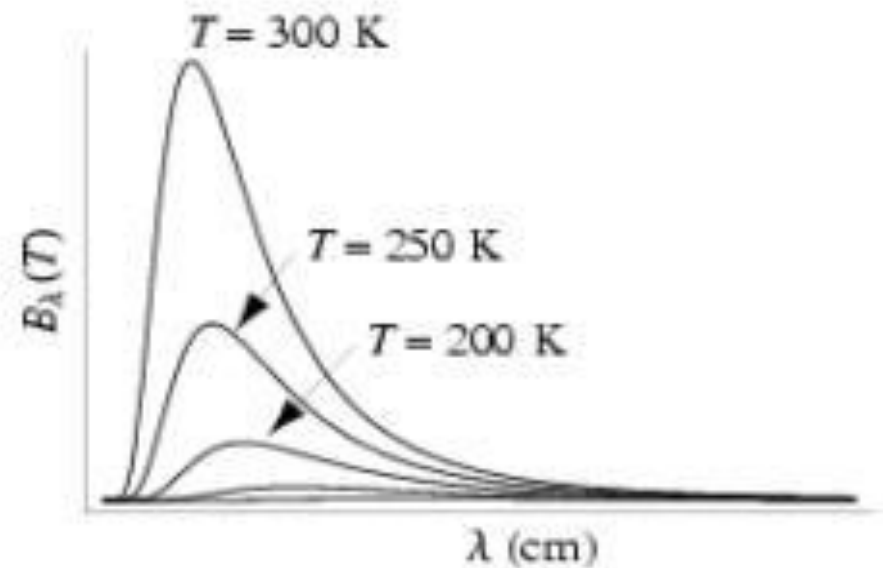
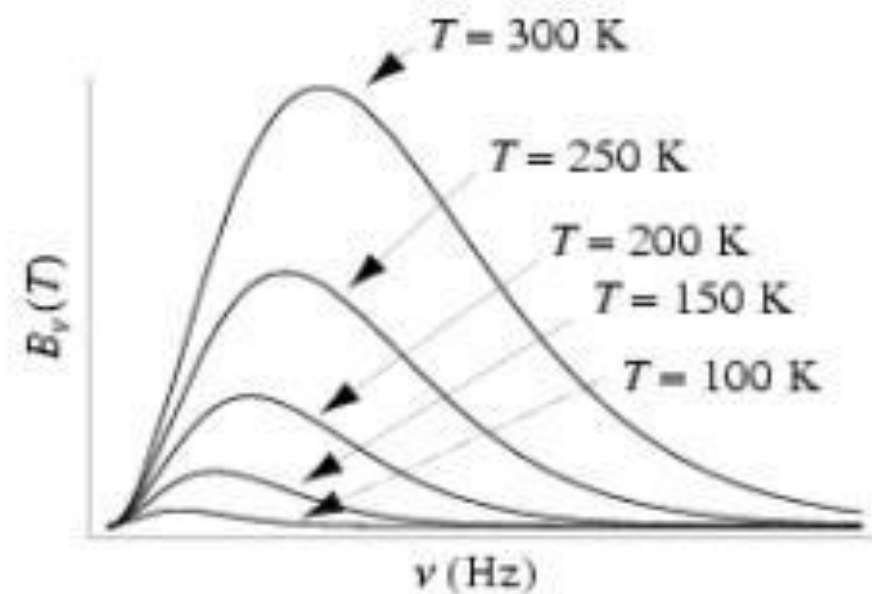
З формули Планка випливають закон зміщення Віна (треба прирівняти до нуля похідну $dW(T, \nu)/d\nu$) і закон Стефана-Больцмана (треба інтегрувати $dW(T, \nu)$ за всіма частотами).

Формула Планка (21)

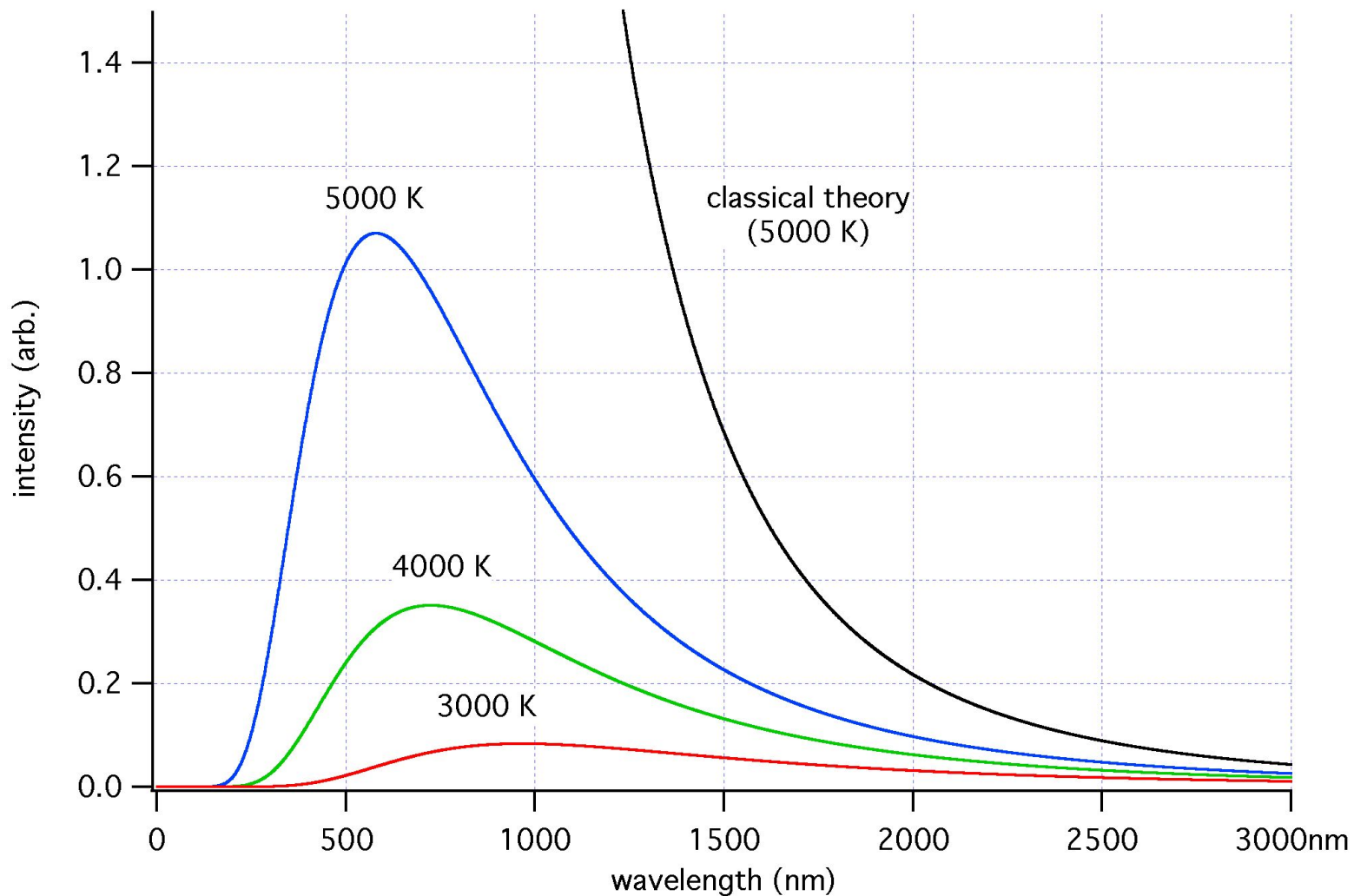
Надзвичайно промовистим є той факт, що і стала Стефана-Больцмана σ і стала в законі зміщення Віна b виражаються через $\hbar$ та інші універсальні сталі, тобто не залежать від властивостей тіл (речовин), у рівновазі з якими знаходиться випромінювання:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 \hbar^3} = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3} \quad b = 2\pi \hbar c / 4,965k$$

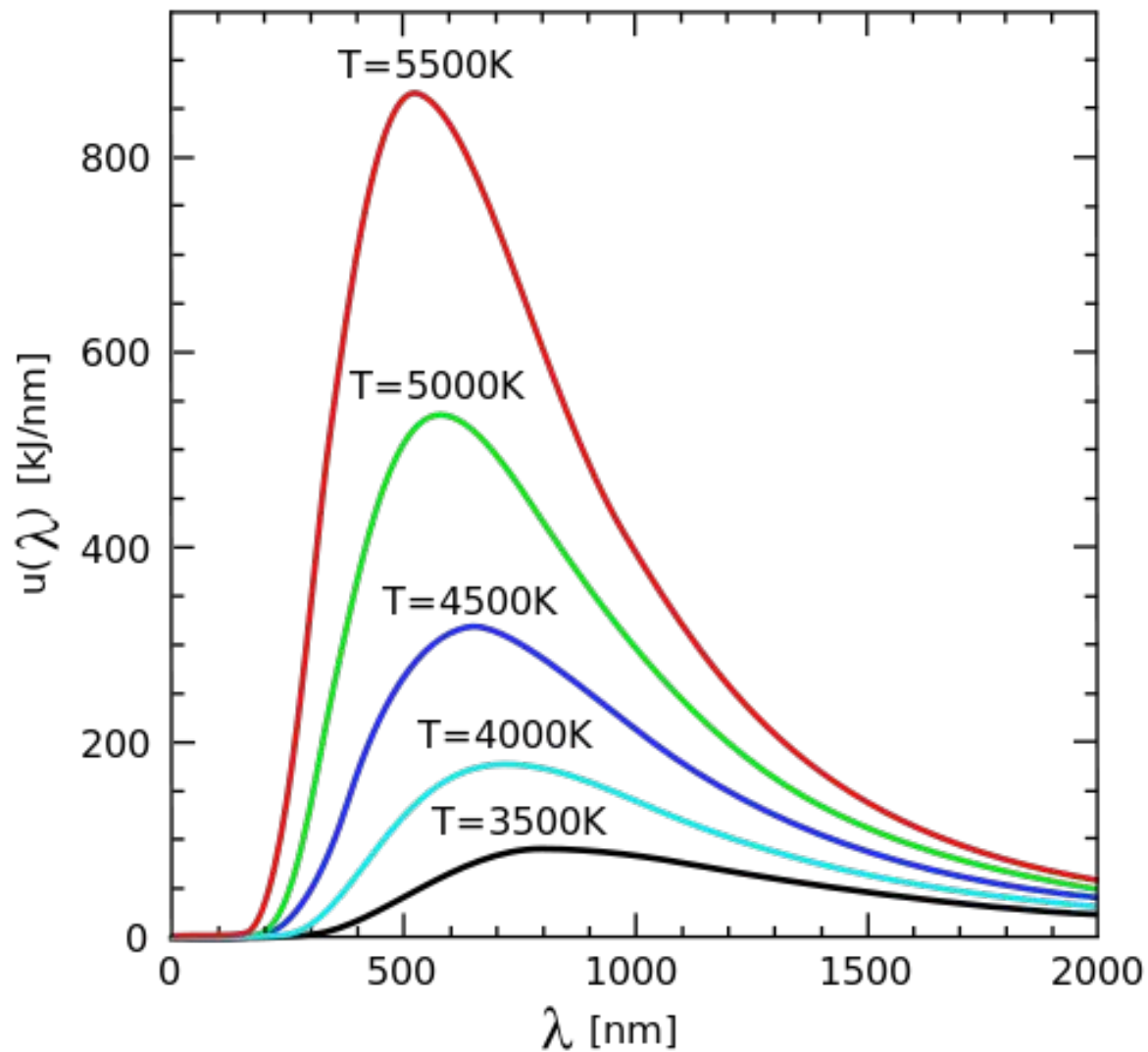
Графіки розподілу Планка від частоти та від довжини хвилі



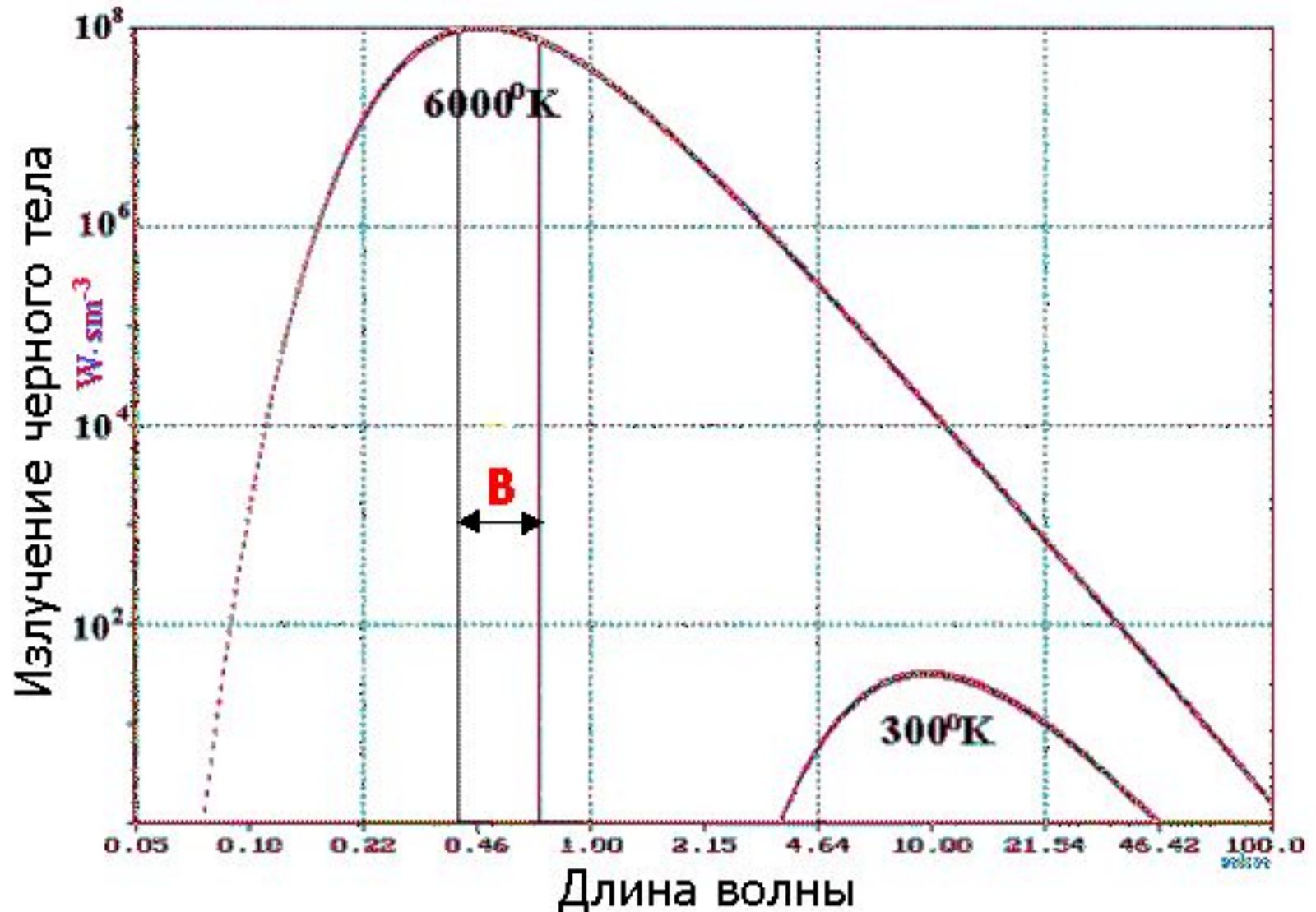
Графіки розподілу Планка (1)



Графіки розподілу Планка (2)



Графіки розподілу Планка від довжини хвилі у подвійному логарифмічному масштабі



Застосування формули Планка (1)

Визначення елементарного заряду

Перше використання формули Планка для подальших фізичних досліджень ймовірно належить самому Планку. Виходячи зі своєї формули і використовуючи експериментальні дані про теплове випромінювання, Планк знайшов з високою на той час точністю $\sim 4\%$ величину елементарного заряду.

Він визначивши попередньо з експериментальних вимірювань сталу Больцмана k , з газової сталої $R = kN$ число Авоґадро N та з числа Фарадея $F = eN$ величину елементарного заряду e)

Застосування формули Планка (2)

Пояснення фотоефекту

У 1905 р. А. Айнштейн використав гіпотезу Планка для пояснення фотоефекту відкритого у 1888 Г. Герцем.

За формулу

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

де ν – частота падаючого світла, A – робота виходу електрона з металу, m – маса електрона, v – його швидкість, Айнштейн у 1921 р. отримав Нобелівську премію.

Застосування формули Планка (3)

Теплоємність твердого тіла

У 1905 р. А. Айнштейн використав гіпотезу квантів Планка для пояснення температурної поведінки теплоємності твердого тіла, повну енергію якого він подав як

$$E = (3N - 6) \times \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

де ν – частота коливань атомів, N – кількість атомів, яка незадовільно узгоджувалась з експериментом в області низьких температур.

Застосування формули Планка (4)

Теплоємність твердого тіла

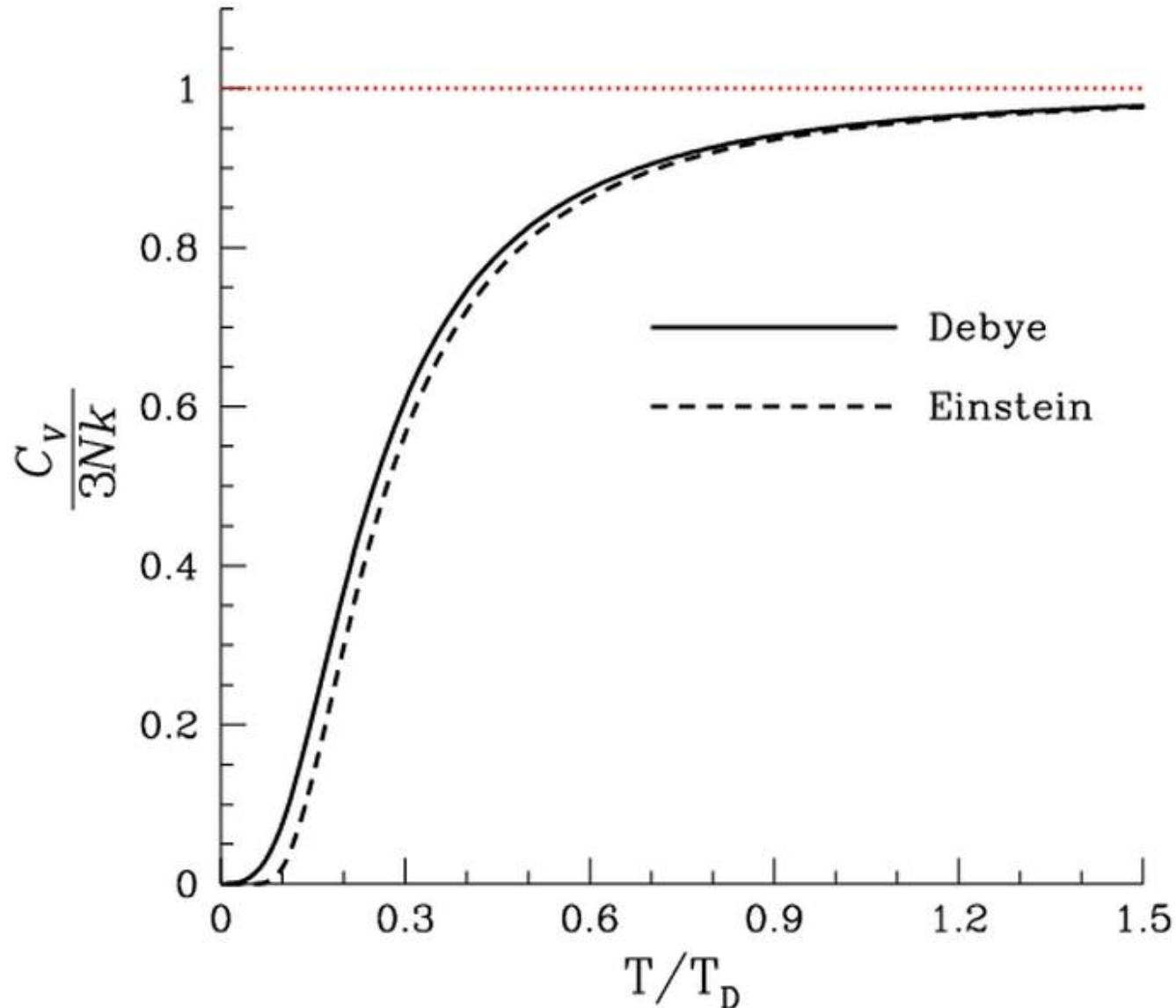
Недолік теорії Айнштейна полягав в тому, що він не-послідовно використав гіпотезу квантів Планка, а саме, вважав, що всі атоми твердого тіла коливаються лише з одною частотою. У 1912 р. П.Дебай, а також М.Борн і Т.Карман розглянули коливання атомів як систему осциляторів із частотами ν_j , розподіленими від нульового значення до деякого максимального ν_D

$$E = \sum_{j=1}^{3N-6} \frac{h\nu_j}{e^{h\nu_j/kT} - 1}$$

Знайдені цими теплоємність прямувала до нуля за законом $\propto T^3$, що чудово узгоджувалось з експериментом.

Застосування формули Планка (5)

Теплоємність твердого тіла : Debye vs Einstein



Застосування формули Планка (6)

Атом Бора: квантування енергії атома

У 1913 році Нільс Бор застосував квантову гіпотезу до моделі атома Е.Резерфорда, сформулювавши свої постулати:

1. Електрони в атомі рухаються по стаціонарних орбітах.
2. Випромінювання або поглинання світла атомом відбувається при переході електрона з однієї стаціонарної орбіти на іншу, згідно з законом збереження енергії

При цьому рівні енергії $E_n = -\frac{h^2}{8\pi^2 m a_0^2 n^2}$ визначались з класичних умов для повної енергії та умов

квантування, згідно з гіпотезою Планка

Застосування формули Планка (7)

Передбачення вимушеного випромінювання

А. Айнштейн у 1916 р. вперше звернув увагу на те, що якщо вплив електромагнітного поля на сукупність атомів обмежити лише вимушеними (або, як ще кажуть, *індукованими*) поглинальними переходами, то при спробі розглянути сукупність атомів, що репрезентують речовину, яка знаходиться в рівновазі з випромінюванням, **для спектральної густини випромінювання виходить класична формула Віна, а не квантова формула Планка**, яка на той час вже здобула беззаперечне визнання.

Цей факт став поштовхом до більш детального розгляду процесів випромінювання і поглинання електромагнітного випромінювання атомами.

Застосування формули Планка (8) Передбачення вимушеного випромінювання

Айнштайн застосував до розгляду взаємодії атомів з випромінюванням принцип *детальної рівноваги* (його іноді називають принципом мікроскопічної оборотності). Відповідно до цього принципу при термодинамічній рівновазі кожному мікроскопічному процесу можна поставити у відповідність такий самий процес, що йде в зворотному напрямку, причому кількість і перших і других процесів в одиницю часу має бути однакова.

Застосування формули Планка (9)

Передбачення вимушеного випромінювання

За Айнштайном кількість спонтанних переходів з рівня 2 на рівень 1 за одиницю часу пропорційна кількості атомів, що знаходяться в збудженому стані з енергією E_2 :

$$\frac{dZ_{21}}{dt} = (W_{em}^{sp} + W_{em}^{st}) N_2 \quad (1)$$

де $W_{em}^{sp} = A_{21}$ – ймовірність спонтанних (*spontaneous*) переходів з випусканням (*emission*) з рівня 2 на рівень 1, яка не залежить від електромагнітного поля, а $W_{em}^{st} = B_{21} \rho_\nu$ –

ймовірність **вимушених (*stimulated*) переходів з випусканням (*emission*) з рівня 2 на рівень 1, яка пропорційна спектральній густині енергії поля** і для якої ми будемо використовувати традиційне у цій ділянці фізики позначення ρ_ν .

Застосування формули Планка (10)

Коефіцієнти Айнштейна

Кількість вимушених переходів з поглинанням (*absorption*) з рівня 1 на рівень 2 за одиницю часу пропорційна кількості атомів, що знаходяться в основному стані з енергією E_1 :

$$\frac{dN_{12}}{dt} = W_{abs}^{st} N_1, \quad (2)$$

де $W_{abs}^{st} = B_{12} \rho_\nu$ – ймовірність вимушених (*stimulated*) переходів з поглинанням (*absorption*) з рівня 1 на рівень 2, яка пропорційна спектральній густині енергії поля.

Сталі величини, що є специфічними для кожної пари станів 1 та 2 кожного конкретного атома, молекули чи іншої квантової системи, називаються **коефіцієнтами Айнштейна**.

Застосування формули Планка (11) Коефіцієнти Айнштейна

Отже, для переходів $2 \rightarrow 1$ маємо

$$\frac{dZ_{21}}{dt} = (A_{21}^{(3)} + B_{21}\rho_\nu)N_2$$

а для переходів $1 \rightarrow 2$:

$$\frac{dZ_{12}}{dt} = B_{12}\rho_\nu^{(4)}N_1$$

Якщо в системі існує рівновага, то $\frac{dZ_{21}}{dt} = \frac{dZ_{12}}{dt}$ і
можна записати

$$(A_{21} + B_{21}\rho_\nu)N_2 = B_{12}\rho_\nu N_1$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}\rho_\nu}{A_{21} + B_{21}\rho_\nu} \cdot \quad (6)$$

Застосування формули Планка (12) Коефіцієнти Айнштейна

Але в стані теплової рівноваги

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\exp(-E_2 / kT)}{\exp(-E_1 / kT)} \quad (7)$$

Порівнюючи (6) та (7), дістанемо

$$\frac{B_{12}\rho_\nu}{A_{21} + B_{21}\rho_\nu} = \frac{\exp(-E_2 / kT)}{\exp(-E_1 / kT)} \quad (8)$$

звідки $\rho_\nu = \frac{A_{21}}{B_{12}e^{(E_2-E_1)/kT} - B_{21}} \quad (9)$

З врахуванням $h\nu = E_2 - E_1$ маємо

$$\rho_\nu = \frac{A_{21}}{B_{12}e^{h\nu/kT} - B_{21}} \quad (10)$$

Застосування формули Планка (13)

Передбачення вимушеного випромінювання

При $T \rightarrow \infty$ густина $\rho_\nu \rightarrow \infty$, тоді з (10) випливає, що $B_{12} = B_{21}$ оскільки при $T \rightarrow \infty$

Тоді (10) можна переписати так

$$\rho_\nu = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (11)$$

Цей вираз при набуває вигляду

$$\rho_\nu = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \approx \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{kT}{h\nu} \quad (12)$$

Застосування формули Планка (14) Коефіцієнти Айнштейна

Вираз (10) для ρ_ν отримано при тій самій умові $h\nu \ll kT$, коли справедлива формула Релея-Джинса

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT.$$

Її порівняння з (12) дає знамените співвідношення між коефіцієнтами Айнштейна для спонтанних та вимушених переходів

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (14)$$

Застосування формули Планка (15)

Коефіцієнти Айнштейна

Необхідно підкреслити, що хоча кожен коефіцієнт Айнштейна може змінюватися в надзвичайно широких межах для кожної пари станів 1 та 2 кожного конкретного атома, молекули чи іншої квантової системи, їх відношення завжди буде визначатися універсальним виразом (14).

Права частина цього виразу має ясний фізичний зміст: це добуток густини станів поля на частоті переходу на енергію кванта на цій же частоті.

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \times h\nu$$

Застосування формули Планка (16)

Коефіцієнти Айнштейна

Ймовірність спонтанних переходів $\Gamma_{em}^{sp} = A_{21}$ має розмірність $[T^{-1}]$ (див. формулу (1)). Обернена до неї, тобто A_{21}^{-1} , величина називається **середнім часом життя атома** (ядра, молекули, квантової системи) **в збудженому стані** або просто **час життя в збуд-женому стані**. Часи життя при квантових переходах в ядрах з випромінюванням γ -квантів енергіями від 10 кеВ до $10^{-15} \text{ MeV}^{20}$ лежать в межах 10^{-35} с (зміна в $\tau = 10^{-9} - 10^{-8}$

разів!) Для атомів зазвичай $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$, але може сягати 11 млн-років при випромінюванні атомами водню/Ва довжині хвилі $\lambda_{21} = 4.11 \times 10^{14} \text{ м}$. **При**

цьому відношення

залишається сталим!

Застосування формули Планка (16) Коефіцієнти Айнштейна і квантові (фотонні) підсилювачі та генератори (лазери)

Квантові підсилювачі і квантові генератори електромагнітного випромінювання (потоків фотонів) були створені спочатку в мікрохвильовому діапазоні (мазери), а потім і у видимому діапазоні (лазер на рубіні, Майман, 1960 р.) Просування квантових підсилювачів і генераторів в короткохвильову область відбувалось дуже повільно, оскільки відношення ймовірностей спонтанних і вимушених переходів з випромінюванням пропорційне кубу частоти $\frac{W_{21}}{W_{12}} = \frac{\omega^3}{8\pi^2 \hbar c^3}$. Це утруднює створення так званого активного середовища, здатного підсилувати потік фотонів за рахунок вимушених переходів. (Докладно у доданому файлі *Spontanne ta vymushene vyprominiuvannia*)

Застосування формули Планка (17)

Теорія Великого вибуху і мікрохвильовий фон

Формула Планка прислужилась розв'язуванню і таких проблем ХХ-го і майбутніх століть як виникнення і походження Всесвіту.

У 1948 р. Г. Гамов опублікував роботу присвячену моделі «гарячо-го всесвіту», що розширюється після Великого вибуху. В ній він передбачив існування у наш час мікрохвильового космічного випромінювання, яке є ізотропним, тобто його потужність однакова для всіх напрямків, з яких воно надходить, і має спектр рівноважного теплового випромінювання абсолютно чорного тіла з температурою $1\div 10$ К, а в 1950 р. Гамов назвав температуру 3 К. Відповідно до першого закону Кірхгофа в «гарячу» епоху еволюції Всесвіту електромагнітне випромінювання було у термодинамічній рівновазі з гарячою речовиною. Після того при розширенні і охолодженні утворилися атоми фотони

Застосування формули Планка (18)

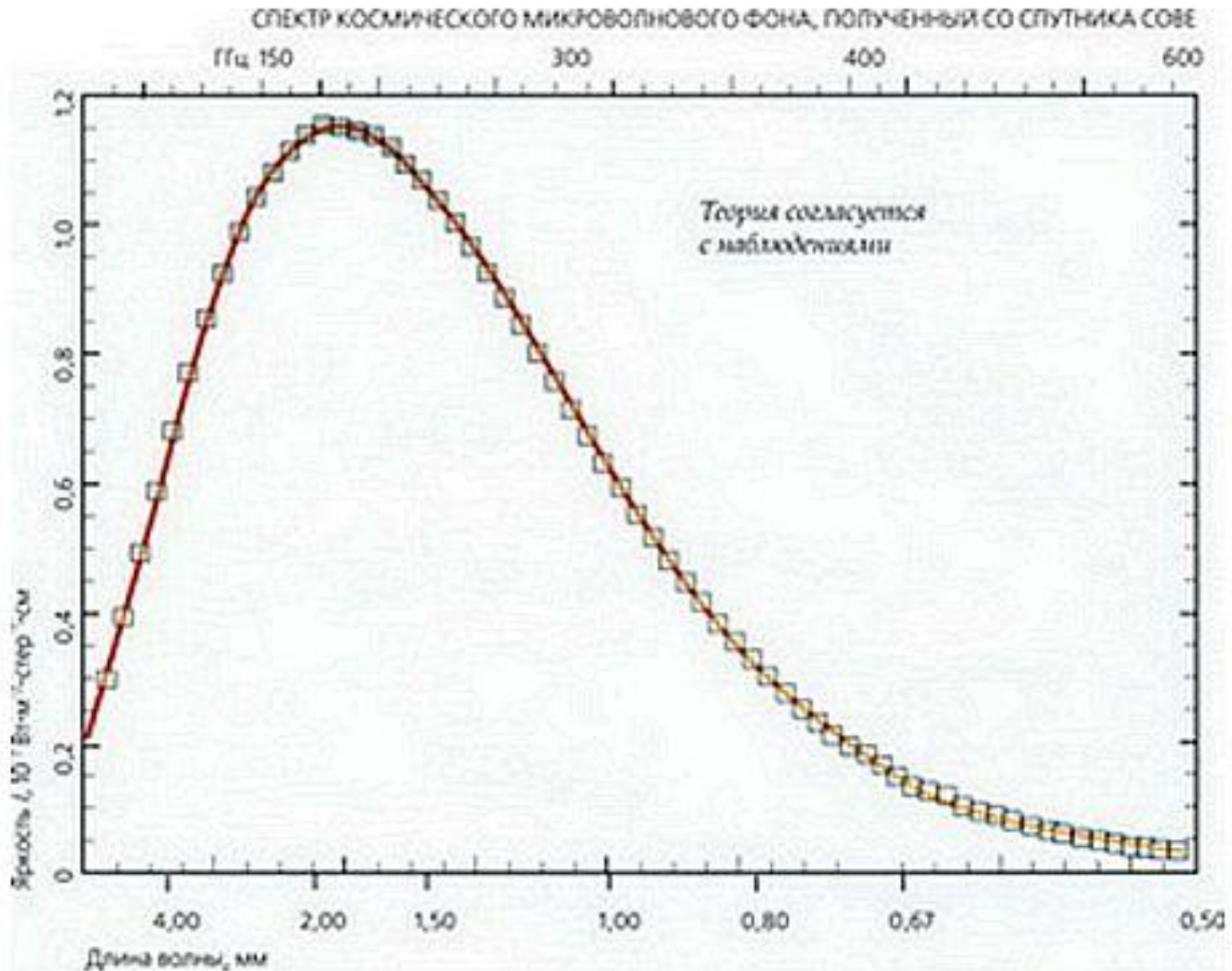
Реліктове випромінювання

У 1964 р. А. Пензіас та Р. Вілсон виявили наявність ізотропного мікрохвильового космічного випромінювання на довжині хвилі 7,35 см (частота 4,08 ГГц). За виміряною потужністю цього випромінювання користуючись формулою Планка вони визначили його температуру як $3,5 \pm 1$ К, близьку до значення передбаченого Гамовим. У 1978 р. Пензіас та Вілсон отримали за це відкриття Нобелівську премію.

Ретельні вимірювання мікрохвильового космічного фону, який дістав назву **реліктового випромінювання**, виконані в широкому діапазоні довжин хвиль від десятків сантиметрів до сотень мікрометрів засвідчили, що його спектр чудово збігається зі спектром випромінювання абсолютно чорного тіла з температурою $2,725 \pm 0,002$ К (див. наступний слайд).

Ці результати стали вирішальним підтвердженням моделі гарячого Всесвіту, що розширюється після Великого вибуху.

Реліктове випромінювання: розподіл Планка та спектр отриманий супутником COBE





КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Thank you for your kind attention!