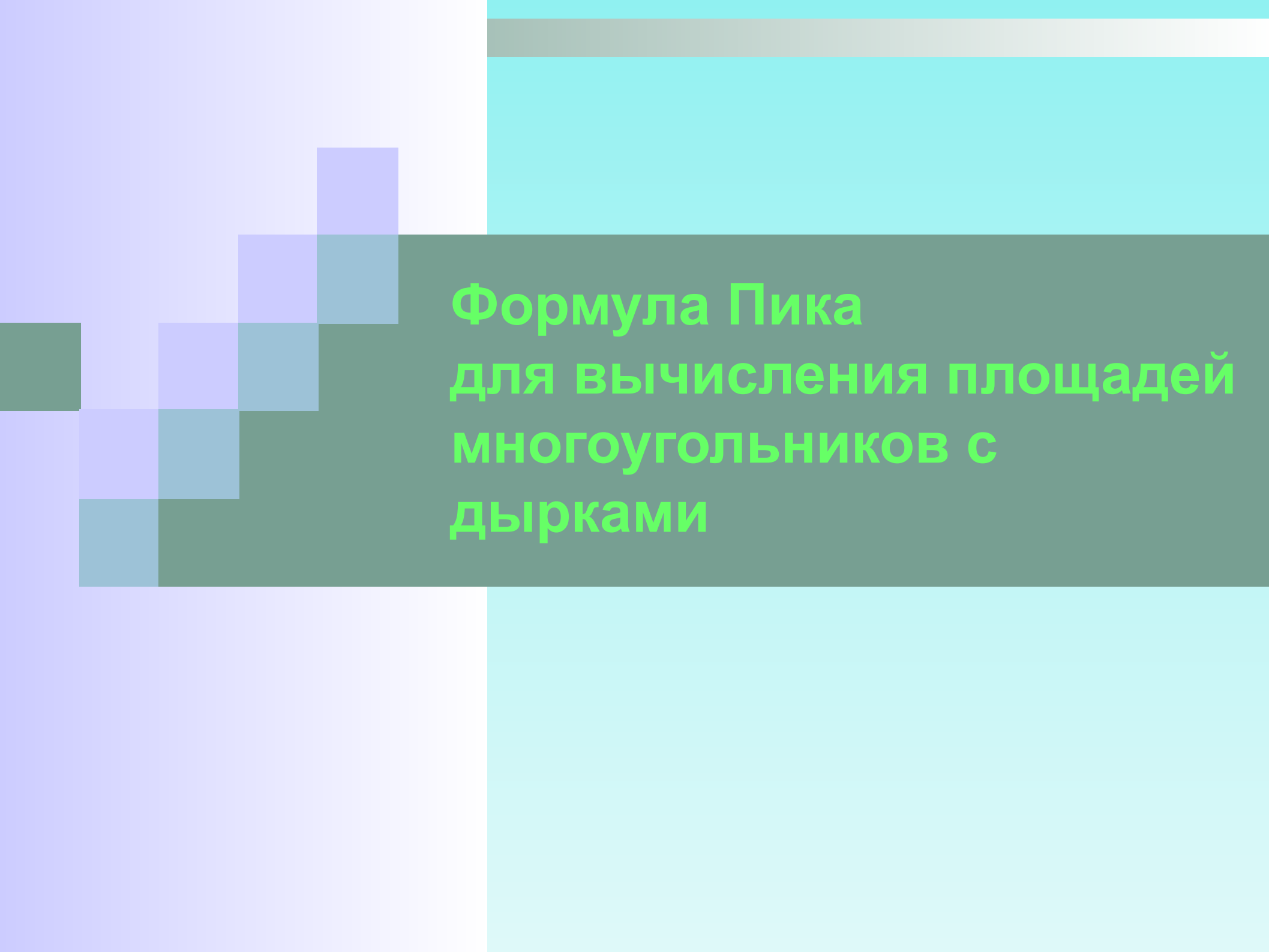


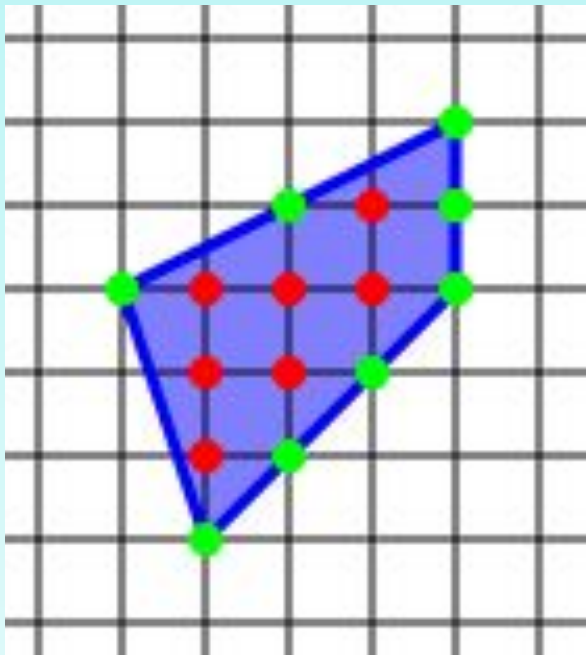


Формула Пика для вычисления площадей многоугольников с дырками

Формула Пика

Теорема. Пусть A — число целочисленных точек внутри многоугольника, B — количество целочисленных точек на его границе, S — его площадь. Тогда

$$S = A + \frac{B}{2} - 1.$$

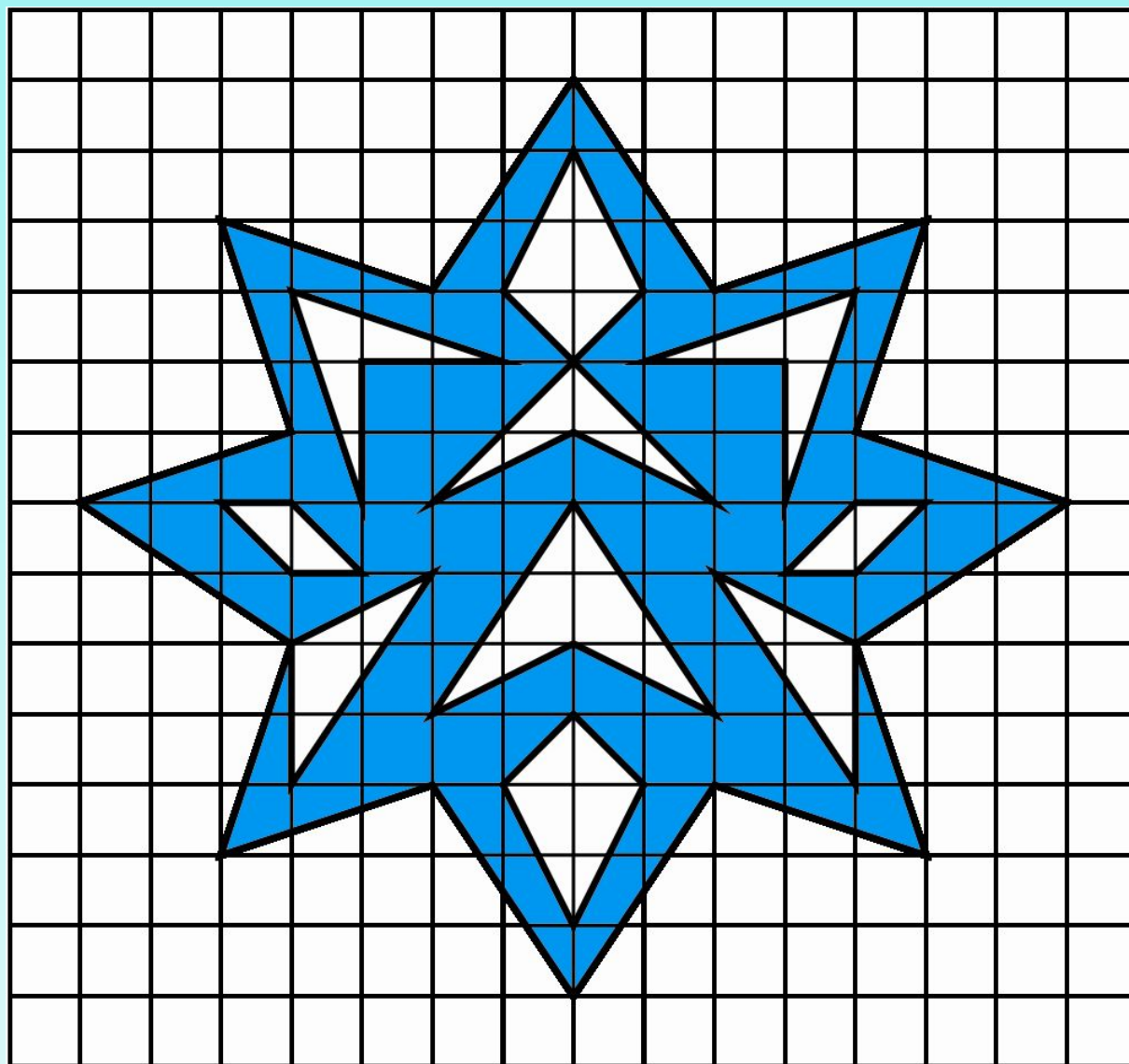


Пример.

$$A = 7, \quad B = 8$$

$$S = 7 + \frac{8}{2} - 1 = 10$$

Многоугольник с дырками



Цели работы

- 1) выявить зависимость между расположением дырок внутри многоугольника и изменением формулы Пика для вычисления площади такого многоугольника;
- 2) получить изменённую формулу Пика для вычисления площади многоугольника с некоторыми видами дырок.

Задача 1. Дырки, не касающиеся сторон многоугольника

Дан прямоугольник размером 10 на 8 клеток. Поочередно вырежем внутри прямоугольника, не касаясь его сторон, дырки (собственные дырки) в виде квадрата площади 2 и найдем его площадь по формуле Пика.

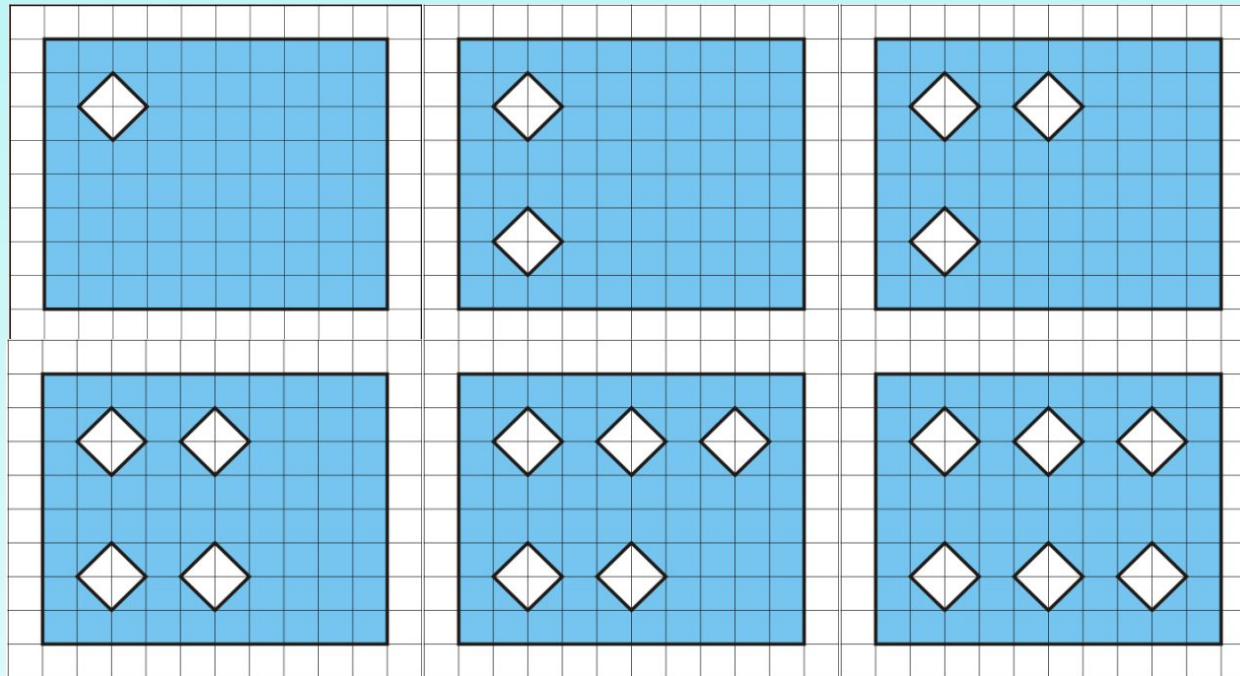


Таблица вычисления площади многоугольника с собственными дырками

Количество дырок	Площадь прямоугольника с дырками	Величина по формуле площади Пика	Величина отличия
1	$80 - 1 \cdot 2 = 78$	$(63 - 1 \cdot 5) + \frac{36 + 1 \cdot 4}{2} - 1 = 77$	1
2	$80 - 2 \cdot 2 = 76$	$(63 - 2 \cdot 5) + \frac{36 + 2 \cdot 4}{2} - 1 = 74$	2
3	$80 - 3 \cdot 2 = 74$	$(63 - 3 \cdot 5) + \frac{36 + 3 \cdot 4}{2} - 1 = 71$	3
4	$80 - 4 \cdot 2 = 72$	$(63 - 4 \cdot 5) + \frac{36 + 4 \cdot 4}{2} - 1 = 68$	4
5	$80 - 5 \cdot 2 = 70$	$(63 - 5 \cdot 5) + \frac{36 + 5 \cdot 4}{2} - 1 = 65$	5
6	$80 - 6 \cdot 2 = 68$	$(63 - 6 \cdot 5) + \frac{36 + 6 \cdot 4}{2} - 1 = 62$	6

Формула вычисления площади многоугольника с собственными дырками

Теорема 1. Площадь произвольного многоугольника с собственными дырками равна

$$S = A + \frac{B}{2} - 1 + k ,$$

где A — количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками,

B — количество граничных точек многоугольника (включая точки на границе дырок),

k — количество собственных дырок внутри многоугольника.

Доказательство теоремы 1

$$S = S_M - S_D = A_M + \frac{B_M}{2} - 1 -$$

$$- \left(\left(A_1 + \frac{B_1}{2} - 1 \right) + \left(A_2 + \frac{B_2}{2} - 1 \right) + \dots + \left(A_k + \frac{B_k}{2} - 1 \right) \right)$$

Количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками

$$A = A_M - (A_1 + A_2 + \dots + A_k) - (B_1 + B_2 + \dots + B_k)$$

Количество граничных точек многоугольника (включая границы дырок)

$$B = B_M + (B_1 + B_2 + \dots + B_k)$$

Подставляя выражения для A_M и B_M в формулу, получим

$$S = A + (A_1 + \dots + A_k) + (B_1 + \dots + B_k) + \frac{B - (B_1 + \dots + B_k)}{2} -$$

$$- 1 - \left((A_1 + \dots + A_k) + \frac{B_1 + \dots + B_k}{2} - k \right)$$

Задача 2. Дырки, касающиеся сторон многоугольника

Дан прямоугольник размером 10 на 8 клеток. Поочередно вырежем внутри прямоугольника, касаясь его сторон ровно в одной точке, дырки (собственные дырки) в виде квадрата площади 2 и найдем его площадь по формуле Пика.

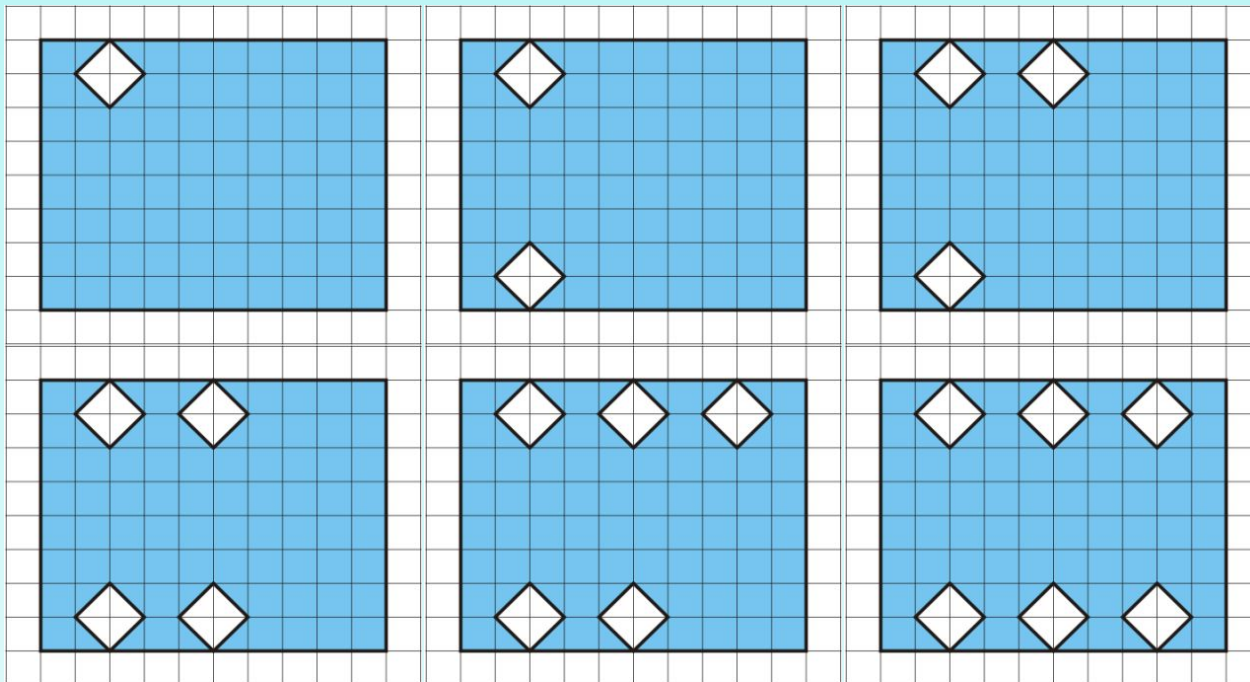


Таблица вычисления площади многоугольника с граничными дырками

Количество дыр	Площадь прямоугольника с дырками	Величина по формуле площади Пика	Величина отличия
1	$80 - 1 \cdot 2 = 78$	$(63 - 1 \cdot 4) + \frac{36 + 1 \cdot 3}{2} - 1 = 77,5$	0,5
2	$80 - 2 \cdot 2 = 76$	$(63 - 2 \cdot 4) + \frac{36 + 2 \cdot 3}{2} - 1 = 75$	1
3	$80 - 3 \cdot 2 = 74$	$(63 - 3 \cdot 4) + \frac{36 + 3 \cdot 3}{2} - 1 = 72,5$	1,5
4	$80 - 4 \cdot 2 = 72$	$(63 - 4 \cdot 4) + \frac{36 + 4 \cdot 3}{2} - 1 = 70$	2
5	$80 - 5 \cdot 2 = 70$	$(63 - 5 \cdot 4) + \frac{36 + 5 \cdot 3}{2} - 1 = 67,5$	2,5
6	$80 - 6 \cdot 2 = 68$	$(63 - 6 \cdot 4) + \frac{36 + 6 \cdot 3}{2} - 1 = 65$	3

Формула вычисления площади многоугольника с граничными дырками

Теорема 2. Площадь произвольного многоугольника с граничными дырками равна

$$S = A + \frac{B}{2} - 1 + \frac{k}{2},$$

где A — количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками,

B — количество граничных точек многоугольника (включая границы дырок),

k — количество граничных дырок внутри многоугольника.

Доказательство теоремы 2

$$S = S_M - S_D = A_M + \frac{B_M}{2} - 1 -$$

$$- \left(\left(A_1 + \frac{B_1}{2} - 1 \right) + \left(A_2 + \frac{B_2}{2} - 1 \right) + \dots + \left(A_k + \frac{B_k}{2} - 1 \right) \right)$$

Количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками

$$A = A_M - (A_1 + A_2 + \dots + A_k) - (B_1 - 1 + B_2 - 1 + \dots + B_k - 1),$$

Количество граничных точек многоугольника (включая границы дырок)

$$B = B_M + (B_1 - 1 + B_2 - 1 + \dots + B_k - 1).$$

Подставляя выражения для A_M и B_M в формулу, получим

$$S = S_M - S_D = A + (A_1 + \dots + A_k) + (B_1 + \dots + B_k) - k +$$

$$+ \frac{B - (B_1 + \dots + B_k) + k}{2} - 1 - \left((A_1 + \dots + A_k) + \frac{B_1 + \dots + B_k}{2} - k \right)$$

Формула вычисления площади многоугольника с дырками двух видов

Теорема 3. Площадь произвольного многоугольника с собственными и граничными дырками равна

$$S = A + \frac{B}{2} - 1 + k + \frac{m}{2},$$

A — количество собственных внутренних точек многоугольника с дырками,

B — количество граничных точек многоугольника (включая точки на границе дырок),

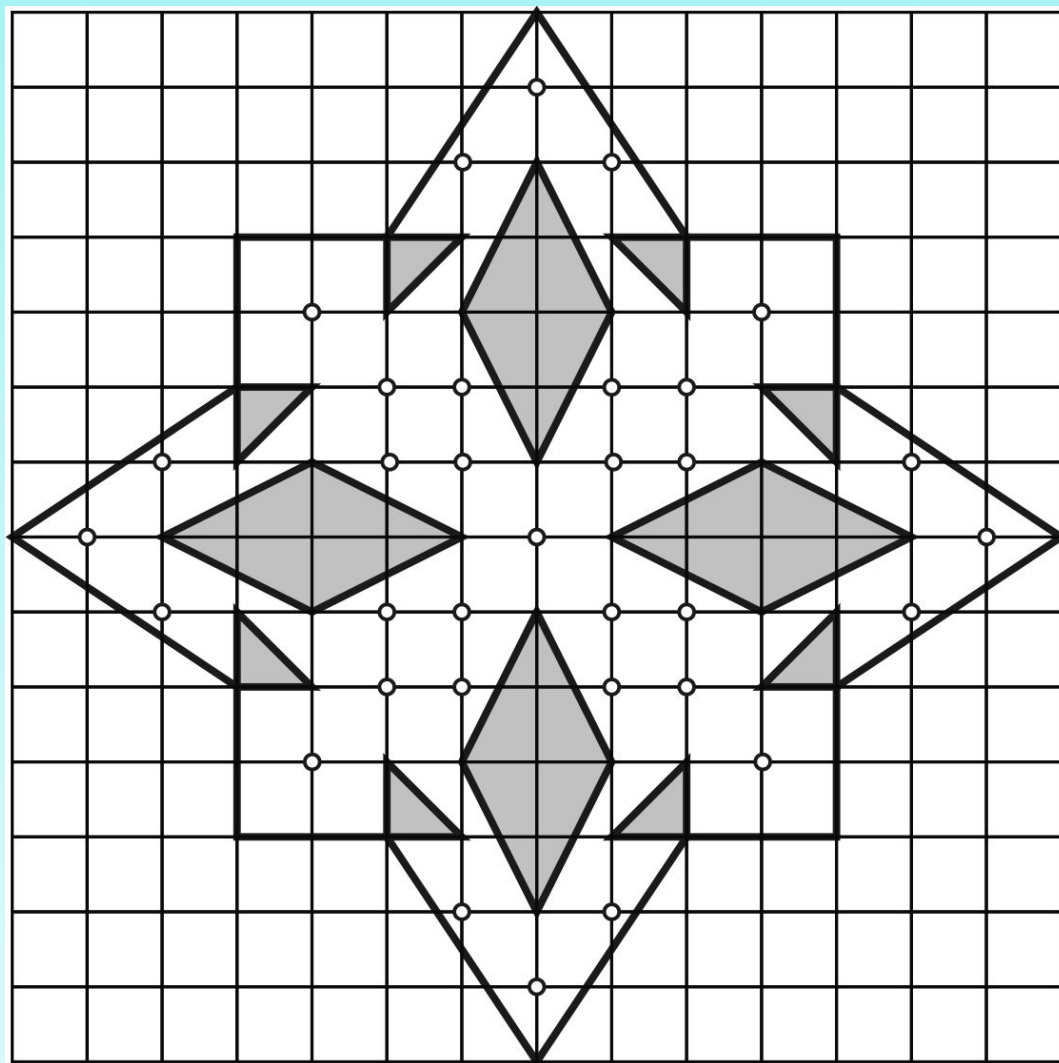
k — количество собственных дырок многоугольника,

m — количество граничных дырок многоугольника.

Пример. Вычислить площадь вырезанной из бумаги снежинки, изображенной на рисунке (дырки закрашены).

Эта фигура имеет $k=4$ внутренних дырки, $m=8$ граничных дырок, $A=33$ внутренних точек, $B=56$ граничных точек. Тогда по теореме 3 площадь этой «снежинки» равна

$$S = 33 + \frac{56}{2} - 1 + 4 + \frac{8}{2} = 68$$



Заключение

В работе рассмотрены два различных случая расположения дырок внутри многоугольника: без касания сторон многоугольника и с касанием сторон многоугольника в одной точке.

Основные результаты работы :

1) мы установили, что существует зависимость между расположением дырок внутри многоугольника и изменением формулы Пика для вычисления площади такого многоугольника;

2) получили изменённые формулы Пика для вычисления площади многоугольника с тремя видами дырок.



Спасибо за внимание!