

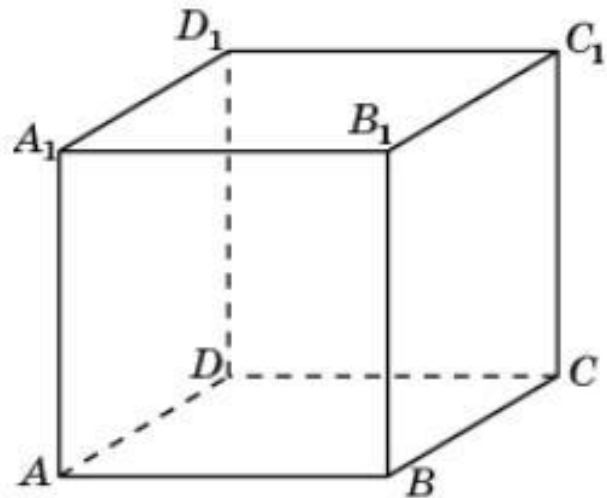
Решение заданий С2 при подготовке к ЕГЭ 2014 г.

Презентацию подготовила:
Учитель по математике
высшей категории
МАОУ «Лицей №3 им. А. С. Пушкина»
Попова Н.Ф.

г. Саратов, 2014

Задача 1. Условие:

- Изобразите сечение единичного куба $A...D_1$, проходящее через вершину D_1 и середины ребер AB ; BC . Найти его $S_{\text{сеч.}}$.



Решение:

$$S \text{ проекции} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

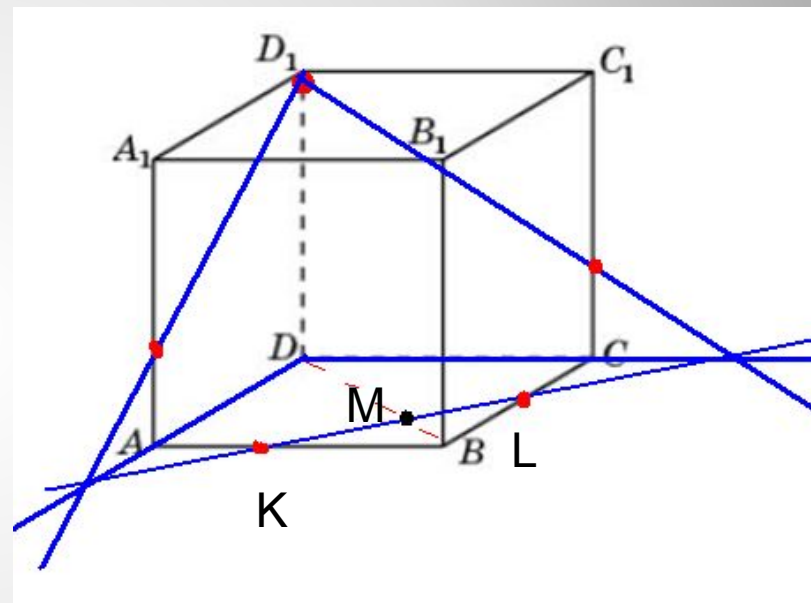
$$DM = \frac{3}{4} DB = \frac{3}{4} \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{16}{18}}} = \sqrt{\frac{9}{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

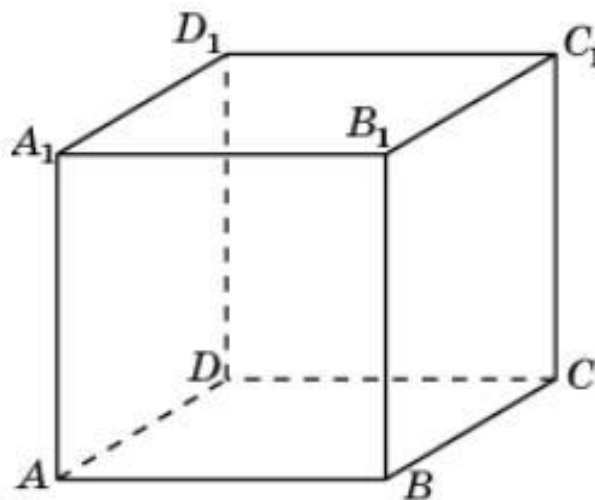
$$S_{\text{сеч}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{17}}{24}$

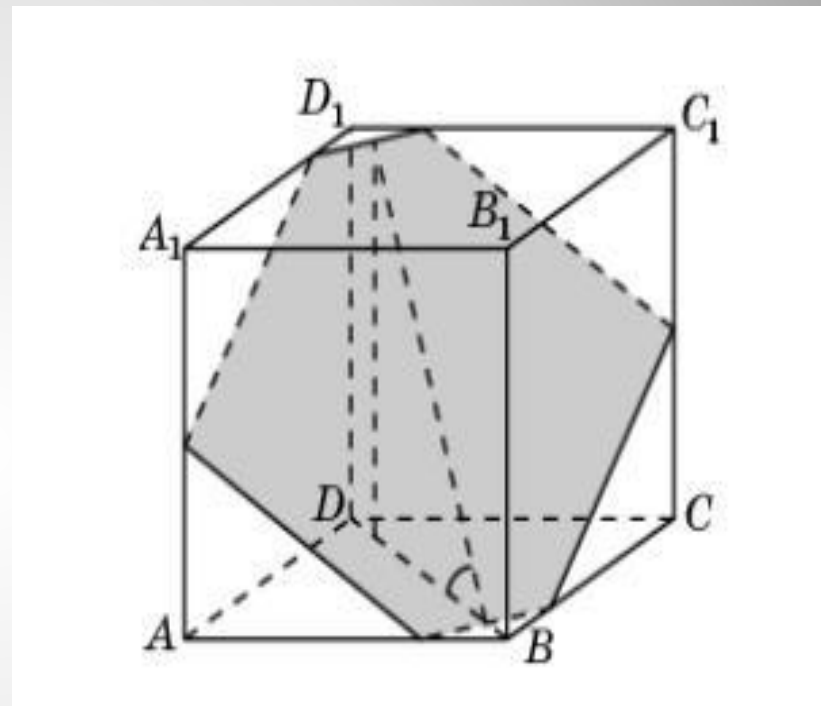


Задача 2. Условие:

- Изобразите сечение единичного куба $A...D_1$, проходящее через середины ребер AA_1 , CC_1 и точку на ребре AB , отстоящую от вершины A на $0,75$. Найдите его площадь.



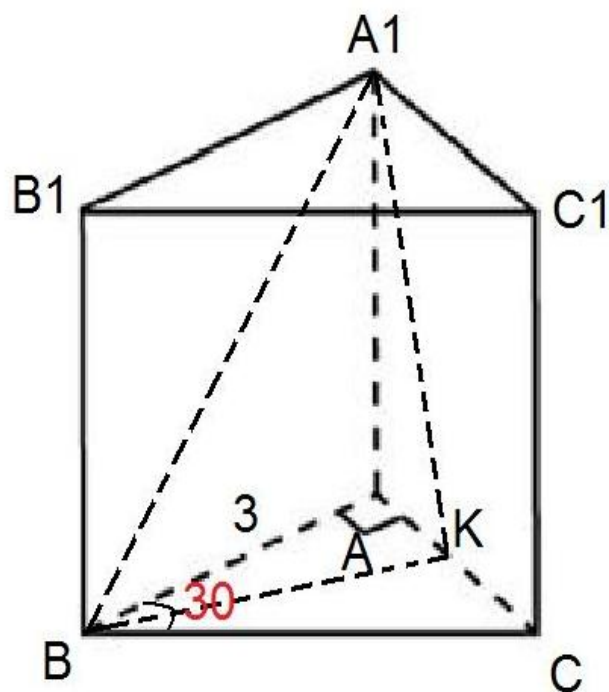
- Искомым сечением будет шестиугольник. Площадь его ортогональной проекции на плоскость ABC равна $\frac{15}{16}$, косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью ABC равен $\frac{3}{\sqrt{17}}$. Площадь сечения равна $\frac{5 \cdot \sqrt{17}}{16}$.



Ответ:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{5 \cdot \sqrt{17}}{16}$$

Задача 3. Условие:



- В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ BK -биссектриса основания ABC . Через биссектрису и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания 60° . Найти $S_{\text{сеч.}}$, если $AB=3$, $BC=6$, угол $ABC=30^\circ$.

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \varphi}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

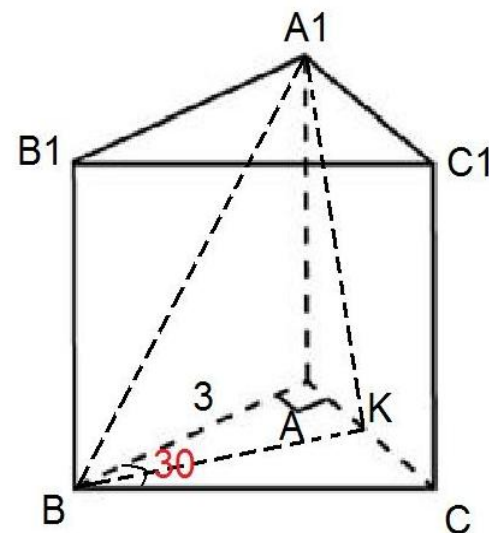
BK — биссектриса, по свойству биссектрис:

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad . AK=t; KC=2t.$$

$$S_{\triangle AKB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$$

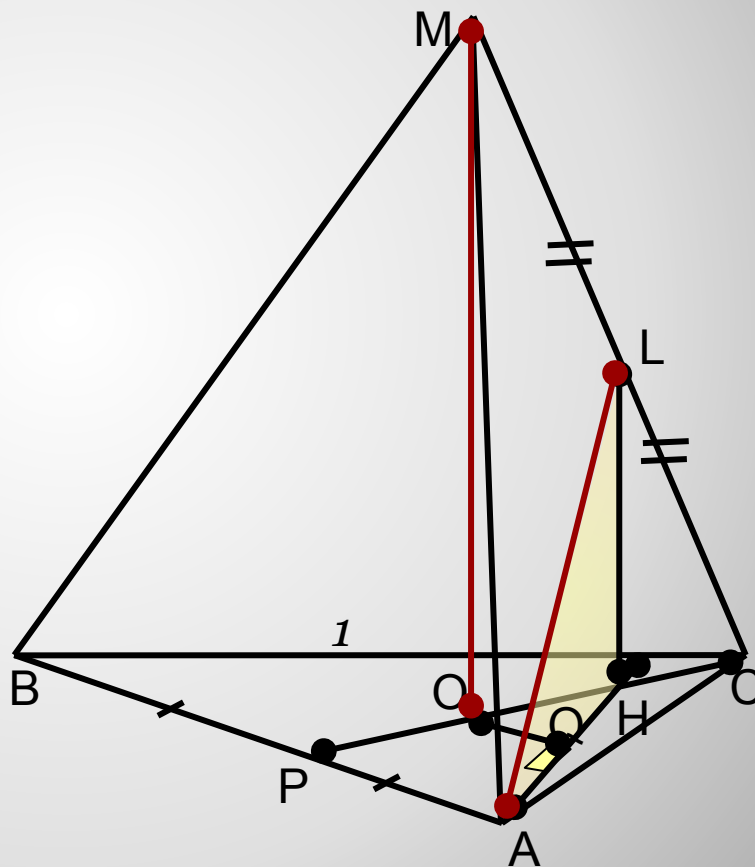
Ответ: 3.



- Если **ортогональная проекция** на плоскость α переводит прямую a в точку A , а прямую b в прямую b_1 , то **расстояние между скрещивающимися прямыми a и b** равно расстоянию от A до прямой b_1 .
- **Расстояние между скрещивающимися прямыми** равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.

Задача 4. Условие:

- Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO , если L – середина MC , O – центр грани ABC .



Решение:

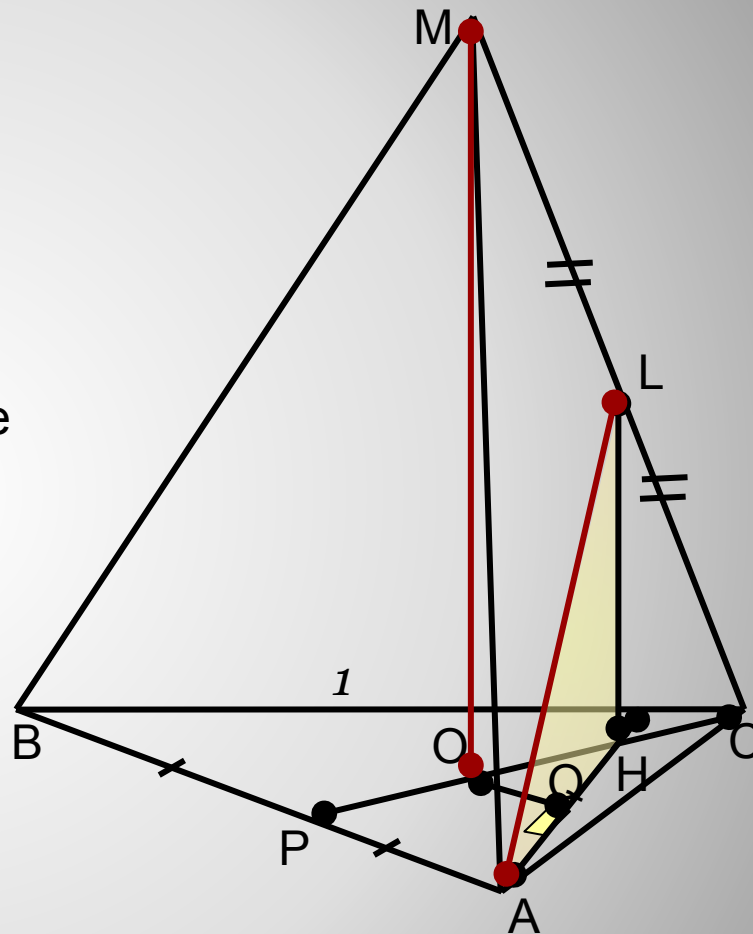
1. $LH \perp (ABC) \in H$
2. $CO = HO$.
3. Точка O и прямая AH – ортогональные проекции соответственно прямых MO и AL на (ABC).



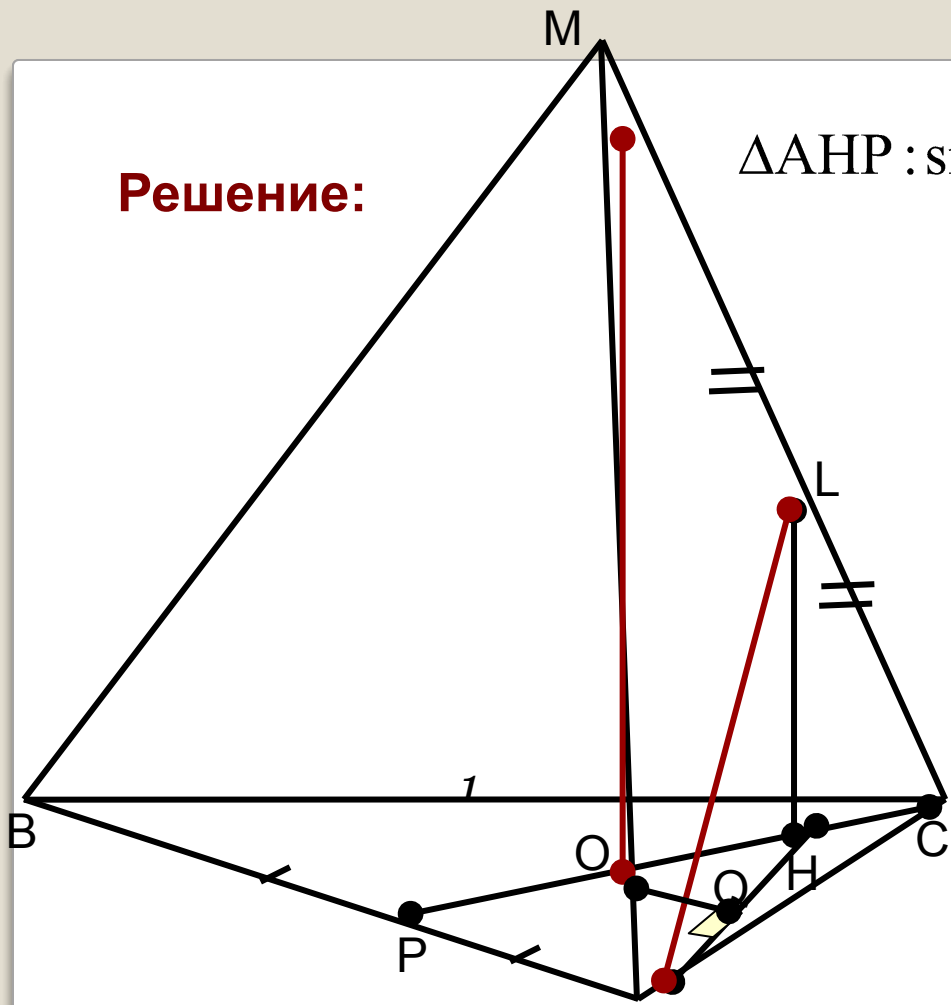
Расстояние между скрещивающимися прямыми MO и AL равно расстоянию от точки O до прямой AH.

4. $OQ \perp AH$ OQ- искомое расстояние.

5. Вычислим OQ.



Решение:



$$\Delta \text{AHP} : \sin \angle \text{AHP} = \frac{\text{AP}}{\text{AH}} = \frac{AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}.$$

$$OH = \frac{1}{3}CP$$

$$PH = \frac{2}{3}CP$$

$$CP = AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$OQ = \frac{OH \cdot AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}$$

$$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

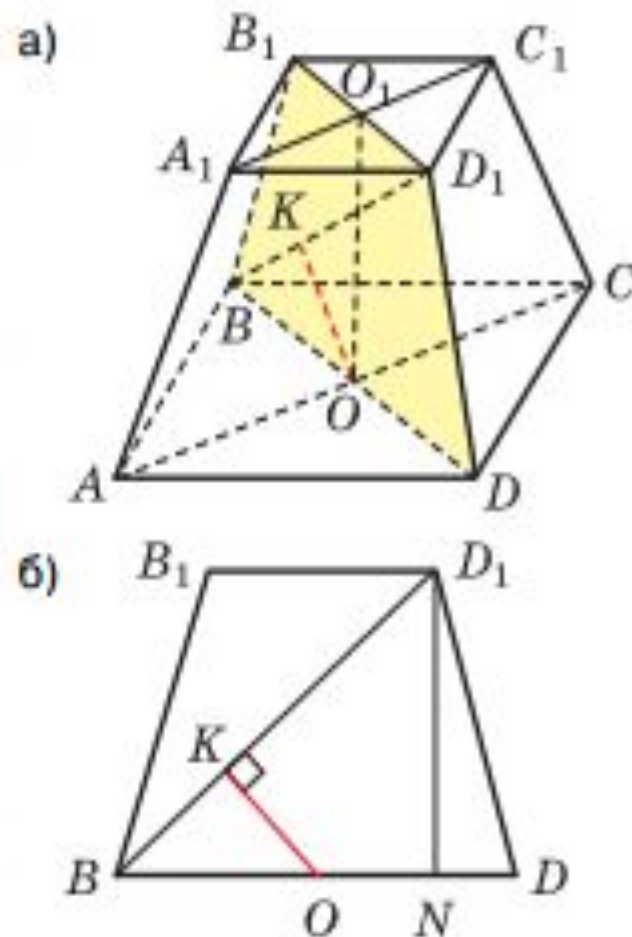
$$PH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta OQH : \sin \angle OHQ = \frac{OQ^A}{OH} \Rightarrow OQ = OH \cdot \sin \angle OQH \quad OQ = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Задача 5. Условие:

В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $A...D_1$ со сторонами оснований a и b ($a > b$) и высотой h найти расстояние между диагональю BD_1 и диагональю большего основания AC .



$$D_1N = h,$$

$$BN = BD - ND = a\sqrt{2} - \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2},$$

$$BD_1 = \sqrt{D_1N^2 + BN^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a+b)^2}{2}}.$$

В треугольнике BKO

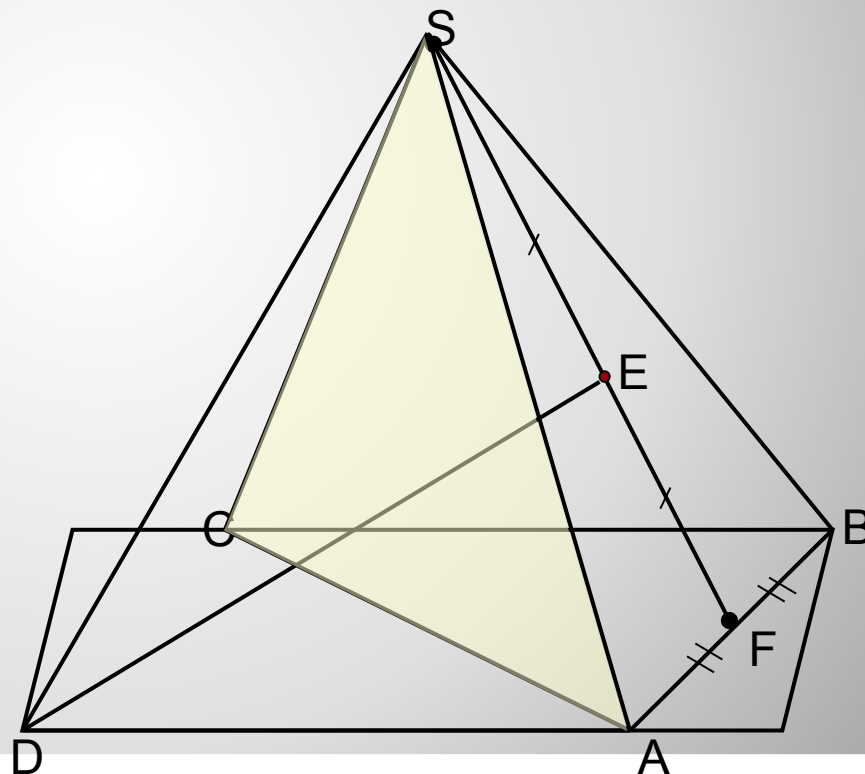
$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $\frac{OK}{D_1N} = \frac{BO}{BD_1}$ и $OK = \frac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}.$

Ответ: $\frac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}.$

- В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1. Найдите угол между прямой DE , где E - середина апофемы SF грани ASB , и плоскостью ASC .

Задача 6.
Условие:



Введем прямоугольную систему координат.

$$D(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$$

$$OD^{\boxtimes}\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\}-нормаль$$

$$E(-\frac{1}{4}; 0; \frac{\sqrt{2}}{4})$$

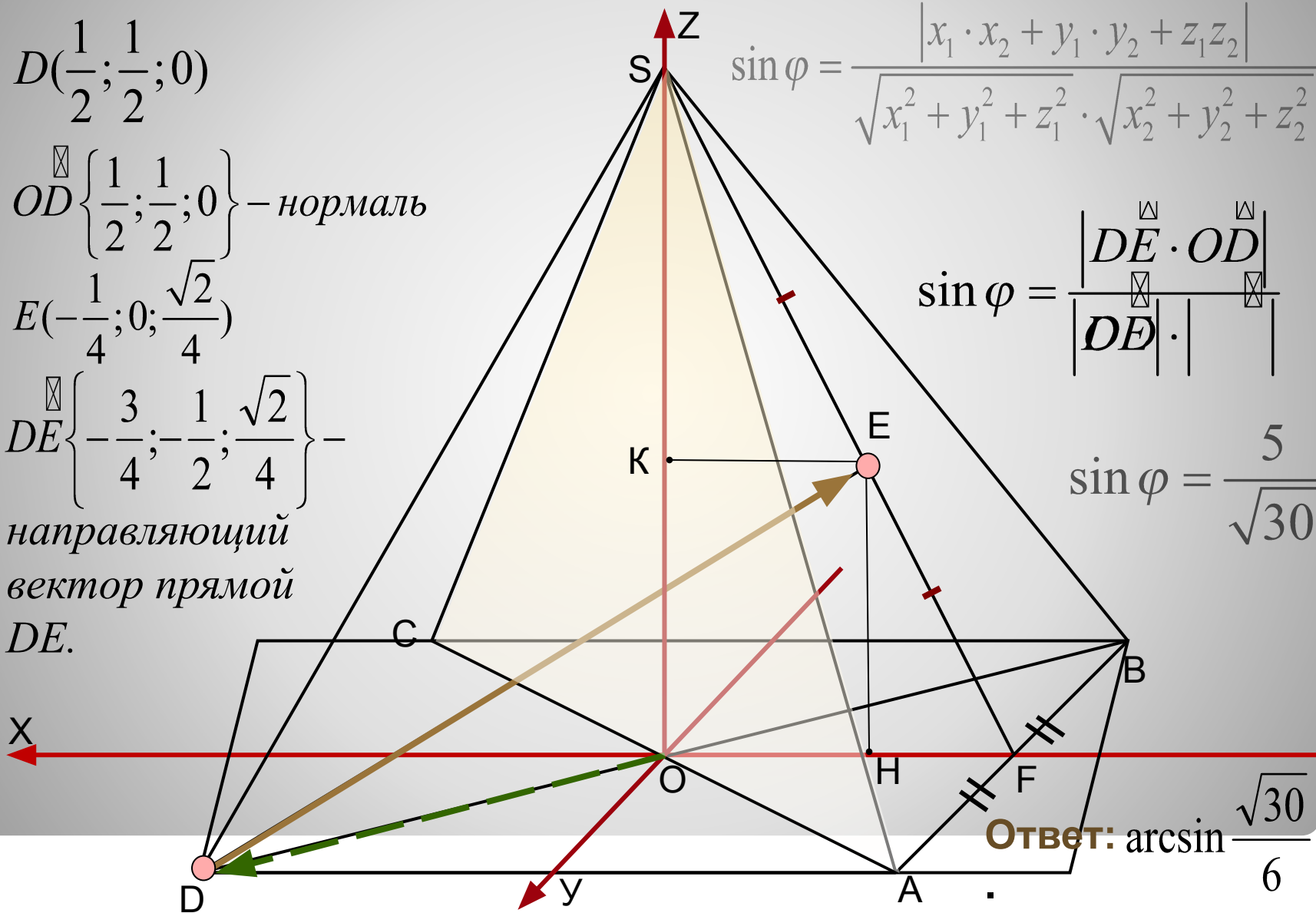
$$DE \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} -$$

направляющий
вектор прямой
 DE . □

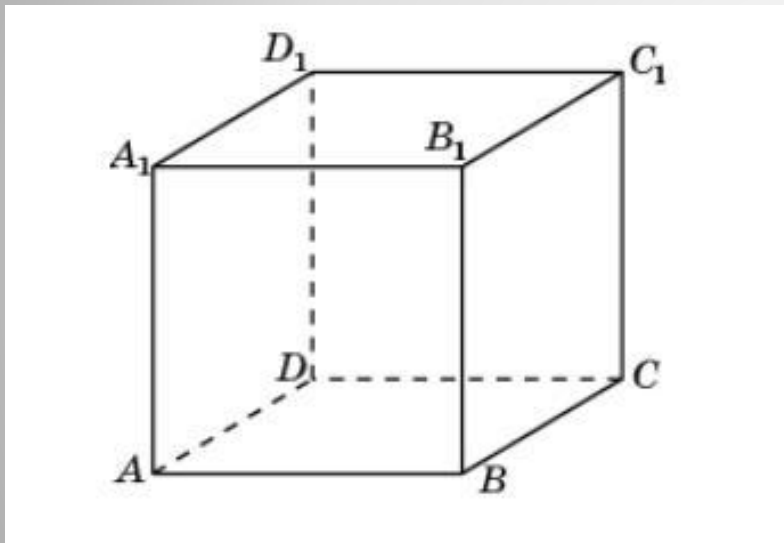
$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{|DE \cdot OD|}{|DE| \cdot |OD|}$$

$$\sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{30}}$$



Задача 6. Условие:



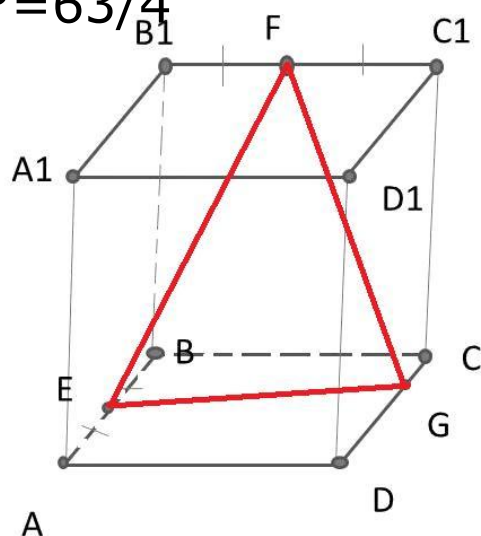
- В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ лежит $ABCD$ со стороной $\sqrt{21}$ и углом A , равным 60° . На ребрах AB , B_1C_1 и DC взяты соответственно точки E , F и G так, что $AE=EB$, $B_1F=FC_1$ и $DG=3GC$. Найти косинус угла между плоскостями EFG , если высота призмы равна $4,5$.

1 способ решения:

Решение 1

(угол между прямой и плоскостью)

- $F \perp (ABC)$
 F_1 -ортогональная проекция точки F на плоскость и основание
 $BF_1 = F_1C$, $FF_1 \parallel BB_1$
- G_1 -точка пересечения прямых EG и BC . Треугольник EF_1G_1 , лежащий в плоскости ABC , - ортогональная проекция треугольника EFG , лежащего в плоскости EFG
- Из подобия треугольников EBG_1 и $GCG_1 \Rightarrow EB \parallel GC$, $CG_1 = BC$, т.к. $GC = \frac{1}{4}DC = \frac{1}{2}EB$
- По теореме косинусов для треугольника EBF_1 :
 $EF_1^2 = EB^2 + BF_1^2 - 2 \cdot EB \cdot BF_1 \cdot \cos 120^\circ = 63/4$
- $EF = (3\sqrt{7})/2$
- Из прямоугольных треугольников EFF_1 и F_1FG_1 :
 $EF^2 = EF_1^2 + F_1F^2 = 36$
 $EF = 6$
 $FG_1^2 = F_1G_1^2 + F_1F^2 = 270/4$
 $FG_1 = (3\sqrt{30})/2$



- По теореме косинусов для треугольника EBG_1 :
 $EG_1^2 = EB^2 + BG^2 - 2 \cdot EB \cdot BG \cdot \cos 120^\circ = 441/4$
 $EG_1 = 21/2$
- Используя теорему косинусов для треугольника EFG_1 :
 $\cos \angle EFG_1 = (EF^2 + FG_1^2 - EG_1^2) / (2 \cdot EF \cdot FG_1) = -3 / (8\sqrt{30})$
 $\sin \angle EFG_1 = \sqrt{1 - (-3 / (8\sqrt{30}))^2} = \sqrt{637} / (8\sqrt{10})$
- Находим площадь треугольника EFG_1
 $S_{EFG_1} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FG_1 \cdot \sin \angle EFG_1 = ((9\sqrt{3})/16) \cdot \sqrt{637}$
- Находим площадь треугольника EF_1G_1 :
 $S_{EF_1G_1} = \frac{1}{2} \cdot EF_1 \cdot F_1G_1 \cdot \sin 150^\circ = (63\sqrt{3})/16$
- Находим косинус угла Y между плоскостями EFG_1 и ABC по формуле:
 $\cos Y = S_{EF_1G_1} / S_{EFG_1} = 1/\sqrt{13}$

Ответ: $1/\sqrt{13}$

