Обобщенная линейная модель множественной регрессии. Обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК)

Обобщенная линейная модель множественной регрессии

Линейная модель множественной регрессии

$$Y = X\overline{\beta} + \overline{\varepsilon}\,, \qquad (1)$$

для которой нарушено 4 или 5 условие Гаусса-Маркова называется **обобщенной линейной моделью множественной регрессии (ОЛММР),** а именно:

1) $x_1, \ldots, x_k$ – детерминированные переменные;
2) ранг матрицы X равен "$k+1$" – среди признаков нет линейно зависимых;
3) $M\varepsilon_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ - нет систематических ошибок в измерении y;
4) $D\varepsilon_i = M\varepsilon_i^2 = \sigma_i^2$, $i = \overline{1,n}$
5) $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) \neq 0$, $i \neq j$, $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$

4') $\Sigma_\varepsilon = M\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}^T = \sigma_0^2\Sigma_0$, Σ_0 - положительно-определенная, симметричная матрица

Свойства МНК-оценок для обобщенной линейной модели множественной регрессии

Оценка $\overline{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

1. Оценка b по-прежнему несмещенная

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T (X\overline{\beta} + \overline{\varepsilon}) = \overline{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

$$M\overline{b} = M(\overline{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \overline{\varepsilon}) = \overline{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T M\varepsilon = \overline{\beta}$$

Свойства МНК-оценок для обобщенной линейной модели множественной регрессии

Оценка $\bar{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

1. Оценка b по-прежнему несмещенная

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T (X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

$$M\bar{b} = M(\bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T M\varepsilon = \bar{\beta}$$

2. Оценка b состоятельная.

Свойства МНК-оценок для обобщенной линейной модели множественной регрессии

Оценка $\bar{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

1. Оценка b по-прежнему несмещенная

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T (X\bar{\beta} + \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

$$M\bar{b} = M(\bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon}) = \bar{\beta} + (X^T X)^{-1} X^T M\varepsilon = \bar{\beta}$$

2. Оценка b состоятельная.

3. Однако полученная ранее формула для ковариационной матрицы вектора оценок Σ_b оказывается неприемлемой в условиях обобщенной модели:

$$\sum_{\bar{b}} = M[((X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon})((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon)^T)] = M[(X^T X)^{-1} X^T \bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}^T (X^T X)^{-1}] =$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T M(\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}^T) X (X^T X)^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T \sigma_0{}^2 \Sigma_0 X (X^T X)^{-1}$$

в то время как для классической модели $\sum_{\bar{b}} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$

Обобщенный метод наименьших квадратов

Для получения наиболее эффективной оценки нужно использовать другую оценку, получаемую так называемым **обобщенным методом наименьших квадратов** (ОМНК).

$$\bar{b}_{ОМНК} = (X^T \Sigma_0^{-1} X)^{-1} (X^T \Sigma_0^{-1} Y)$$

Несмещенная оценка остаточной дисперсии:

$$S^2_{ост(ОМНК)} = \frac{1}{n-k-1}(Y - Xb_{ОМНК})^T \Sigma_0^{-1} (Y - Xb_{ОМНК})$$

ковариационной матрицы $\Sigma_{b_{ОМНК}}$:

$$\hat{\Sigma}_{b_{ОМНК}} = S^2_{ост(ОМНК)} (X^T \Sigma_0^{-1} X)^{-1}.$$

Обобщенный метод наименьших квадратов

Выборочный коэффициент детерминации определяется по формуле:

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\overline{e}^T \Sigma_0^{-1} \overline{e}}{(\overline{Y} - \overline{Y}_{cp})^T \Sigma_0^{-1} (\overline{Y} - \overline{Y}_{cp})}.$$

Обобщенный метод наименьших квадратов

Для применения обобщенного метода наименьших квадратов необходимо знание ковариационной матрицы Σ_0, что встречается крайне редко в практике эконометрического моделирования.

Поэтому для практической реализации обобщенного метода наименьших квадратов необходимо вводить дополнительные условия на структуру матрицы Σ_0.

Обобщенный метод наименьших квадратов

Матрица Σ_0 как симметричная матрица может быть представлена как произведение двух матриц: $\Sigma_0 = CC^T$

1. $C^{-1}\Sigma_0(C^T)^{-1} = \mathrm{E}$
2. $\Sigma_0^{-1} = (C^T)^{-1}C^{-1}$ (учитывая свойства обратных матриц)

Умножив обе части обобщенной регрессионной модели на матрицу C^{-1} слева, получим:

$$Y = X\overline{\beta} + \overline{\varepsilon}$$

$$C^{-1}Y = C^{-1}X\overline{\beta} + C^{-1}\overline{\varepsilon}$$

$$Y_{np} = X_{np}\beta + \varepsilon_{np}$$

Модель $Y_{np} = X_{np}\beta + \varepsilon_{np}$ удовлетворяет требованиям КЛММР:

$$M(\varepsilon_{np}\varepsilon_{np}^T) = M(C^{-1}\varepsilon\varepsilon^T(C^T)^{-1}) = C^{-1}M\varepsilon\varepsilon^T(C^T)^{-1} = \sigma_0^2 C^{-1}\Sigma_0(C^T)^{-1} = \sigma_0^2$$

$$Y_{np} = X_{np}\beta + \varepsilon_{np}$$ - является КЛММР

$$b_{\hat{I}\grave{I}\acute{I}\hat{E}} = (X_{\ddot{\imath}\eth}^T X_{\ddot{\imath}\eth})^{-1} X_{\ddot{\imath}\eth}^T Y_{\ddot{\imath}\eth} = (X^T(C^T)^{-1}X)^{-1} X^T(C^T)^{-1}C^{-1}Y =$$

$$= (X^T\Sigma_0^{-1}X)^{-1}(X^T\Sigma_0^{-1}Y)$$

$$\Sigma_{b_{OMHK}} = \sigma_0^2 (X_{np}^T X_{np})^{-1} = \sigma_0^2 (X^T \Sigma_0^{-1} X)^{-1}$$

$$S^2_{\hat{\imath}\,\tilde{n}\grave{o}\,(\hat{I}\,\grave{I}\,\acute{I}\,\hat{E})} = \frac{1}{n-k-1}(Y_{\ddot{\imath}\,\eth} - X_{\ddot{\imath}\,\eth} b_{OMHK})^T (Y_{\ddot{\imath}\,\eth} - X_{\ddot{\imath}\,\eth} b_{OMHK}) = (Y - Xb_{OMHK})^T \Sigma_0^{-1}(Y - Xb_{OMHK}$$

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\overline{e}^T \Sigma_0^{-1} \overline{e}}{(\overline{Y} - \overline{Y}_{cp})^T \Sigma_0^{-1} (\overline{Y} - \overline{Y}_{cp})}$$