Часть II.

СЛУЧАЙНЫЕ

ВЕЛИЧИНЫ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

СЛУЧАЙНОЙ

НАЗЫВАЮТ ВЕЛИЧИНУ, КОТОРАЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИСПЫТАНИЯ ПРИНИМАЕТ ОДНО ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ДЛЯ НЕЕ ЗНАЧЕНИЙ, НО КАКОЕ ИМЕННО – ЗАРАНЕЕ НЕИЗВЕСТНО

(Т.К. ЭТО ЗАВИСИТ ОТ СЛУЧАЙНОГО СТЕЧЕНИЯ ОБСТОЯТЕЛЬСТВ).

Примеры:

- **Число очков при бросании игрального кубика (1, 2, …6).**
- **Температура тела человека в норме в данный момент времени ($36,0 < t^0C < 37,0$).**

<u>Обозначение</u>**:**

- **Случайные величины – X, Y**
- **Их значения – x, y**

То, что случайная величина X

в данном испытании примет некоторое значение x –

случайное событие.

ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

СЛУЧАЙНЫЕ

ВЕЛИЧИНЫ

ДИСКРЕТНЫЕ

НЕПРЕРЫВНЫЕ

Дискретная случайная величина (ДСВ)

ДИСКРЕТНОЙ

называется величина, принимающая отдельные, <u>изолированные</u> значения,

которые можно *<u>перенумеровать</u>* (*<u>сосчитать</u>*).

Примеры:

- **Число очков, выпадающих при бросании кубика (1, 2,…6).**
- **Число студентов на лекции (0,1,2,…, численность курса).**

Непрерывная случайная величина (НСВ)

НЕПРЕРЫВНОЙ

называется величина, принимающая *<u>любые</u>* значения из некоторого интервала.

Таких значений <u>всегда</u> бесконечно много (независимо от величины интервала),

причем <u>перенумеровать их в принципе невозможно</u> –

между любыми двумя найдется еще множество значений.

Примеры:

- Температура тела человека в норме (36,0 < t^0C <37,0).
- Артериальное давление.

2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайная величина задается *ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ*.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ –

ВЗАИМОСВЯЗЬ

МЕЖДУ ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ

ВЕРОЯТНОСТЯМИ.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ есть различные:

- **ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ** - ДЛЯ ЛЮБЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН
- **РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ** - ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ВЕЛИЧИН
- **ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ** – ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕЛИЧИН

РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ:

указываются
все возможные значения x_i
ДСВ
и их вероятности p_i,

обычно в <u>табличной</u> форме.

Таблица ряда распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ ДСВ

СУММА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВСЕХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ РАВНА ЕДИНИЦЕ,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ:

функция, значение которой

при любом x

равно вероятности

того, что случайная величина X

примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства F (x)

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
3. F (x) - неубывающая функция.

$F(+\infty) = 1$ –

УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ ДСВ и НСВ.

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ НСВ- производная функции распределения этой величины:

$$f(x) = F'(x).$$

⇓

Функция распределения – первообразная для плотности вероятности:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Чем больше плотность вероятности НСВ в данной точке х,

тем больше вероятность попадания ее значений в малую окрестность этой точки.

Или, иными словами, тем чаще при повторении испытаний НСВ принимает значения, близкие к х.

Свойство f (x):

$$f(x) \geq 0.$$

В отличие от графика F(x), график f(x) может иметь экстремум.

УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ НСВ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ значений СВ В ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ

Вероятность того, что любая случайная величина примет значения в произвольном интервале [a, b), определяется через функцию распределения по формуле:

$$P(a \le X < b) = F(b)-F(a)$$

Для непрерывной случайной величины эта вероятность может быть вычислена также через плотность вероятности по формуле:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВ –

ЭТО ЧИСЛА,

КАЖДОЕ ИЗ КОТОРЫХ ХАРАКТЕРИЗУЕТ

СЛУЧАЙНУЮ ВЕЛИЧИНУ С КАКОЙ-ТО

ОПРЕДЕЛЕННОЙ СТОРОНЫ.

Запомните:

Числовые характеристики –

не случайные величины,

не функции,

а конкретные ЧИСЛА!

Основные числовые характеристики

ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:

- *МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ* M(X)
- *ДИСПЕРСИЯ* D (X)
- *СРЕДНЕКВАДРАТИ-ЧЕСКОЕ*

  ОТКЛОНЕНИЕ σ (X)

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ – ОДИН И ТОТ ЖЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕЛИЧИН,

ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ – РАЗНЫЕ.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ (ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ) СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПРИБЛИЖЕННО РАВНО <u>СРЕДНЕМУ АРИФМЕТИЧЕСКОМУ</u> ВСЕХ НАБЛЮДАЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭТОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Формулы вычисления M(X)

МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ

ДИСКРЕТНОЙ СВ X

называется число

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum x_i p_i .$$

МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ

НЕПРЕРЫВНОЙ СВ X

НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

Здесь f(x) – плотность вероятности НСВ.

ДИСПЕРСИЯ

II. ДИСПЕРСИЯ

ХАРАКТЕРИЗУЕТ

СТЕПЕНЬ РАССЕЯНИЯ

НАБЛЮДАЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ВОКРУГ ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ.

ДИСПЕРСИЯ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ЧЕРЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ:

ЭТО ЧИСЛО, РАВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЖИДАНИЮ КВАДРАТА ОТКЛОНЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТ ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ:

$$D(X) = M\left([X - M(X)]^2 \right).$$

X^2

БОЛЕЕ УДОБНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Если ДСВ X задана таблицей (см. выше), то закон распределения X^2 имеет вид:

X^2	x_1^2	x_2^2	…	x_n^2
P	p_1	p_2	…	p_n

и $M(X^2) = \Sigma x_i^2 p_i$

Размерность числовых характеристик

РАЗМЕРНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ – КАК У САМОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

РАЗМЕРНОСТЬ ДИСПЕРСИИ РАВНА <u>КВАДРАТУ РАЗМЕРНОСТИ</u> СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

ДЛЯ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ РАССЕЯНИЯ

В ТЕХ ЖЕ ЕДИНИЦАХ, ЧТО И САМА СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА,

ВВОДЯТ ТРЕТЬЮ ЧИСЛОВУЮ ХАРАКТЕРИСТИКУ, σ.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

III. СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ -
ЭТО ЧИСЛО
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Отсюда $D(X) = \sigma^2(X).$

Как и дисперсия, среднеквадратическое отклонение характеризует степень рассеяния наблюдаемых значений случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Но при этом размерность σ <u>равна</u> размерности самой случайной величины.

4. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Существуют различные законы распределения случайных величин. Так, для дискретных величин распространенными являются

распределение Бернулли (иначе – биномиальное),

распределение Пуассона;

для непрерывных величин - равномерное, экспоненциальное, нормальное распределения. Последнее чаще всего встречается на практике, его мы и рассмотрим более подробно.