10 класс

Угол между прямыми. Перпендикулярность прямой и пл

Устная работа

- **Как могут быть расположены прямые в пространстве?**

  Прямые в пространстве могут быть пересекающимися, параллельными, скрещивающимися.

- **Какие прямые в пространстве называются параллельными?**

  Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Устная работа

- **Какие прямые в пространстве называются скрещивающимися?**

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости

- **Сформулируйте признак скрещивающихся прямых**

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся

Устная работа

- Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они не пересекаются

Да, они параллельны или скрещиваются

- Точка М не лежит на прямой *a*. Сколько прямых, не пересекающих прямую *a*, проходит через точку М? Сколько из них параллельны прямой *a*?

Бесконечно много. Одна

- Каким может быть взаимное расположение двух прямых, одна из которых лежит в плоскости, а другая параллельна этой плоскости?

Параллельны или скрещиваются

Устная работа

- Верно ли утверждение: если одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости, то вторая прямая не пересекает эту плоскость

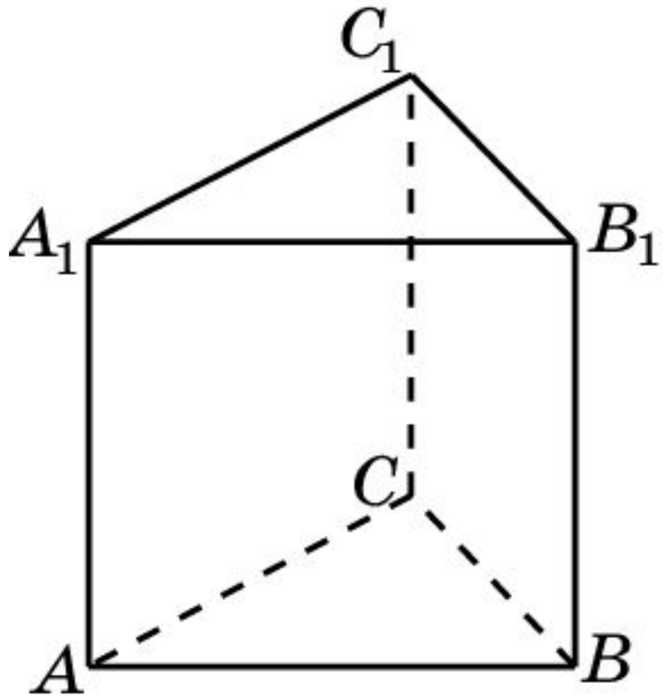
Нет, она может лежать в плоскости

- Каким может быть взаимное расположение двух прямых, из которых одна параллельна некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость?

Пересекаются или скрещиваются

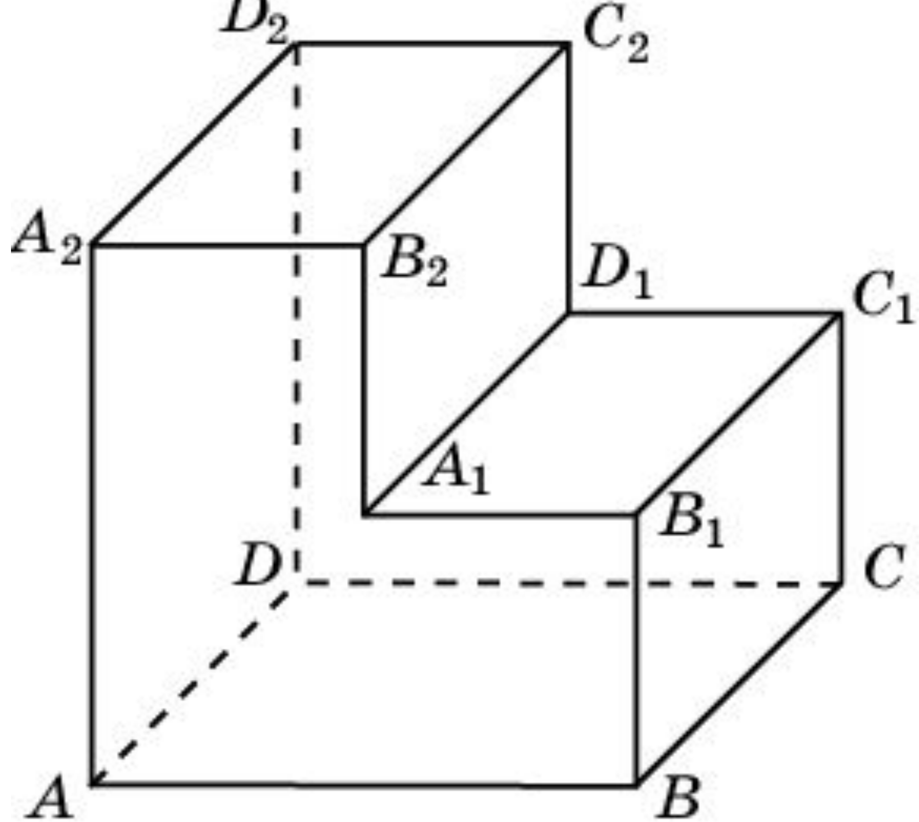
Укажите ребра, скрещивающихся с ребром:

а) BC; б) AA_1



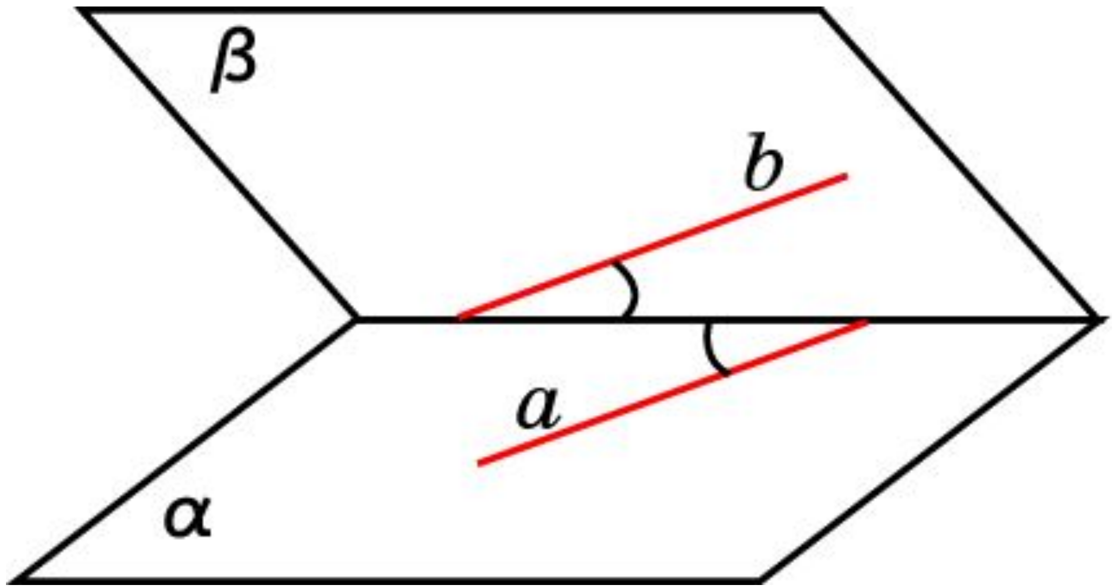
Ответ: а) A_1B_1, A_1C_1, AA_1; б) B_1C_1, BC.

Назовите прямые, содержащие ребра, скрещивающиеся с прямой AA_2.



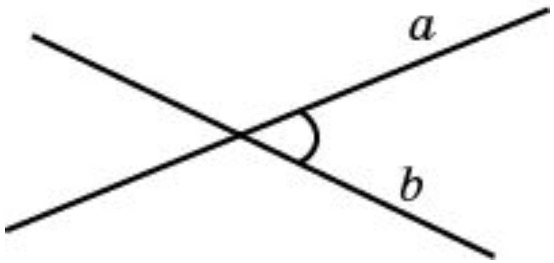
Ответ: BC, CD, B_1C_1, A_1D_1, B_2C_2, C_1D_1, C_2D_2.

Как расположены в пространстве прямые *a* и *b*, проведенные в плоскостях α и β?

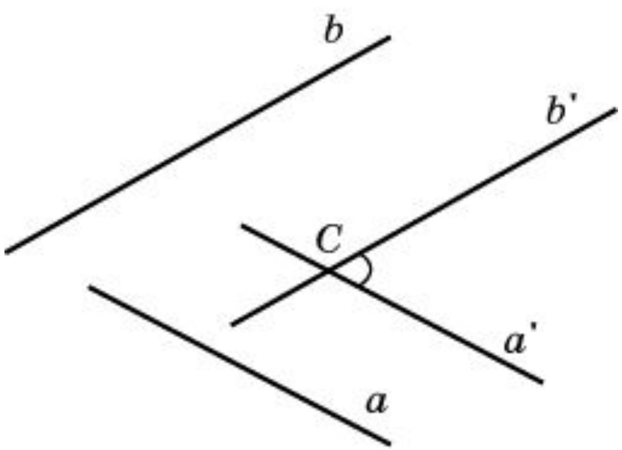


Ответ: **Скрещиваются**.

Угол между прямыми в пространстве



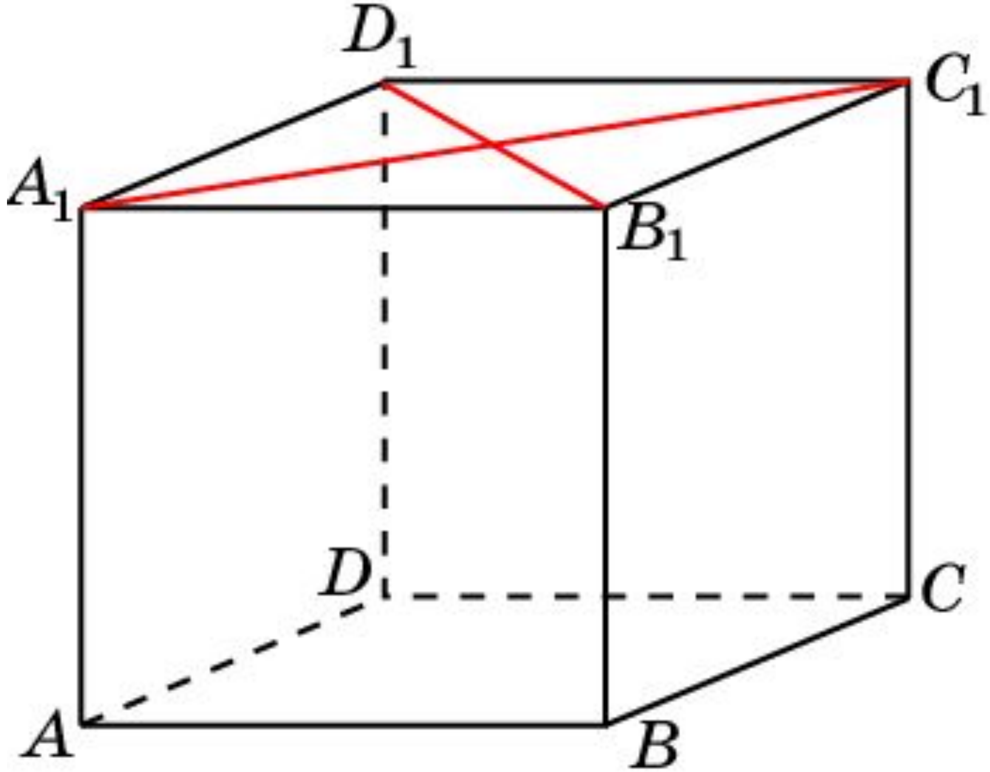
Углом между двумя пересекающимися прямыми **в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.**



Углом между скрещивающимися прямыми **называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.**

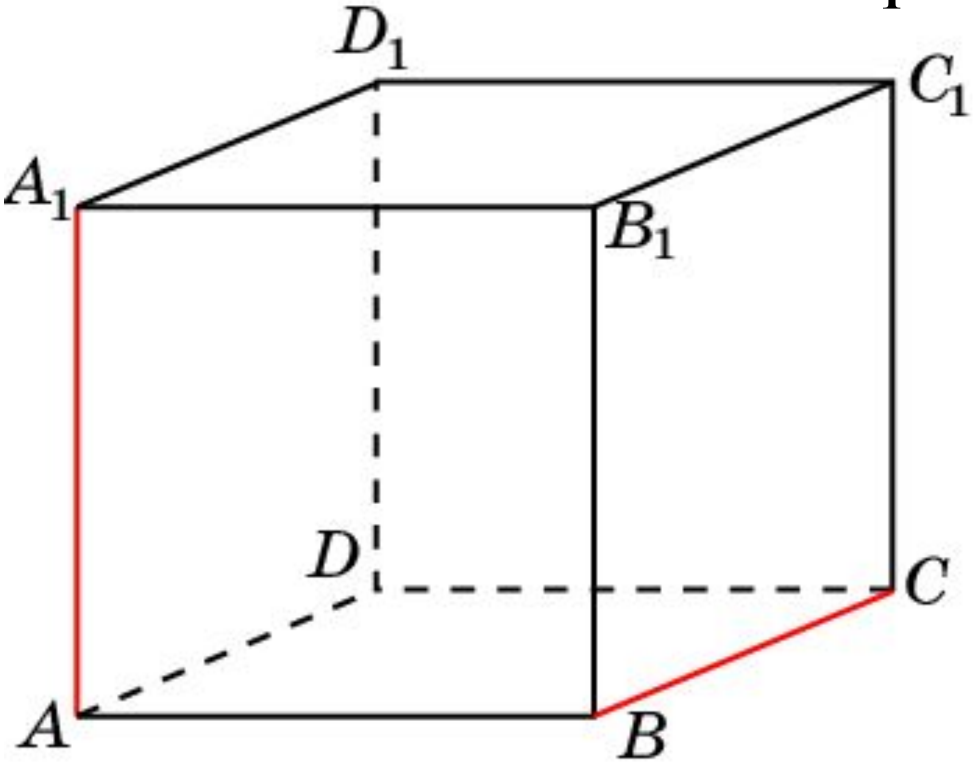
Если прямые параллельны, то угол между ними считается равным 0^0

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1D_1.



Ответ: 90°

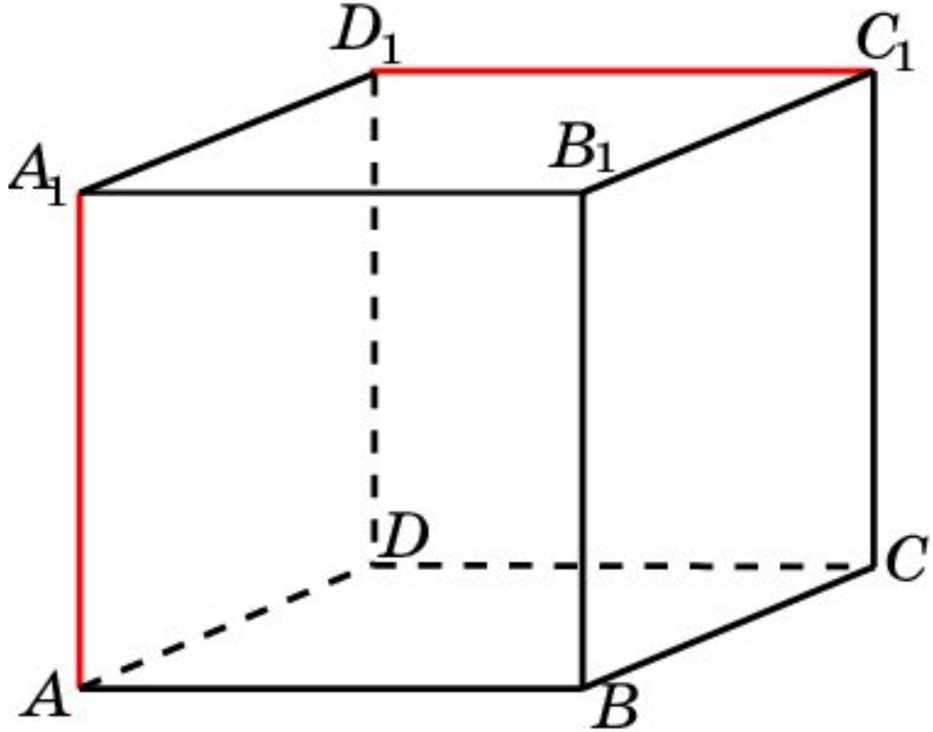
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и BC.



Ответ: 90º

$$AA_1 \wedge BC = AA_1 \wedge AD$$

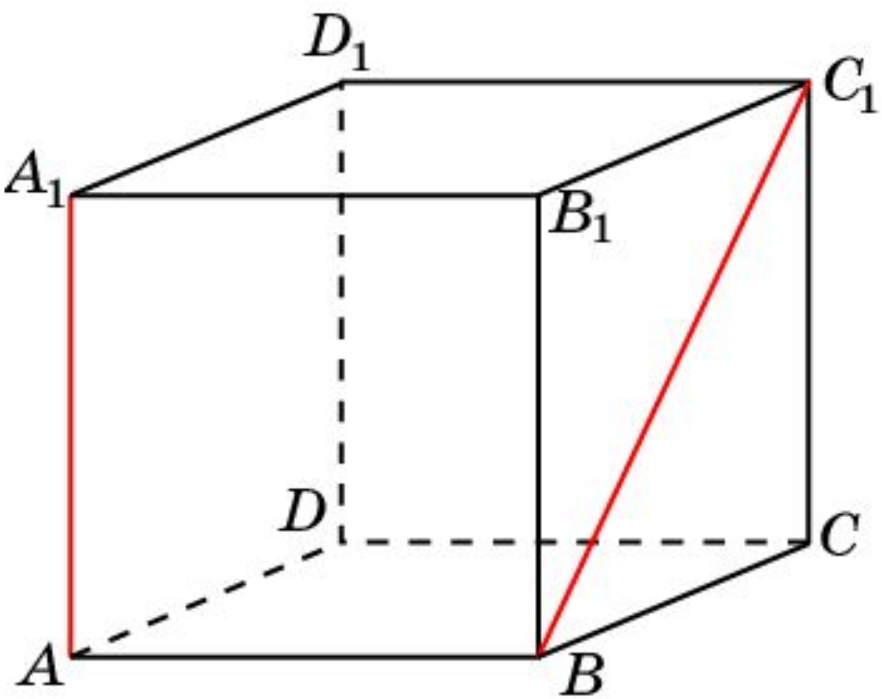
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и C_1D_1.



Ответ: 90º

$$AA_1 \wedge D_1C_1 = AA_1 \wedge A_1B_1$$

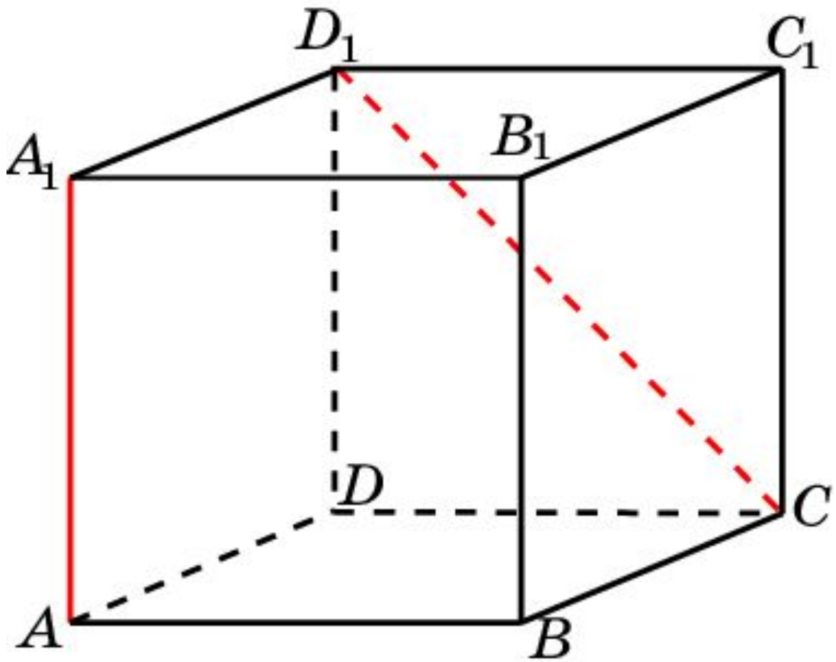
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1.



Ответ: 45^o

$$AA_1 \hat{\ } BC_1 = AA_1 \hat{\ } AD_1$$

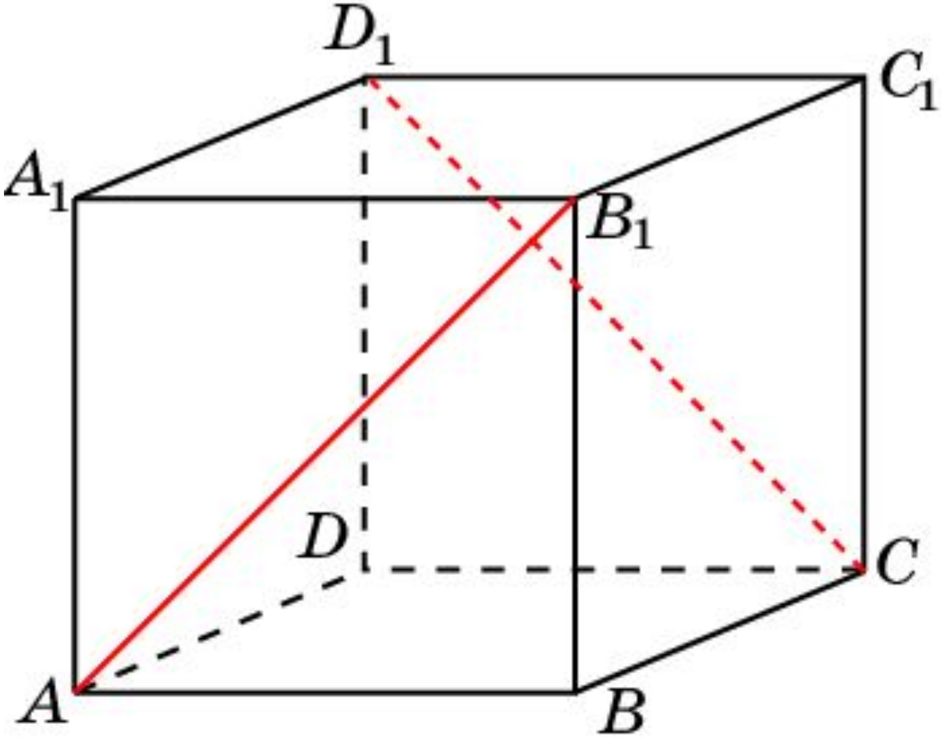
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и CD_1.



Ответ: 45°

$$AA_1 \wedge D_1C = AA_1 \wedge A_1B$$

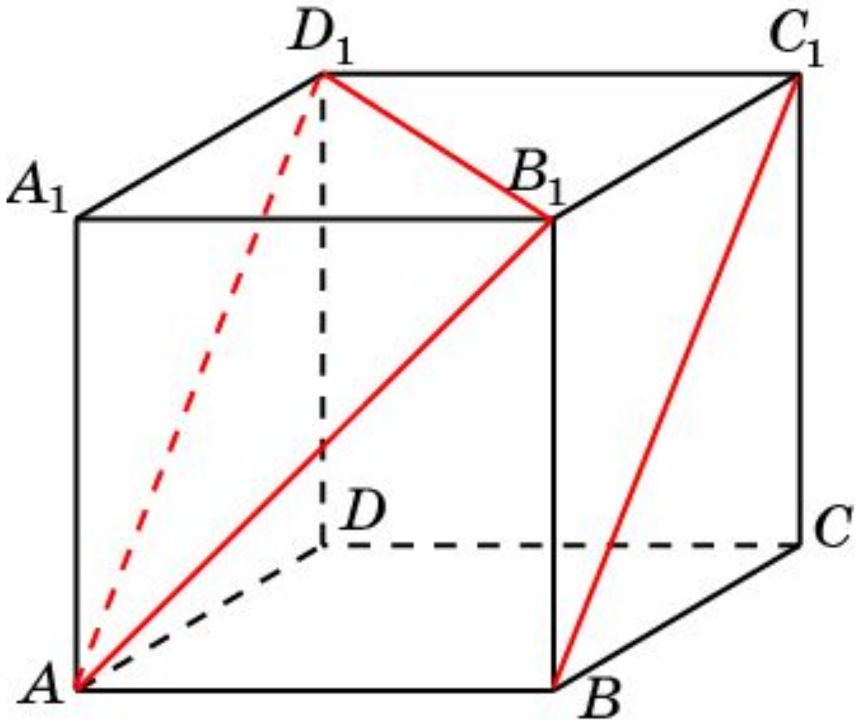
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1.



Ответ: 90º

$$AB_1 \wedge D_1C = AB_1 \wedge A_1B$$

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



Через точку A проведем прямую AD_1, параллельную BC_1. Искомый угол равен углу B_1AD_1. Треугольник B_1AD_1 – равносторонний. Следовательно, искомый угол равен 60^o.

Ответ: 60^o

Задачи

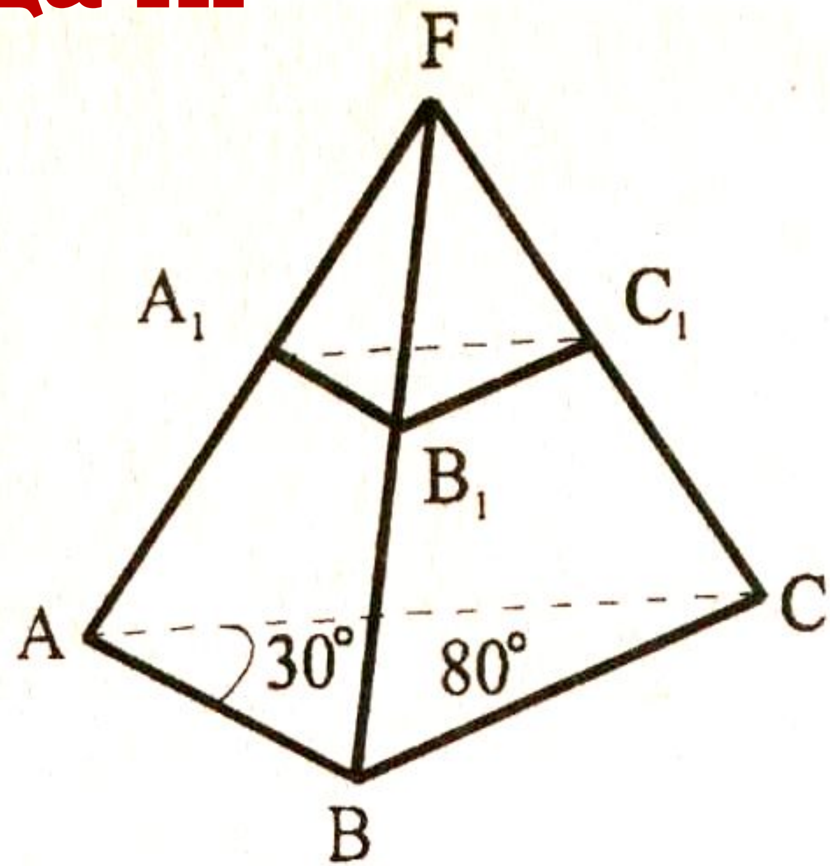
1. Дан ΔABC.

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = F$,
$A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$,
$B_1C_1 \parallel BC$, $\angle BAC = 30^0$,
$\angle ABC = 80^0$.

Найдите угол между прямыми:

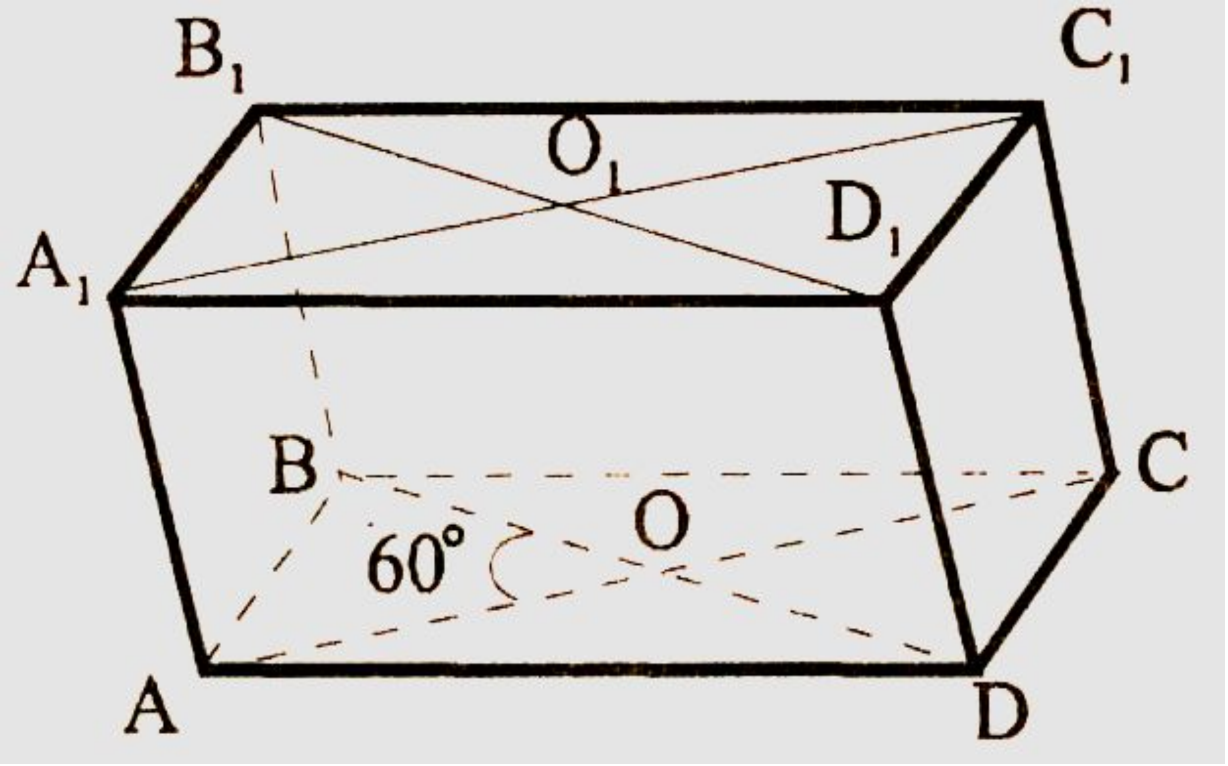
а) AB и B_1C_1;

б) A_1C_1 и BC.



Задачи

2. ABCD – прямоугольник. $\angle AOB = 60^0$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. Найдите угол между прямыми: а) A_1B_1 и AC; б) AB и A_1D_1.



Перпендикулярные прямые в пространстве.

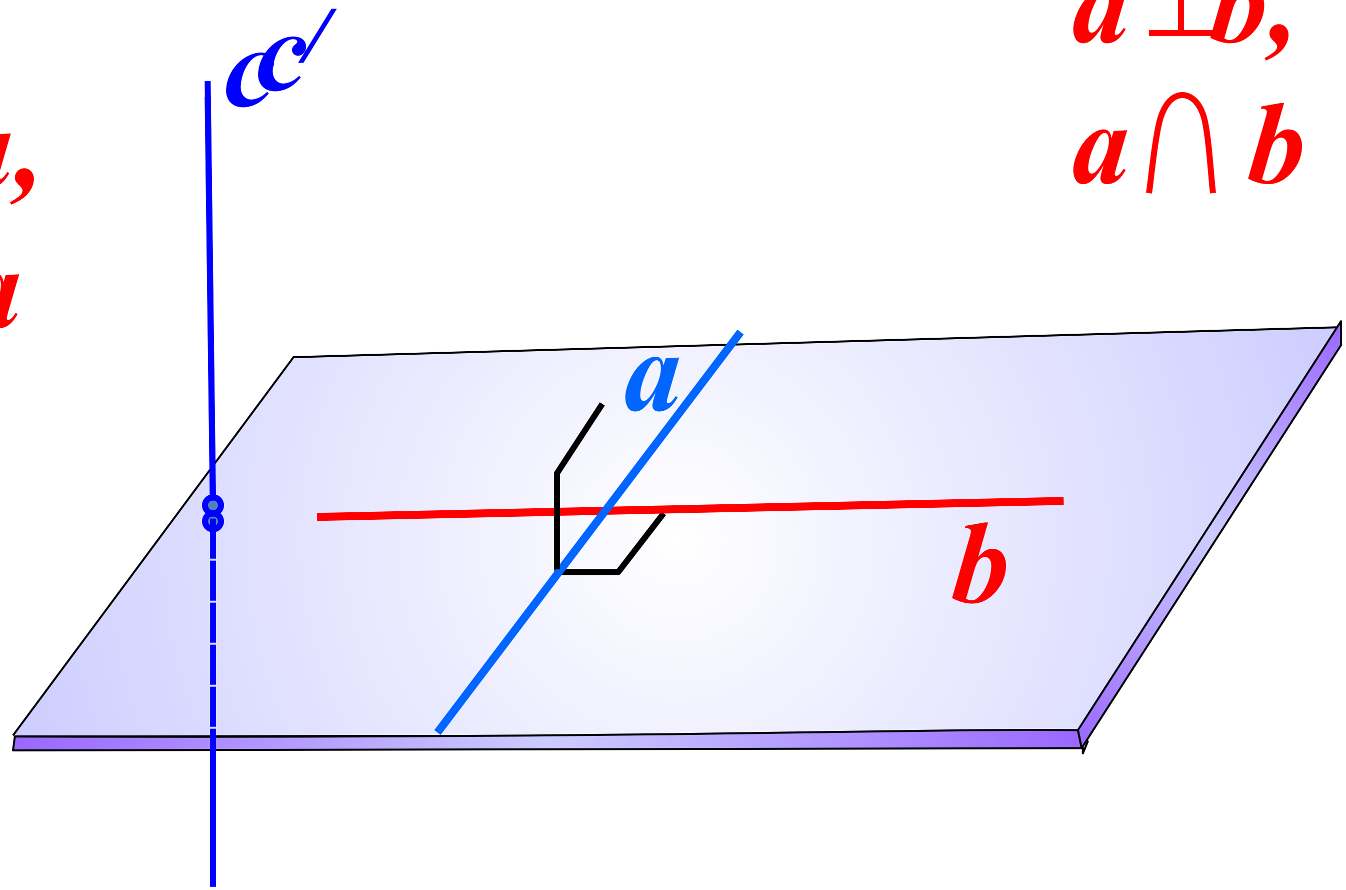
Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90^0.

$a \perp b,$

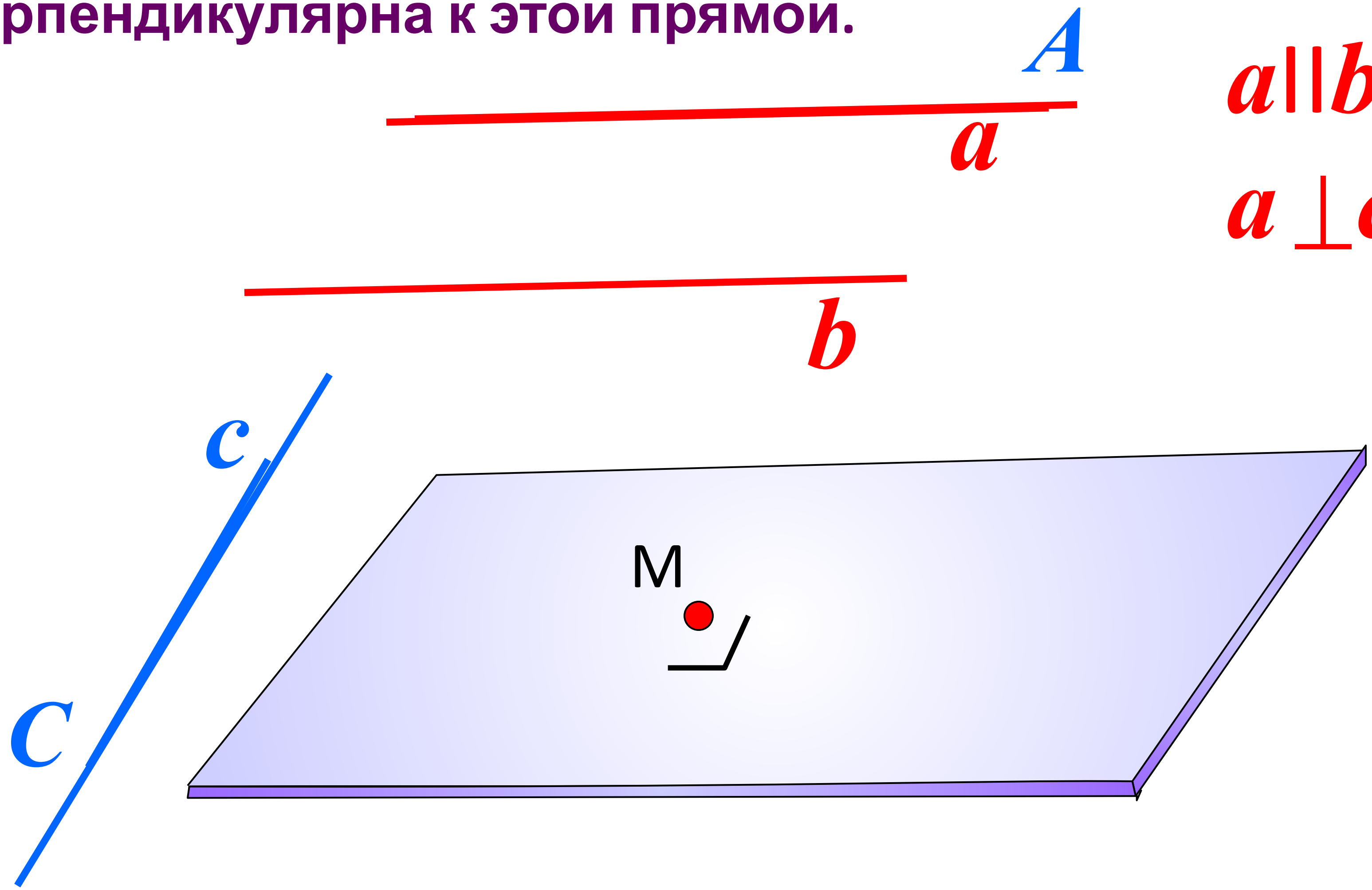
$a \cap b$

$c \perp a,$

$c \,\dot{-}\, a$



Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

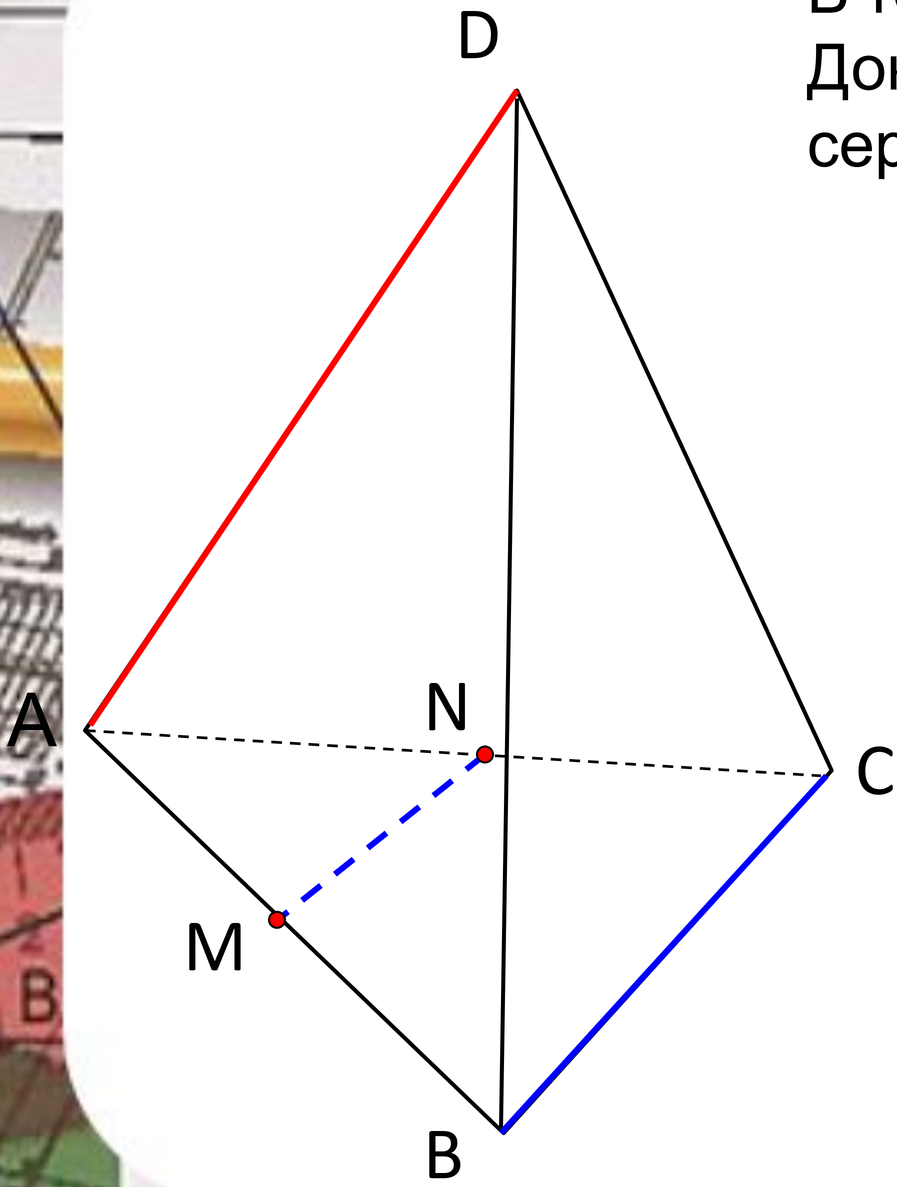


$a \parallel b,$

$a \perp c$

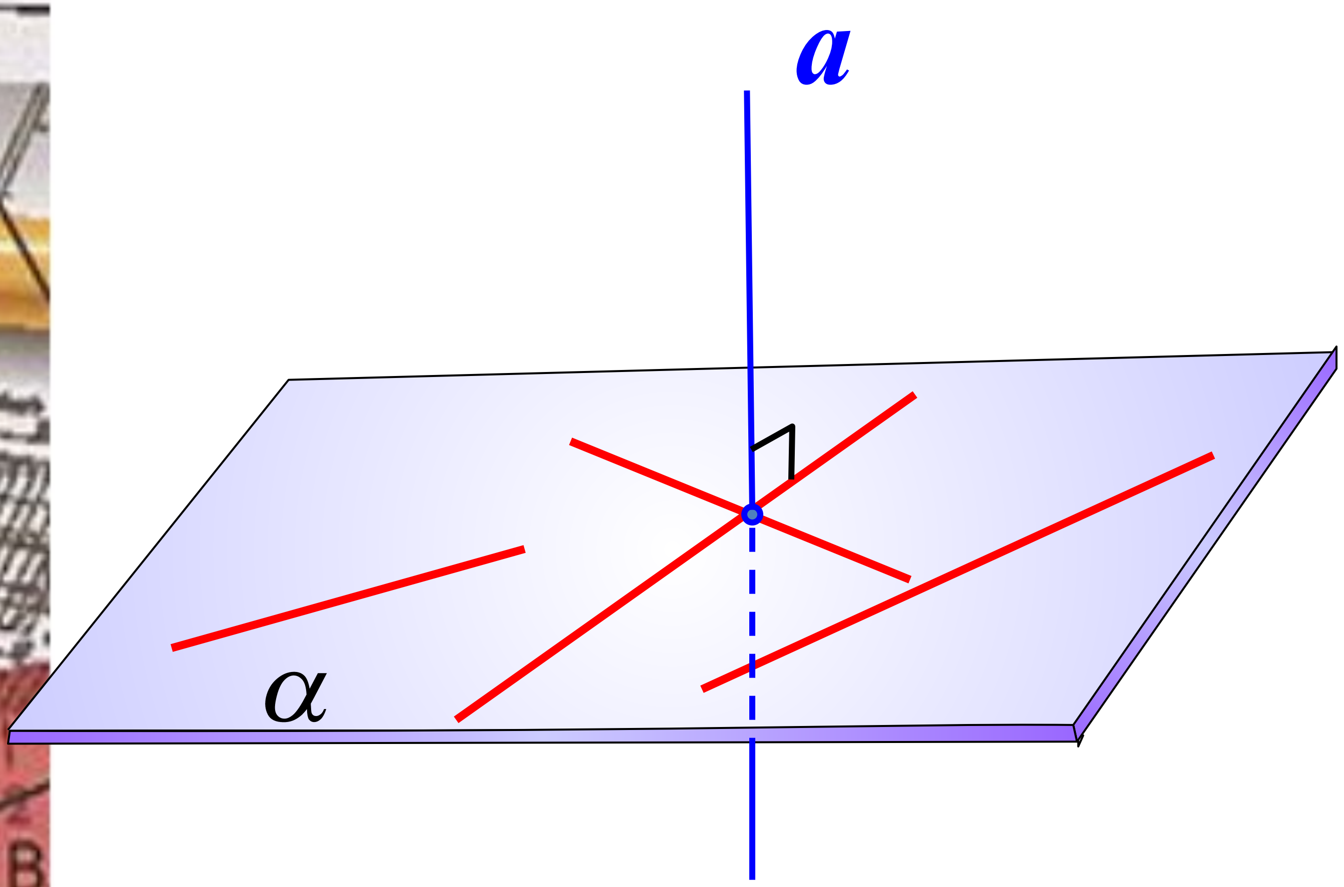
Задача

В тетраэдре ABCD BC $\perp$ AD. Докажите, что AD $\perp$ MN, где M и N – середины ребер AB и AC.



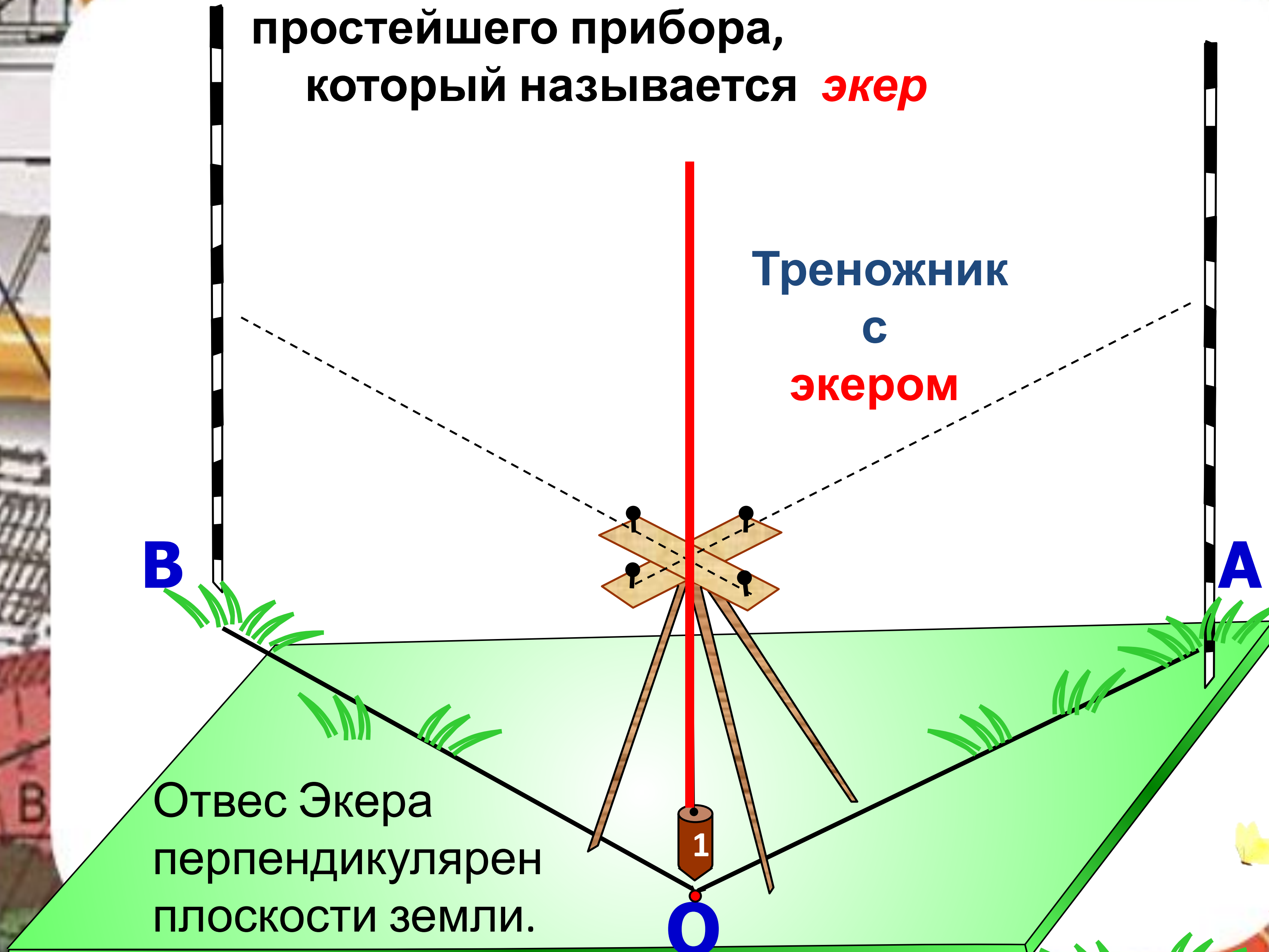
$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AD \\ BC \parallel MN \end{array}\right\} \Rightarrow MN \perp AD$$

Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

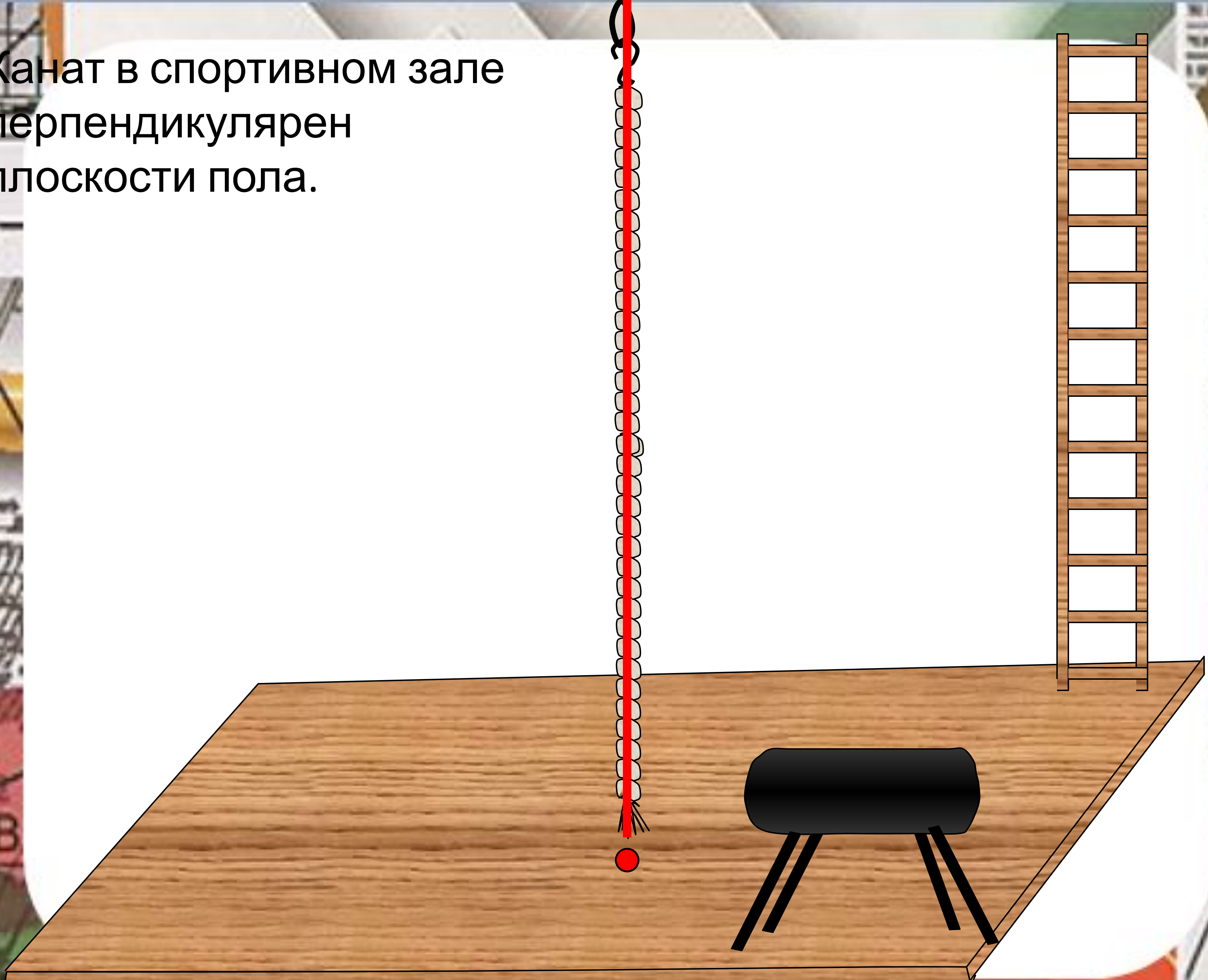


$$a \perp \alpha$$

Построение *прямых углов* на местности с помощью простейшего прибора, который называется *экер*



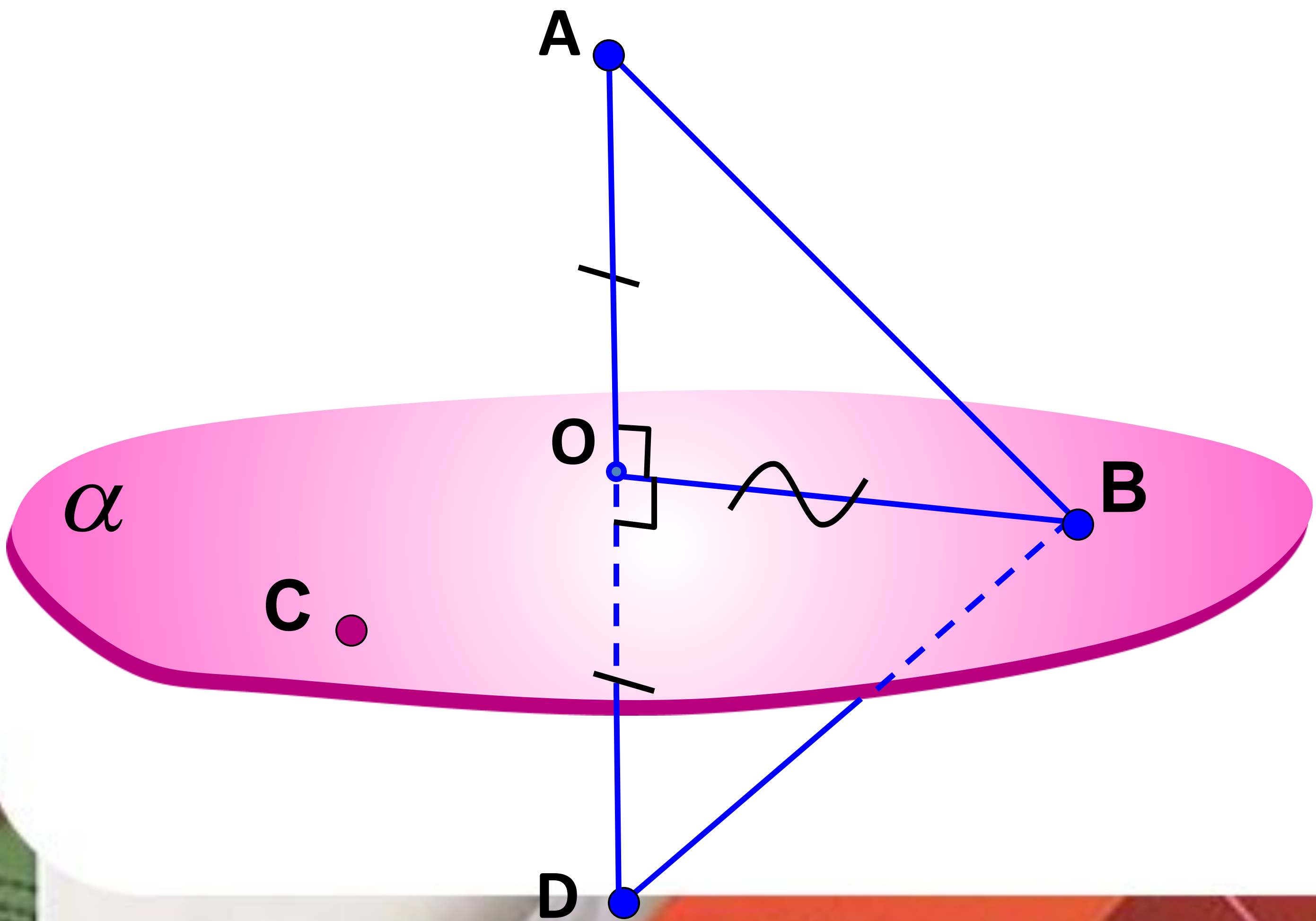
Канат в спортивном зале перпендикулярен плоскости пола.



Задача . Прямая OA ⊥ OBC. Точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что AB = BD.

По опр.

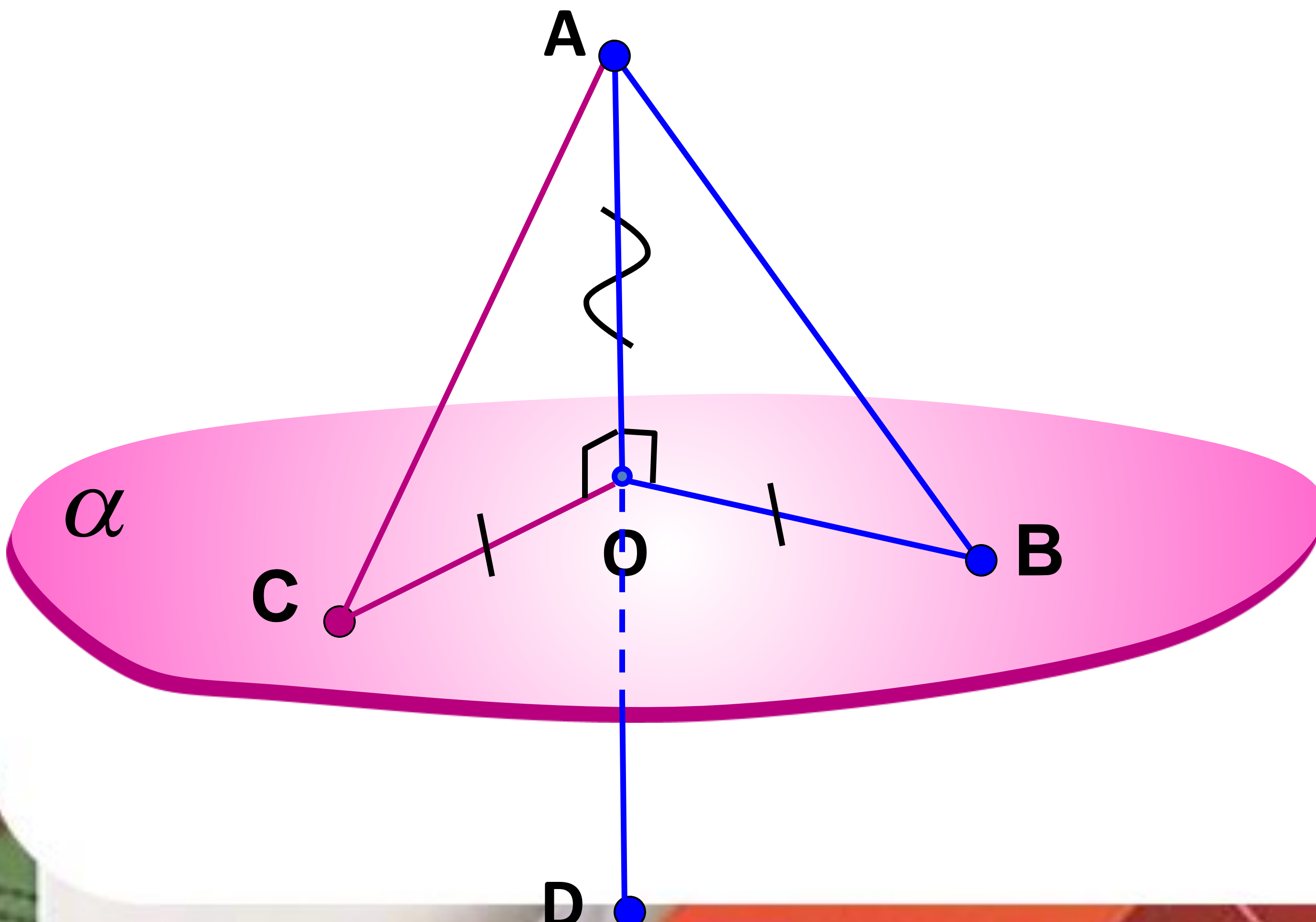
$$AD \perp \alpha \Rightarrow AD \perp OB$$



Прямая OA ⊥ OBC. Точка O является серединой отрезка AD, OB = OC. Докажите, что AB = AC.

По опр.

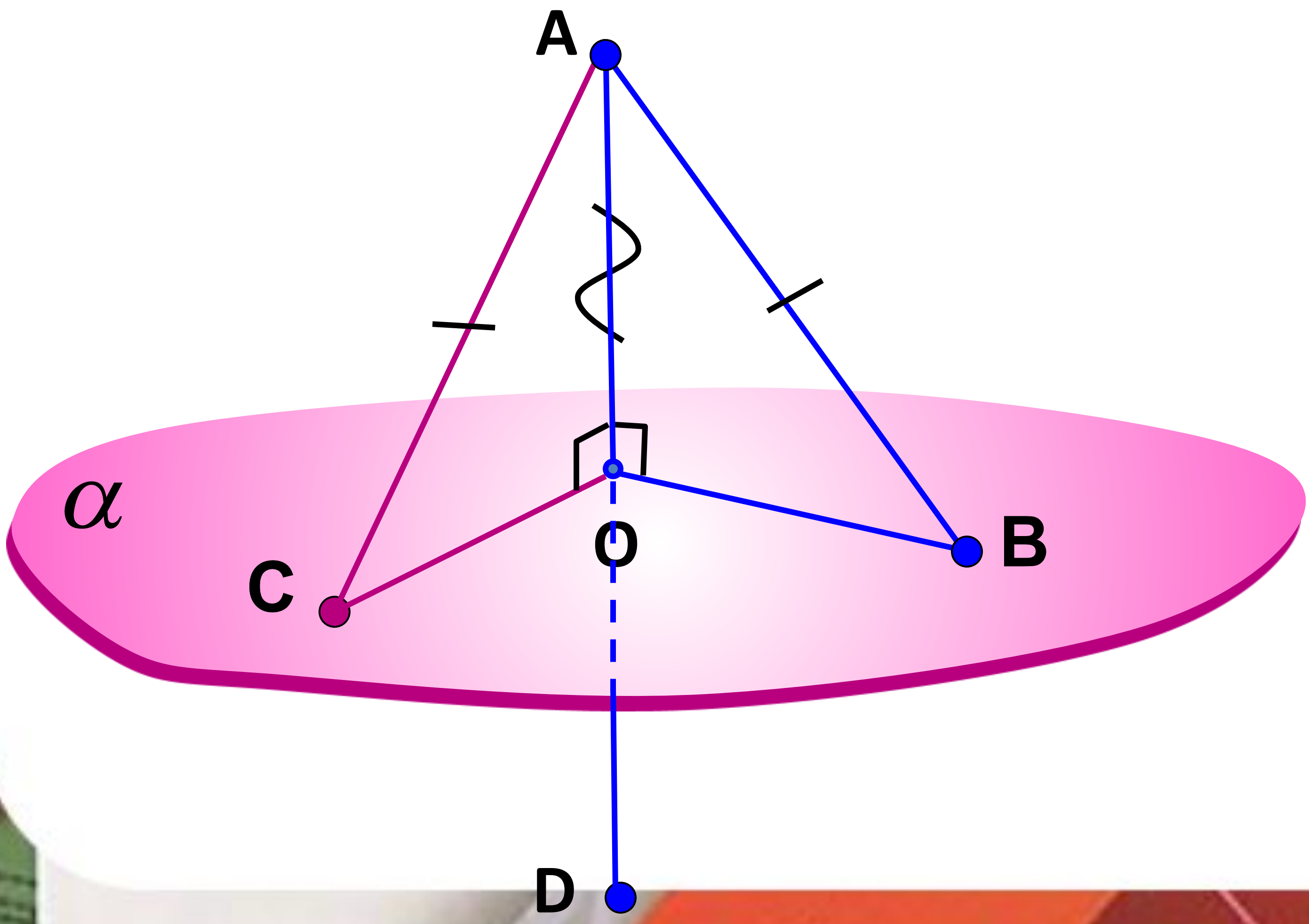
$$AD \perp \alpha \Rightarrow AD \perp OB, \quad AD \perp OC$$



Прямая ОА $\perp$ OBC. Точка О является серединой отрезка AD. OB = OC. Докажите, что AB = AC.

По опр.

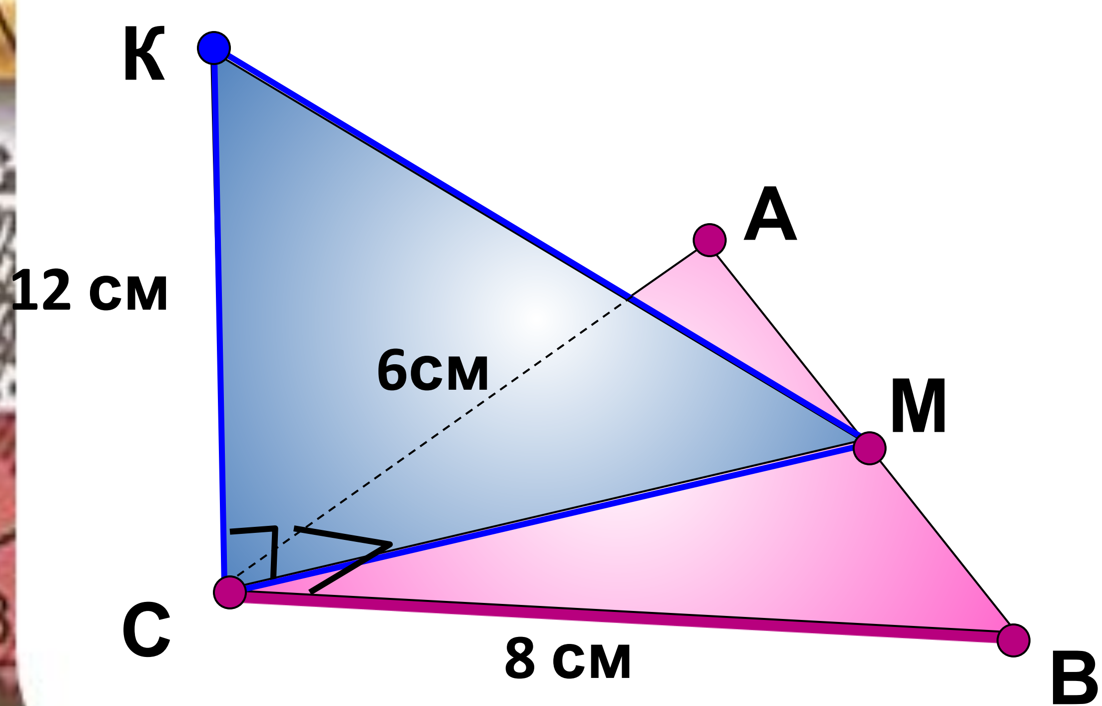
$$AD \perp \alpha \Rightarrow AD \perp OB, \quad AD \perp OC$$



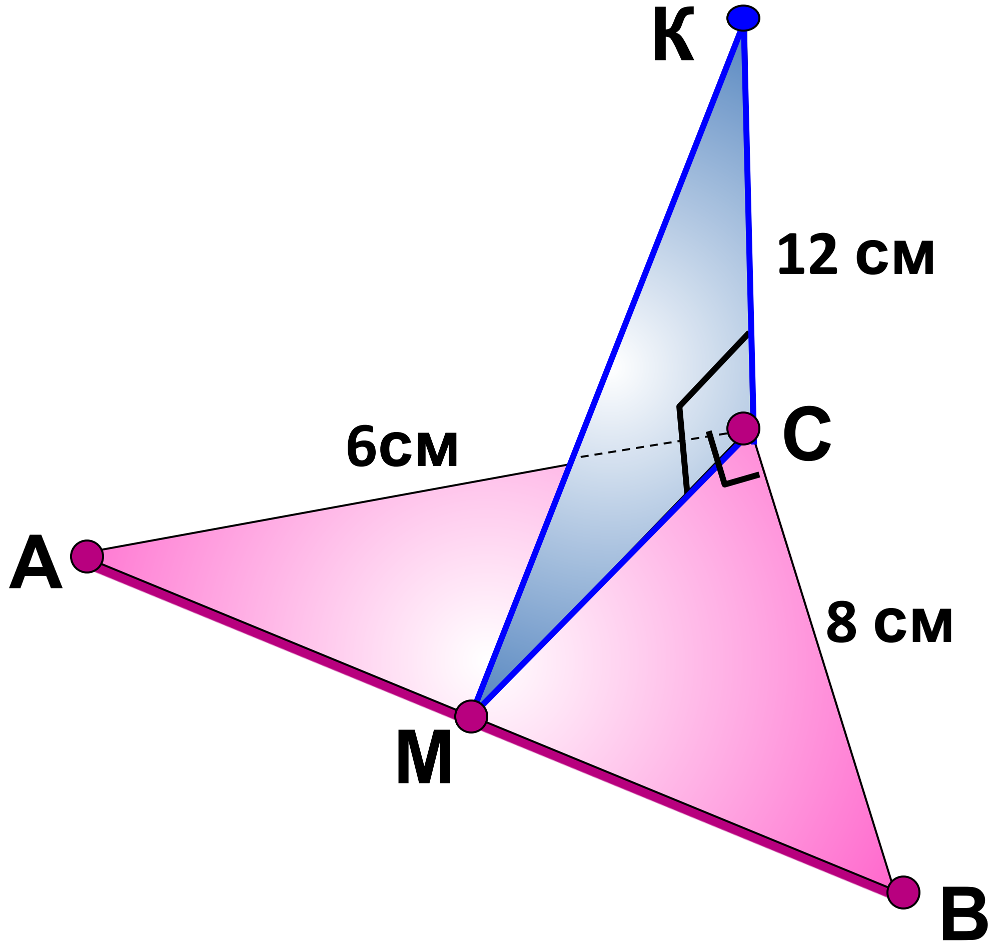
В треугольника АВС дано: С = 90^0,АС = 6 см, ВС = 8 см, СМ – медиана. Через вершину С проведена прямая СК, перпендикулярная к плоскости треугольника АВС, причем СК = 12 см. Найдите КМ.

По опр.

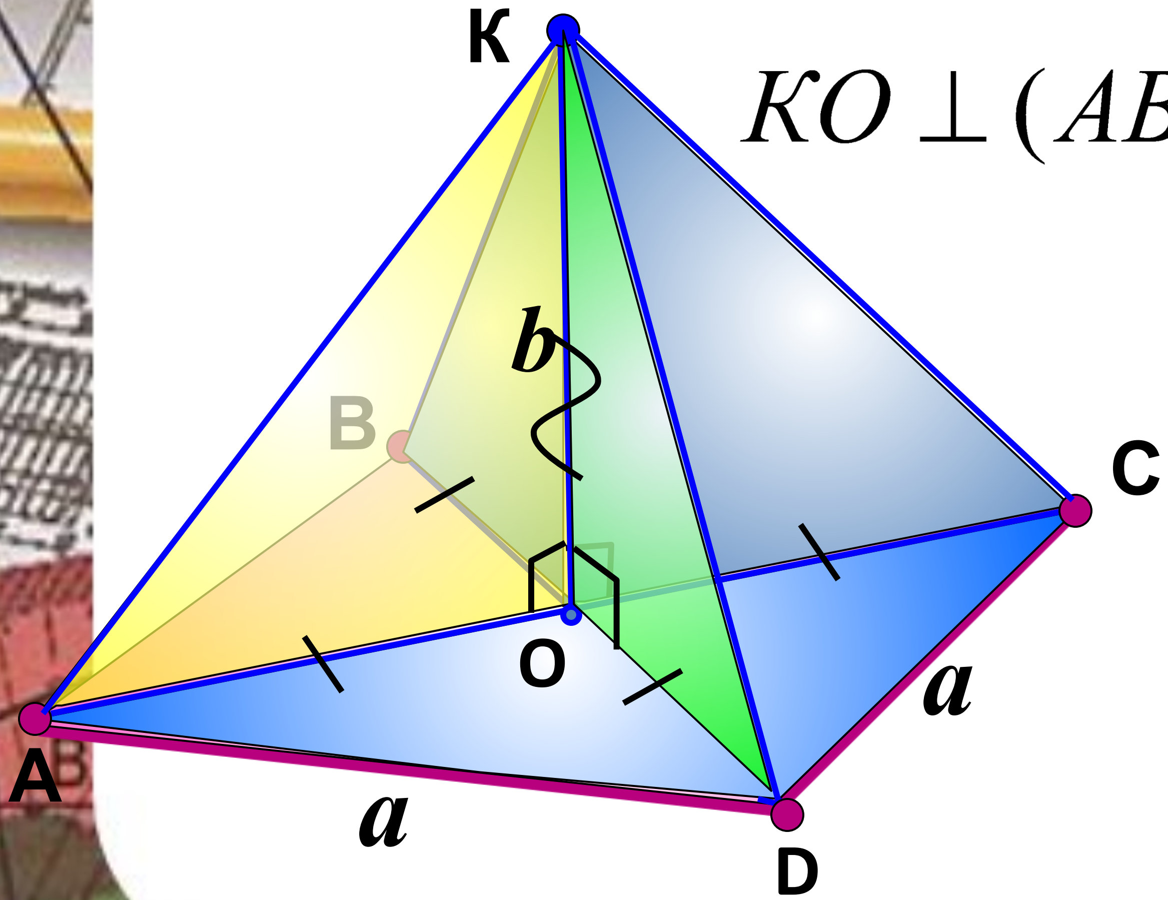
$$KC \perp (ABC) \Rightarrow KC \perp CM$$



Еще один эскиз к задаче



Через точку О пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a, проведена прямая ОК, перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки К до вершин квадрата, если ОК = b.

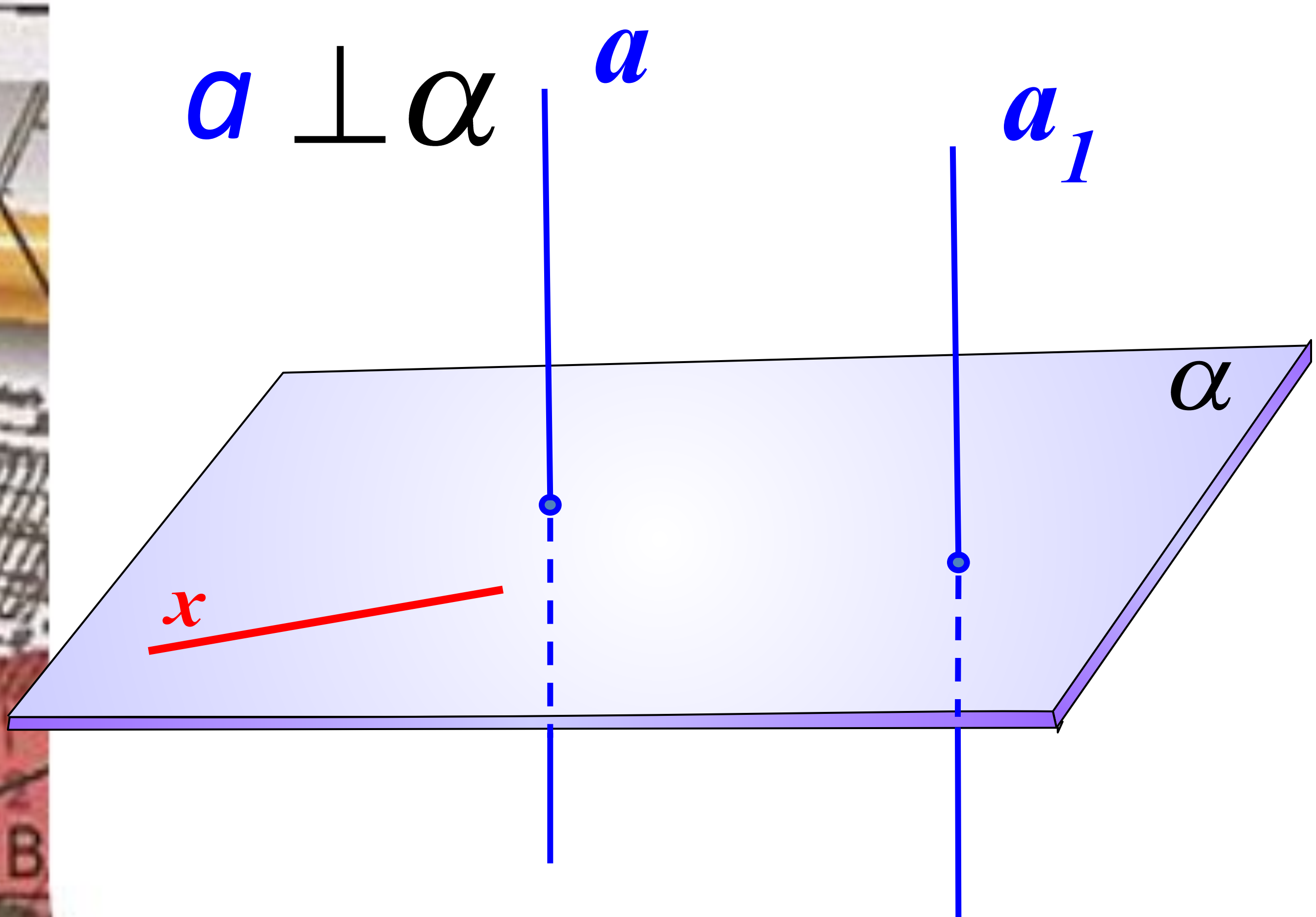


По опр.

$$KO \perp (ABC) \Rightarrow KO \perp OB$$

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

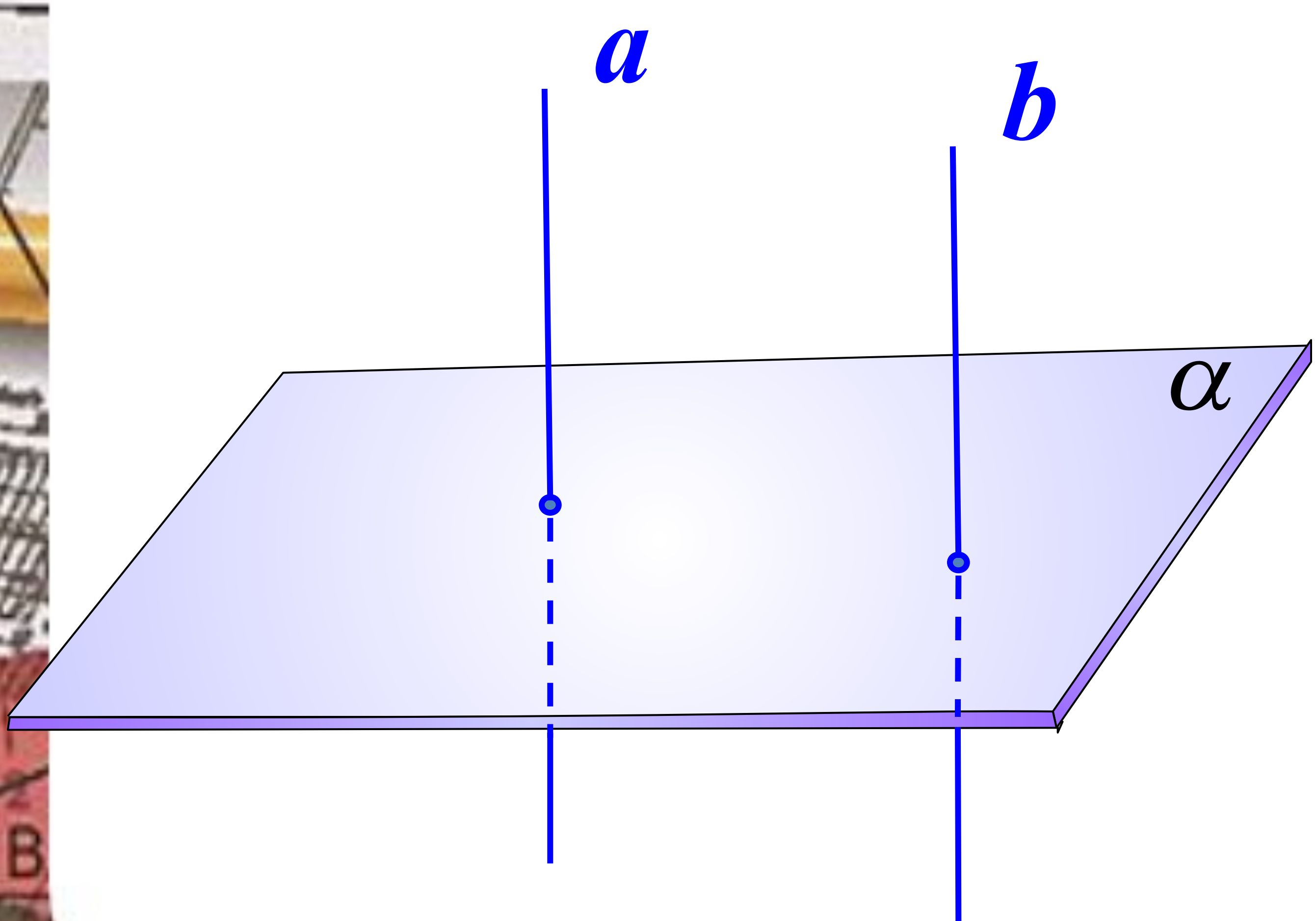
$a \perp \alpha$



Обратная теорема.

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

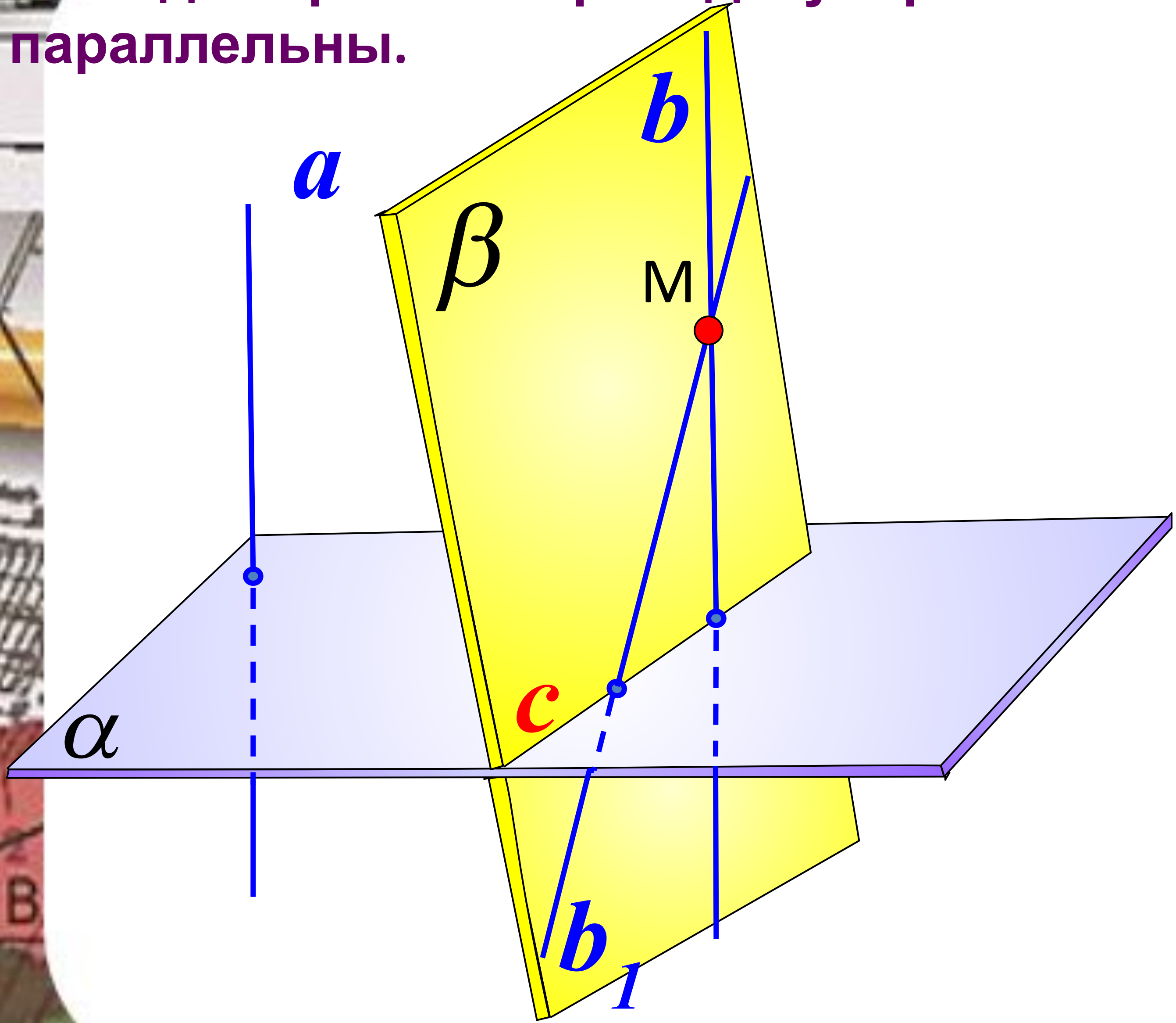
$$a \perp \alpha$$
$$b \perp \alpha$$



$$a \parallel b$$

Обратная теорема.

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



$a \perp \alpha$

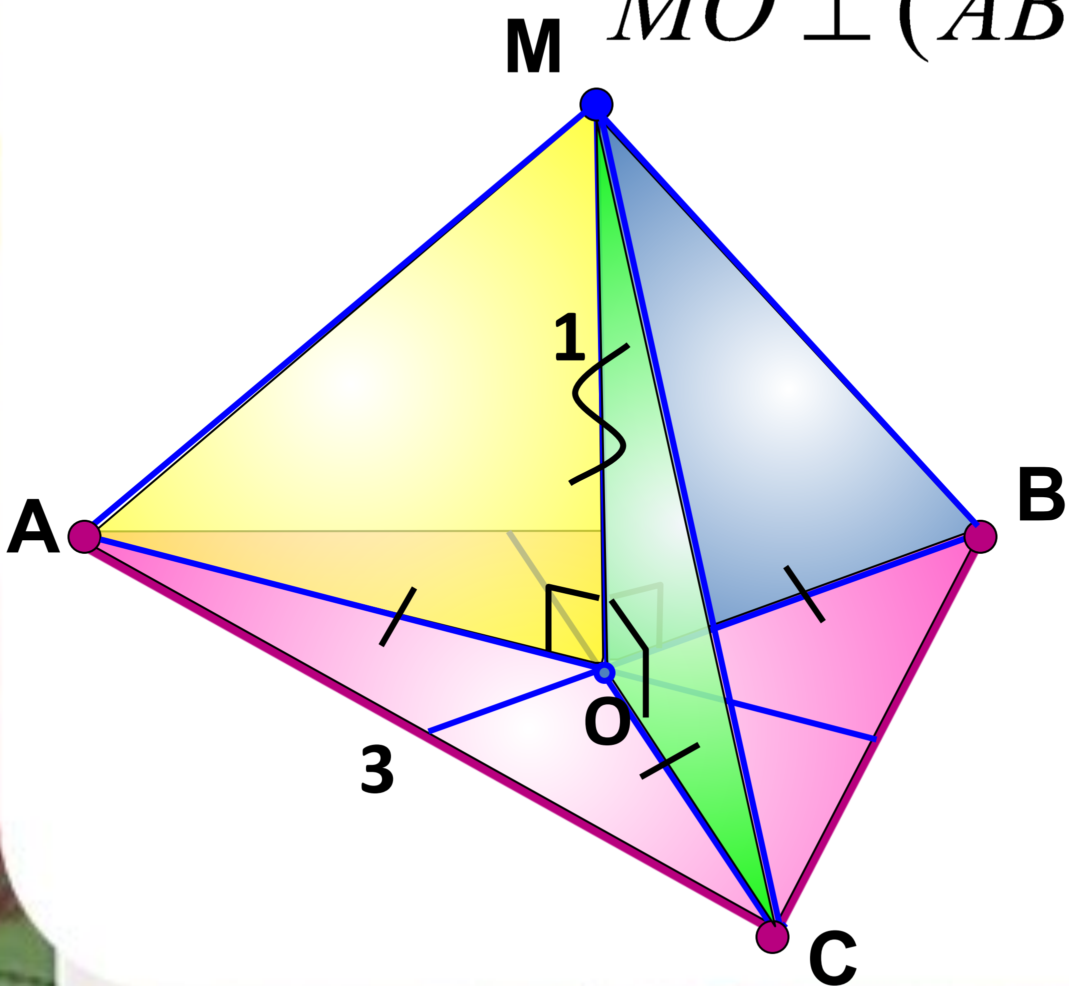
$b \perp \alpha$

$a \parallel b$

ABC – правильный треугольник. O – его центр, OM – перпендикуляр к плоскости ABC, OM = 1. Сторона треугольника равна 3. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.

По опр.

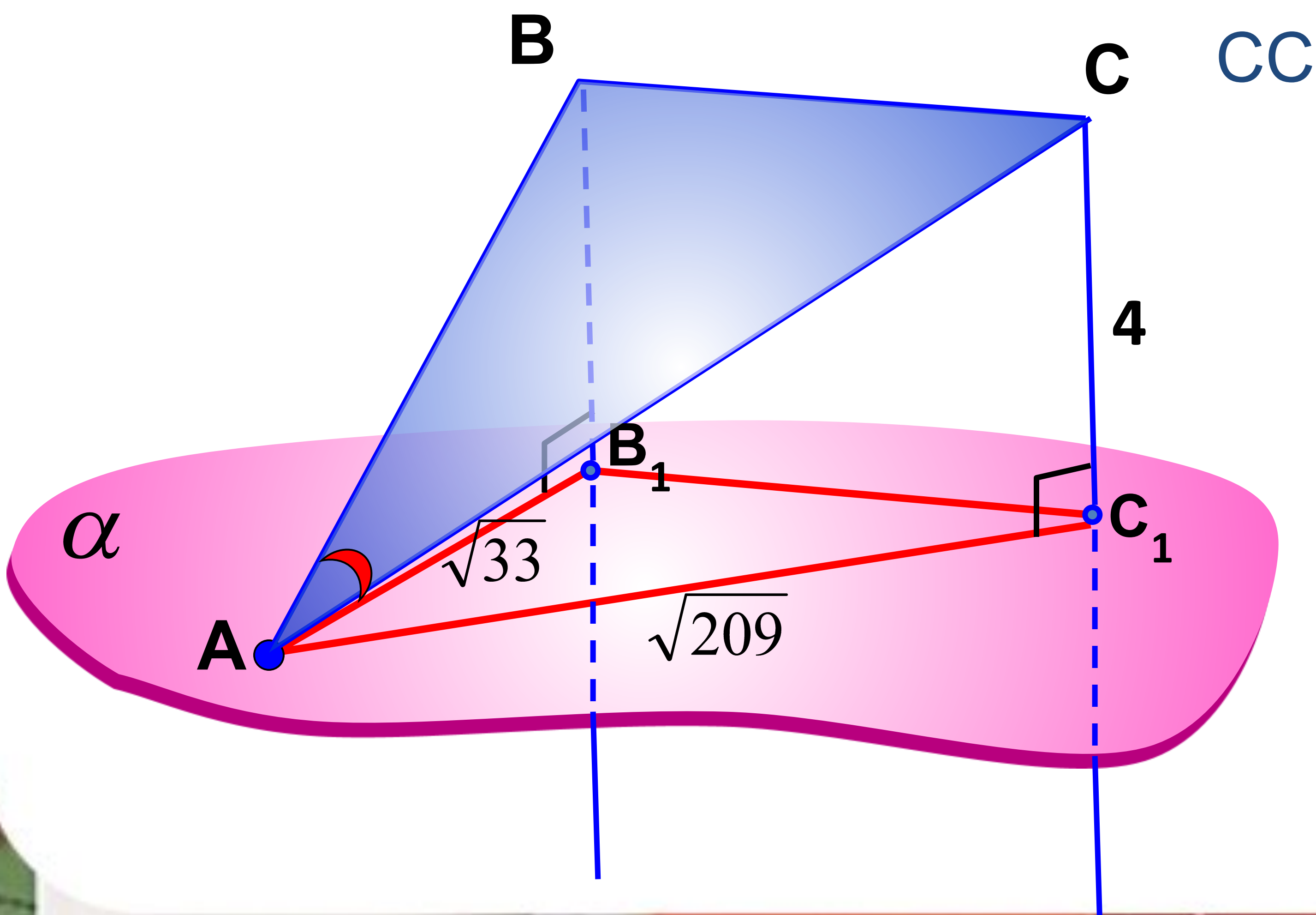
$$MO \perp (ABC) \Rightarrow MO \perp OB$$



Через вершину А треугольника АВС проведена плоскость, параллельная ВС, $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$, $CC_1=4$, $AC_1=\sqrt{209}$, $AB_1=\sqrt{33}$, $\angle BAC = 60^0$. Найдите ВС.

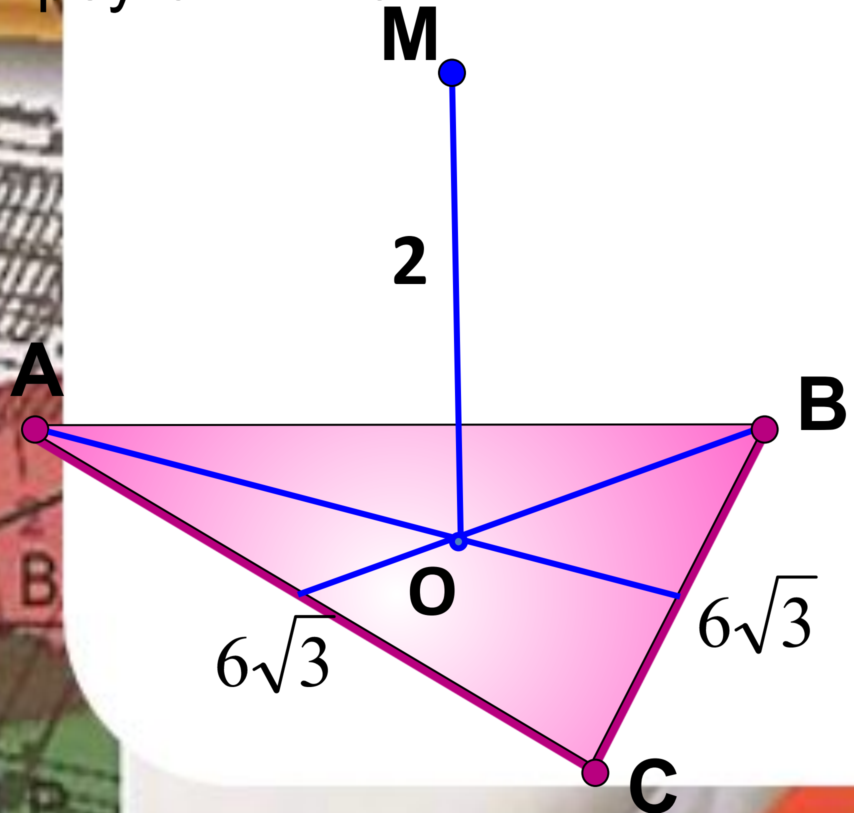
$BB_1 \perp \alpha$

$CC_1 \perp \alpha$



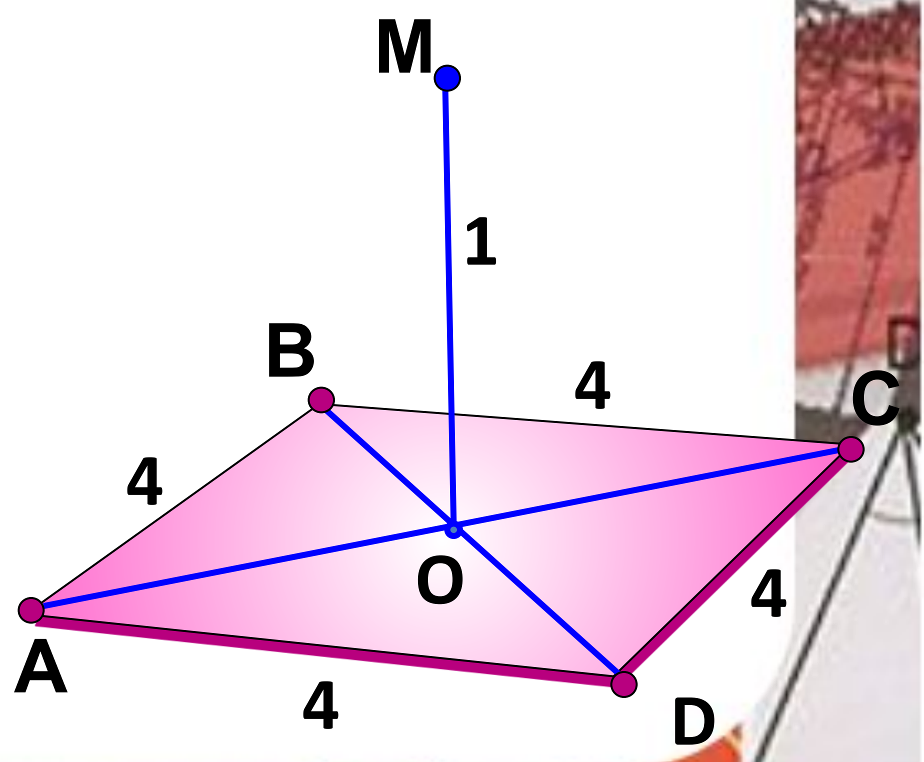
Дано: $OM \perp (ABC)$

ABC –равносторонний треугольник со стороной $6\sqrt{3}$ О – точка пересечения медиан. Найти расстояние от точки М до вершин треугольника.

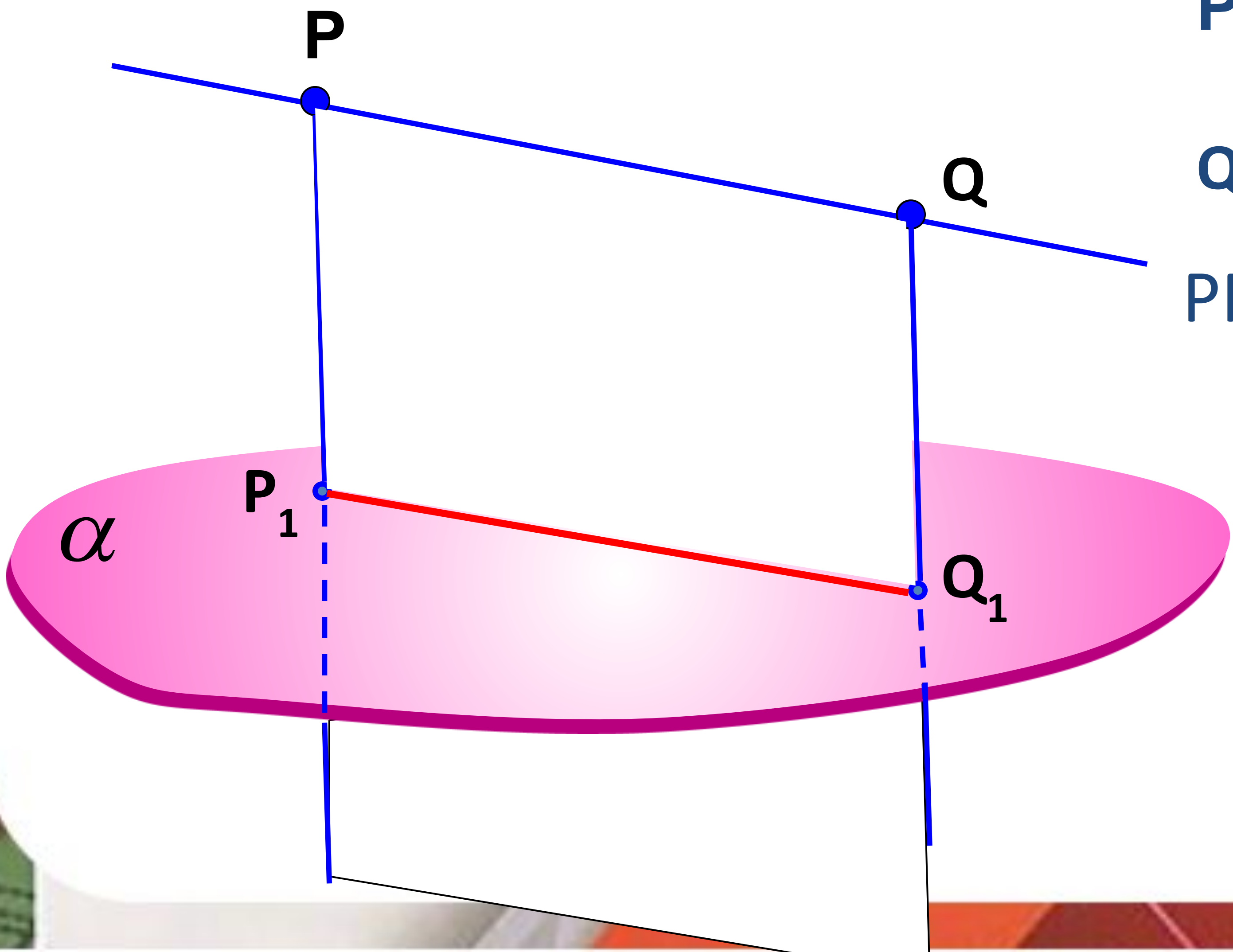


Дано: $OM \perp (ABC)$

ABCD – квадрат со стороной 4, О – точка пересечения диагоналей. Найти расстояние от точки М до вершин квадрата.



№124. Прямая PQ параллельна плоскости α. Через точки P и Q проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α, которые пересекают эту плоскость соответственно в точках P_1 и Q_1. Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.



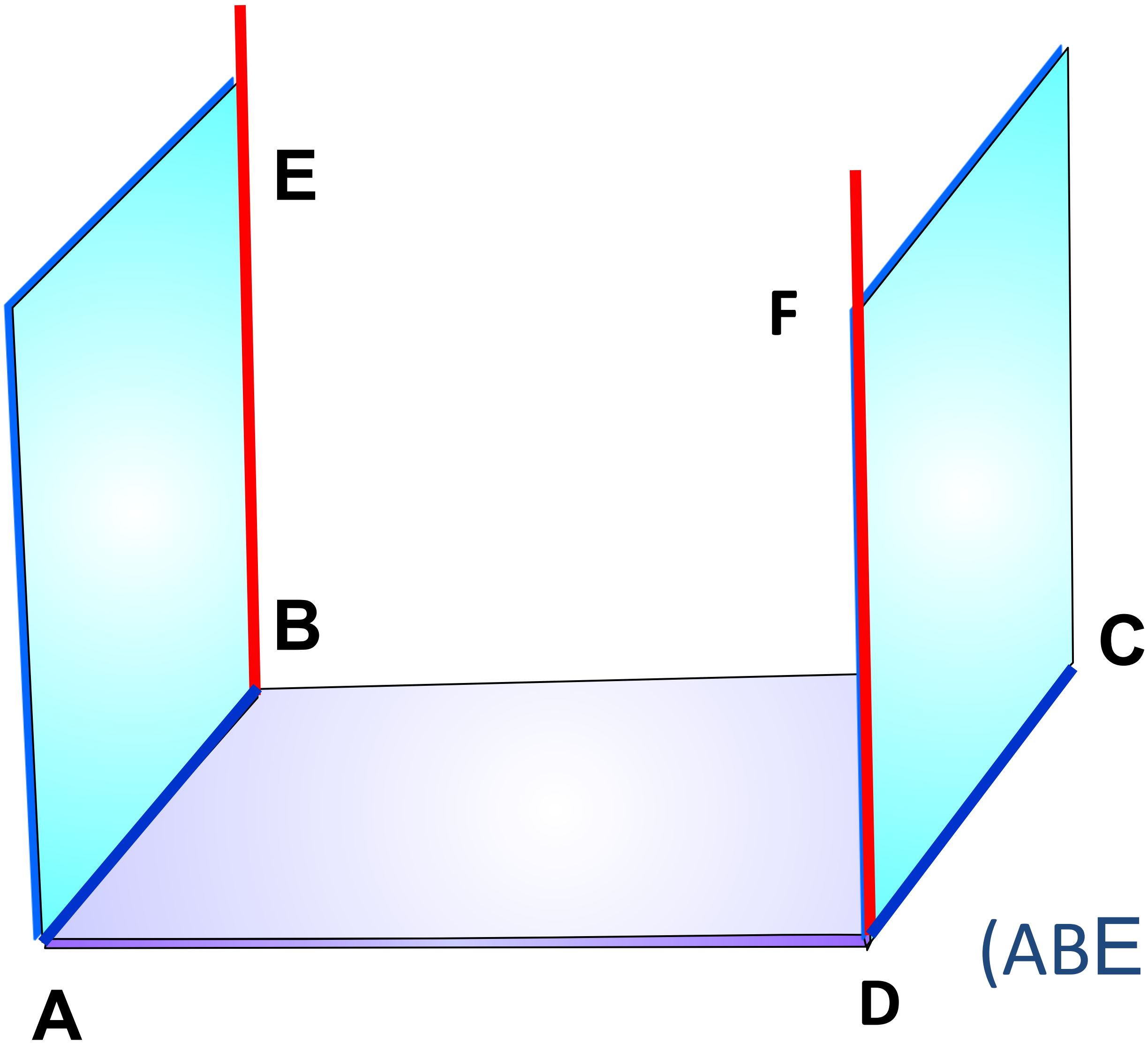
$PP_1 \perp \alpha$

$QQ_1 \perp \alpha$

$PP_1 \parallel QQ_1$

ABCD – параллелограмм. BE $\perp$ (ABC), DF $\perp$ (ABC)

Доказать: (ABE) II (CDF)



BE $\perp$ (ABC)

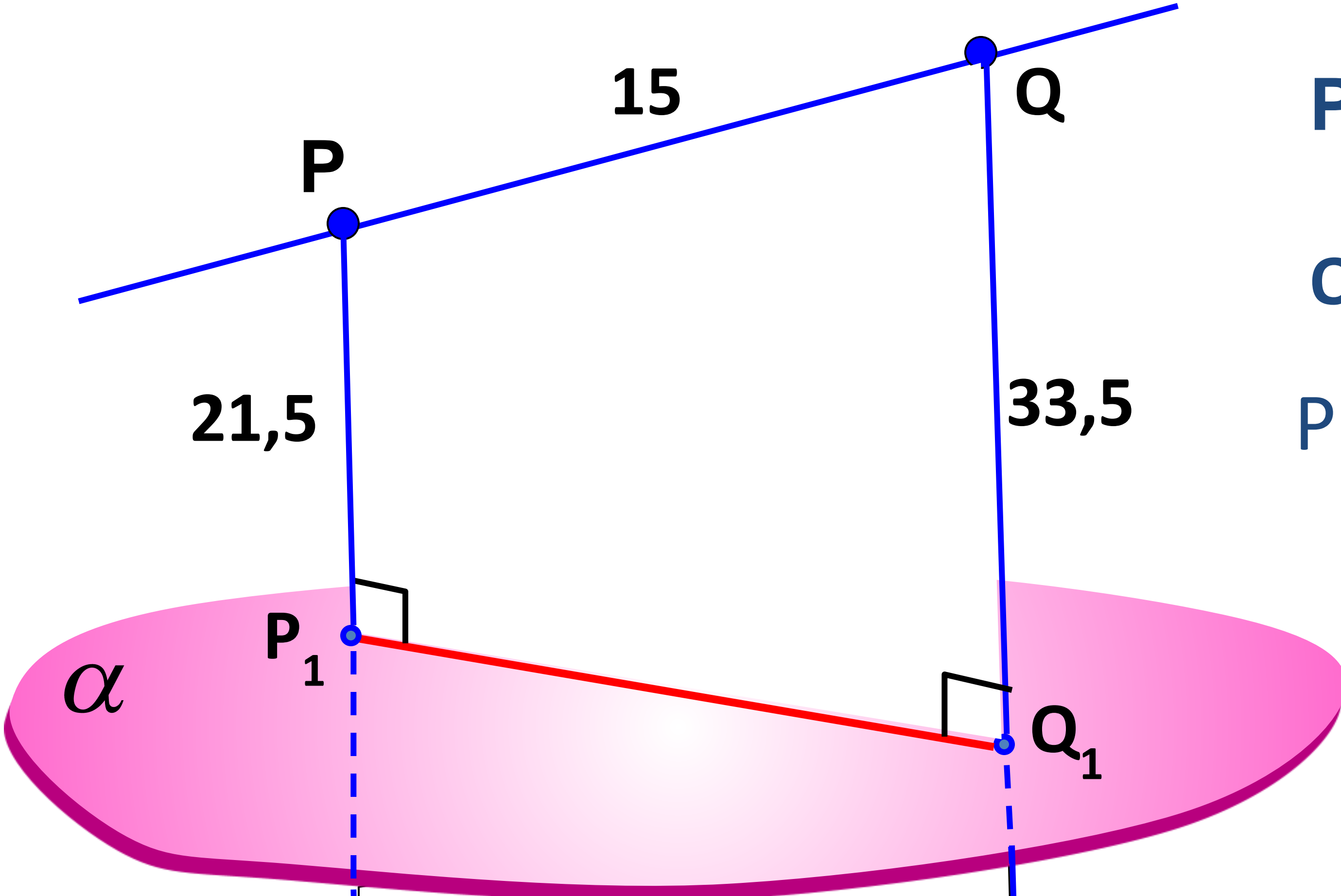
DF $\perp$ (ABC)

BE II DF

AB II DC

(ABE) II (CDF)

Задача. Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α, которые пересекают эту плоскость соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1.



$PP_1 \perp \alpha$

$QQ_1 \perp \alpha$

$PP_1 \parallel QQ_1$

По опр.

$$PP_1 \perp \alpha \Rightarrow PP_1 \perp P_1Q_1,$$