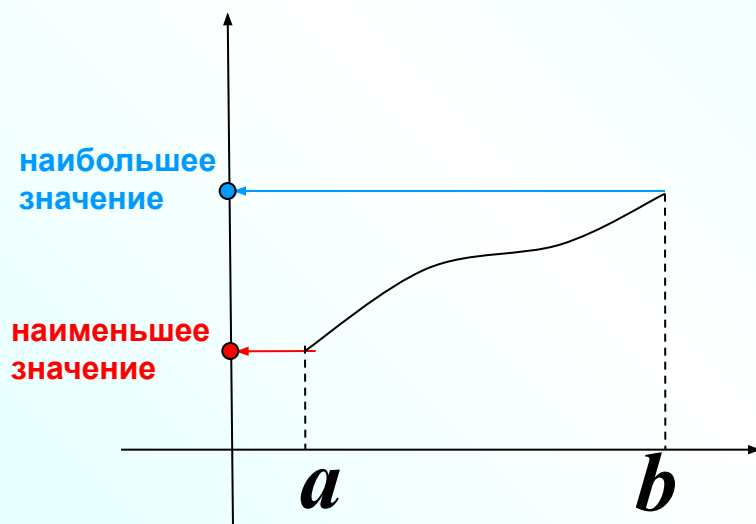


Методическая разработка Савченко Е.М.
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Открытый банк заданий по математике <http://mathege.ru:8080/or/ege/Main.action>

функция возрастает



Предположим, что функция f не имеет на отрезке $[a; b]$ критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

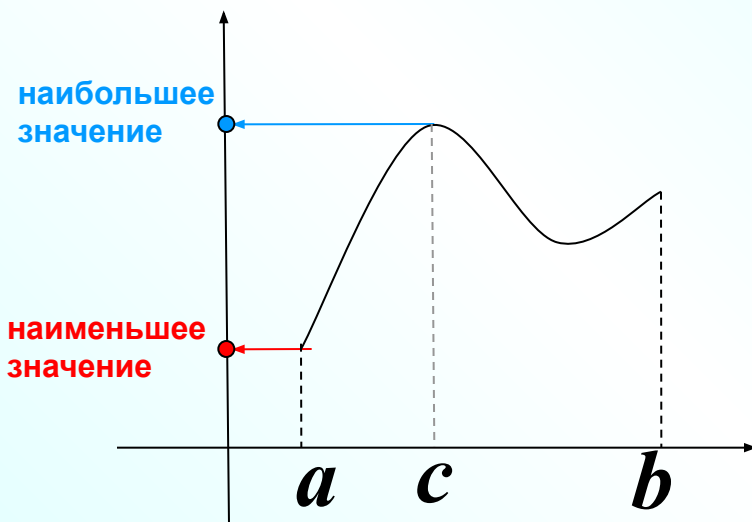
Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[a; b]$ — это значения в концах a и b .

функция убывает

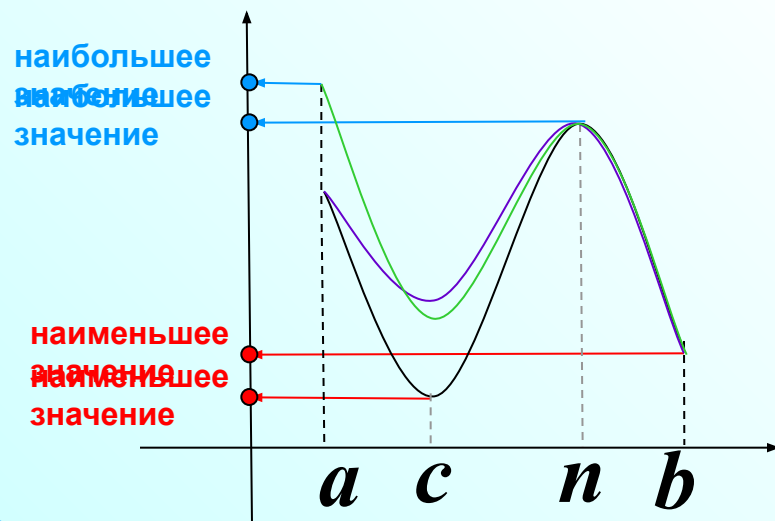


Примеры



Пусть теперь функция f имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция f может принимать в критических точках функции или в точках a и b .



Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на $[a;b]$

1. Найти критические точки функции на интервале $(a; b)$;
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$,
3. Среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее

Наибольшее значение

$$\max_{[a;b]} f(x)$$

Наименьшее значение

$$\min_{[a;b]} f(x)$$

Задача:

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 2 \text{ на отрезке } [-2; 2].$$

Решение.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, значит функция непрерывна на рассматриваемом отрезке.
2. Найдем критические точки функции: $f'(x) = x^2 + 2x - 3$
 $f'(x) = 0$, если $x^2 + 2x - 3 = 0$, откуда $x = -3$ или $x = 1$.
 $x = -3$ не лежит на рассматриваемом отрезке.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 2 = -\frac{8}{3} + 4 + 6 - 2 = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3};$$

$$f(1) = \frac{1^3}{3} + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = \frac{1}{3} - 4 = -3\frac{2}{3};$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 2\frac{2}{3} - 4 = -1\frac{2}{3}$$

4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[-2; 2]} f(x) = f(-2) = 5\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \min_{[-2; 2]} f(x) = f(1) = -3\frac{2}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$ - наибольшее, а $-3\frac{2}{3}$ - наименьшее значения функции на отрезке $[-2; 2]$.

Выполнение этапов решения можно изменить, как вам удобно.

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$2) y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$3) y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	В 11 - 5 4