



БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УРАВНЕНИЙ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА.**

**Решение краевых
задач для уравнения
теплопроводности**





Тема II.1. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

1. Общее решение для бесконечного стержня.

Пусть $u = u(M, t)$ - температура в точке M однородного тела в момент времени t . Если тело является стержнем, направленным по оси Ox , то уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \neq 0, x \in (-\infty, +\infty), t \in (0, +\infty) \quad (1.1)$$

где $a^2 = k/\rho\gamma$ – коэффициент внутренней теплопроводности, ρ - плотность вещества, γ - коэффициент теплоёмкости вещества.

Для неограниченного стержня $-\infty < x < +\infty$ решением уравнения (1.1) при начальном условии:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.2)$$

является следующая функция:



Функция, называемая интегралом Пуассона :

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}\right) ds \quad (\text{I. 1})$$

или иначе интеграл вида:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) G(x-s; t) ds \quad (\text{I. 2})$$

где

$$G(x-s; t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}\right) \quad (\text{I. 3})$$

- это так называемое фундаментальное решение или функция Грина на бесконечной прямой.



Некоторые формулы для интегралов типа Пуассона :

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-As^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(As^2 + Bs + C)] ds = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \cdot \exp\left[\frac{B^2 - 4AC}{4A}\right]$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2m} e^{-s^2} ds = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m} \cdot \sqrt{\pi}$$



Задача 1. Найти решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (-\infty, +\infty), & t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \exp(-x^2), & x \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Решение. Согласно формуле Пуассона (I.1) решение задачи (для $a = 1$) имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) \exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4t}\right) ds$$

Интеграл справа легко сводится к интегралу типа (3.), в котором

$$A = \frac{4t+1}{4t}, \quad B = \frac{2x}{4t}, \quad C = \frac{x^2}{4t},$$

Теперь легко находим решение задачи Коши

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp[-x^2/(4t+1)]$$



Найти решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Задача 1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x < 1, \quad x > 3 \end{cases} \end{cases}$$

Решение.

Учитывая формулу Пуассона (I. 1) (или метод функции Грина), а также тот факт, что функция $\varphi(x)$ на отрезке $[1; 3]$ равна постоянной величине (температуре - u_0), а вне отрезка температура равна нулю, то решение задачи имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_1^3 \exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}\right) ds$$

Полученный результат можно преобразовать к интегралу вероятностей $\Phi(z)$;



$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

Действительно, выполняя замену:

$$\xi = \frac{x-s}{2a\sqrt{t}}, \quad s = x - 2a\sqrt{t} \xi, \quad ds = -2a\sqrt{t} d\xi$$

Для $s = 1$ и $s = 3$ имеем: $\xi_1 = (x-1)/2a\sqrt{t}$ и $\xi_3 = (x-3)/2a\sqrt{t}$. Подставляя в $u(x, t)$, находим:

$$u(x, t) = \frac{-u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_3} \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi_1} \exp(-\xi^2) d\xi - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi_3} \exp(-\xi^2) d\xi .$$

В результате решение выразится формулой:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi \left(\frac{x-1}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{x-3}{2a\sqrt{t}} \right) \right]$$



Найти решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Задача 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Решение.

Учитывая формулу Пуассона (I.1) и то, что функция $\varphi(x)$ на отрезке $[0; 1]$ равна $1 - x$, а вне отрезка равна нулю, решение задачи принимает вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^1 (1 - s) \exp\left(-\frac{(s - x)^2}{4t}\right) ds$$

Полученный результат как и в прошлой задаче преобразуем к интегралу вероятностей $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$



Выполняя замену:

$$\xi = \frac{x-s}{2\sqrt{t}}, \quad s = x - 2\sqrt{t} \xi, \quad ds = -2\sqrt{t} d\xi$$

Для $s = 0$ и $s = 1$ имеем: $\xi_0 = x/2\sqrt{t}$ и $\xi_1 = (x-1)/2\sqrt{t}$. Подставляя в $u(x, t)$, находим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} (1-x+2\sqrt{t}\xi) \exp(-\xi^2) d\xi = \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\xi_0} \exp(-\xi^2) d\xi - \int_0^{\xi_1} \exp(-\xi^2) d\xi \right] + \sqrt{\frac{t}{\pi}} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \exp(-\xi^2) d(-\xi^2) = \\ &= \frac{(1-x)}{2} \left[\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right) \right] + \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right] \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x; t)|_{t=0} = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_2, & x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x; t)|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{l}, & -l \leq x < 0, \\ 0, & x < -l, \quad x > l, \end{cases} \text{ где } l > 0. \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x; t)|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{l}, & 0 \leq x \leq l, \\ 1 + \frac{x}{l}, & -l \leq x < 0, \\ 0, & x < -l, \quad x > l, \end{cases} \quad \text{где } l > 0. \end{array} \right.$$



2. Решение краевых задач уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой.

2.1. Решение уравнения теплопроводности с начал. и граничными условиями вида:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty);$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, +\infty);$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, +\infty),$$

Выражается формулой:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(s) \left[\exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(s+x)^2}{4a^2 t}\right) \right] ds + \quad (\text{I. 2. 1})$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^t \psi(\tau) \exp\left(\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) (t-\tau)^{-1.5} d\tau.$$



2. Решение краевых задач уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой.

2.2. Решение уравнения теплопроводности с нач. и граничными условиями вида:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty);$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, +\infty);$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty),$$

Выражается формулой:

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} \psi(s) G^*(x; s; t) ds \quad (\text{I. 2. 2})$$

$$G^*(x; s; t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right) \right]$$



2. Решение краевых задач уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой.

2.3. Решение уравнения теплопроводности с нач. и граничными условиями вида:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty);$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, +\infty);$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty),$$

Выражается формулой:

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} \psi(s) G^{**}(x; s; t) ds \quad (\text{I. 2. 3})$$

$$G^{**}(x; s; t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right) \right]$$



Найти решение следующих задач на **полубесконечной** прямой.

$$44. \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x; t)|_{x=0} = 0, & t \geq 0; \\ u(x; t)|_{t=0} = 1, & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$



Найти решение следующих задач на **полубесконечной** прямой.

$$45. \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x; t)|_{x=0} = 0, & t \geq 0; \\ u(x; t)|_{t=0} = u_0, & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$



Найти решение следующих задач на **полубесконечной** прямой.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ \left. \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & t \geq 0; \\ u(x; t)|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x < 0, \quad x > l, \end{cases} & \text{где } l > 0. \end{cases}$$



Найти решение следующих задач на **полубесконечной** прямой.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ \left. \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & t \geq 0; \\ u(x; t)|_{t=0} = \begin{cases} u_1, & 0 \leq x \leq l, \\ u_2, & x > l. \end{cases} \end{cases}$$



Дополнение. Интеграл вероятности (функция ошибок , функция Лапласа).

Это неэлементарная функция, возникающая в теории вероятностей, статистике и теории дифференциальных уравнений в частных производных.

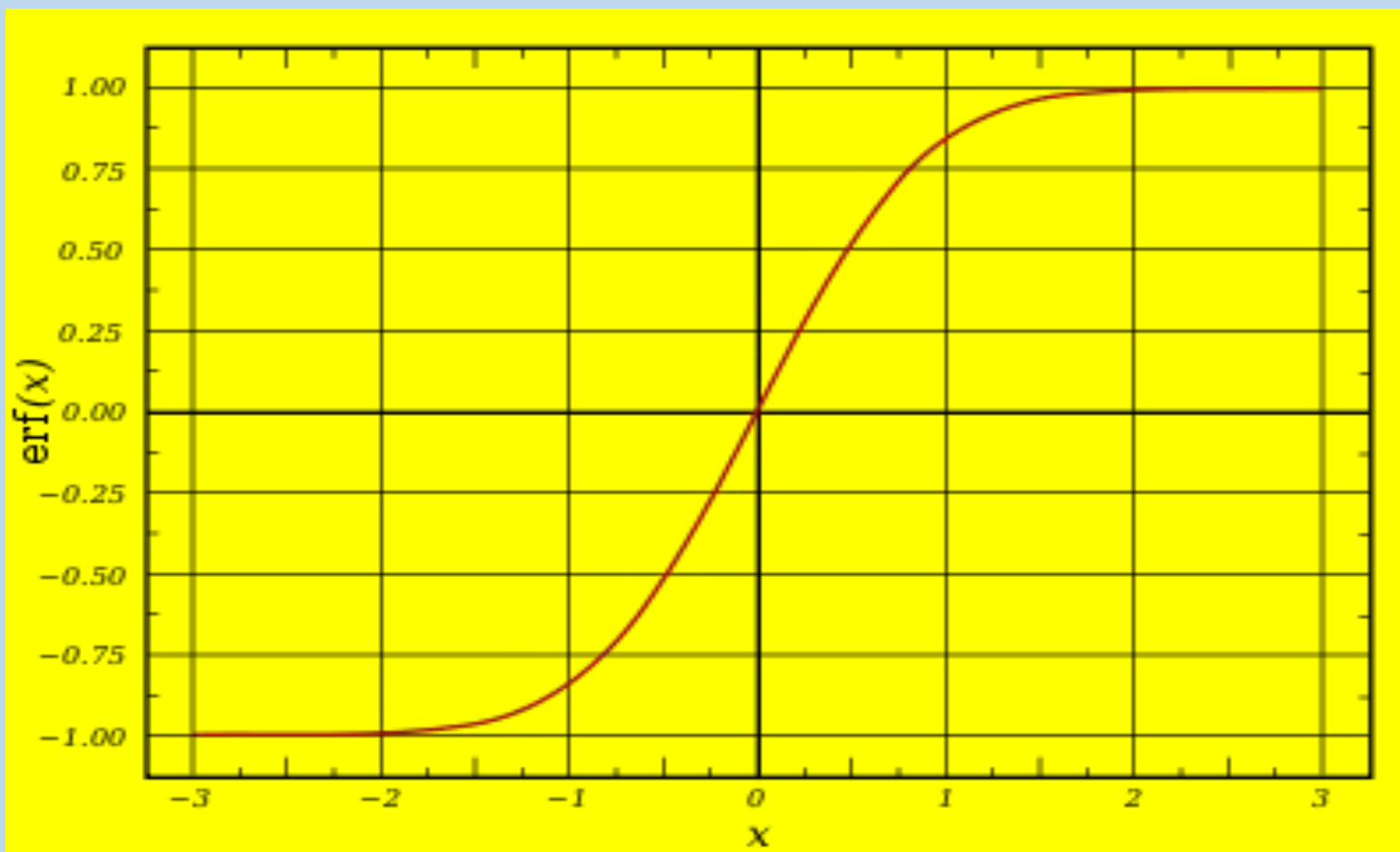
Она определяется следующим образом:

$$\Phi(x) \equiv \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

Свойства.

1. Нечётна: $\text{erf}(x) = -\text{erf}(-x)$
2. Для любого комплексного x :

$$\text{erf}(\bar{x}) = \overline{\text{erf}(x)}$$





3. Функция ошибок не может быть представлена через элементарные функции, но, разлагая интегрируемое выражение в ряд Тейлора и интегрируя почленно, мы можем получить её представление в виде ряда:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \dots \right)$$

Это равенство выполняется (и ряд сходится) как для любого вещественного x , так и на всей комплексной плоскости.

4. Функция ошибок на бесконечности равна единице, однако это справедливо только при приближении к бесконечности по вещественной оси, так как

5. При рассмотрении функции ошибок в комплексной плоскости точка $z = \infty$ будет для неё существенно особой.

6. Производная функции ошибок выводится непосредственно из определения функции:

$$\frac{d}{dx} \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$$



7. Обратная функция ошибок представляет собой вида:

$$\operatorname{erf}^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{2k+1} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} x \right)^{2k+1} \quad \text{где } C_0 = 1 \text{ и}$$

$$C_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{C_m C_{k-1-m}}{(m+1)(2m+1)} = \left\{ 1, 1, \frac{7}{6}, \frac{127}{90}, \dots \right\}$$

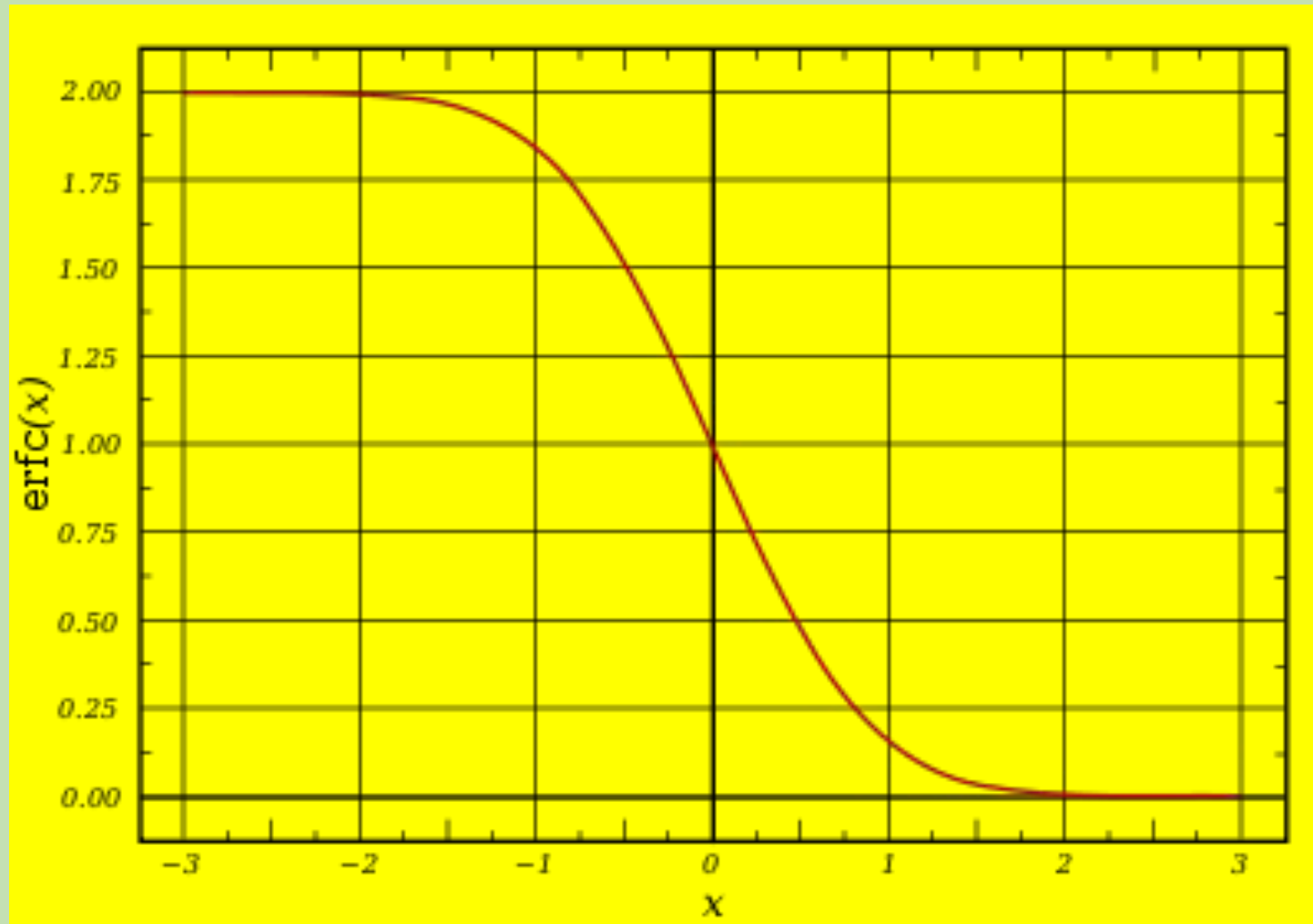
Функция ошибок и дополнительная функция ошибок встречаются в решении некоторых дифференциальных уравнений, например, **уравнения теплопроводности** с граничными условиями описываемыми функцией Хевисайда («ступенькой»).

Дополнительная функция ошибок, обозначается **$\operatorname{erfc}(x)$** (иногда применяют обозначение **$\operatorname{Erf}(x)$**) определяется через функцию ошибок:

$$\operatorname{Erf}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x).$$



График дополнительной функции ошибок, ***Erfc(x)*** имеет следующий вид:





БЛАГОДАРЮ
ЗА
ВНИМАНИЕ

