Лекция №3

Основные понятия алгебры логики.

Логические основы ЭВМ

28/111 Основы булевой алгебры

ЛОГИКА — это наука о формах и способах мышления.

Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира

Логика позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны

Логика делится на 2 раздела:

- классическая логика
- математическая логика

Логика высказываний

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА изучает правила **представления** высказываний, **построения** новых высказываний из имеющихся с помощью логических преобразований, а также способы **установления** истинности или ложности высказываний.

Основным объектом математической логики является **высказывание.**

АЛГЕБРА ЛОГИКИ – раздел математической логики, изучающий строение сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

ВЫСКАЗЫВАНИЕ – это повествовательное предложение, смысл которого может быть истинным или ложным.

Высказывание обозначают прописными латинскими буквами или заключают в скобки **{}**.

ВЫСКАЗЫВАНИЯ:

- {Рубль – российская валюта} (истинное).
- {Спортом заниматься полезно} (истинное).
- {На яблонях растут бананы} (ложное).

***Повелительные, вопросительные и бессмысленные* предложения не являются высказываниями!**

Например:

«Стой!» – не высказывание, т.к. это повелительное предложение;

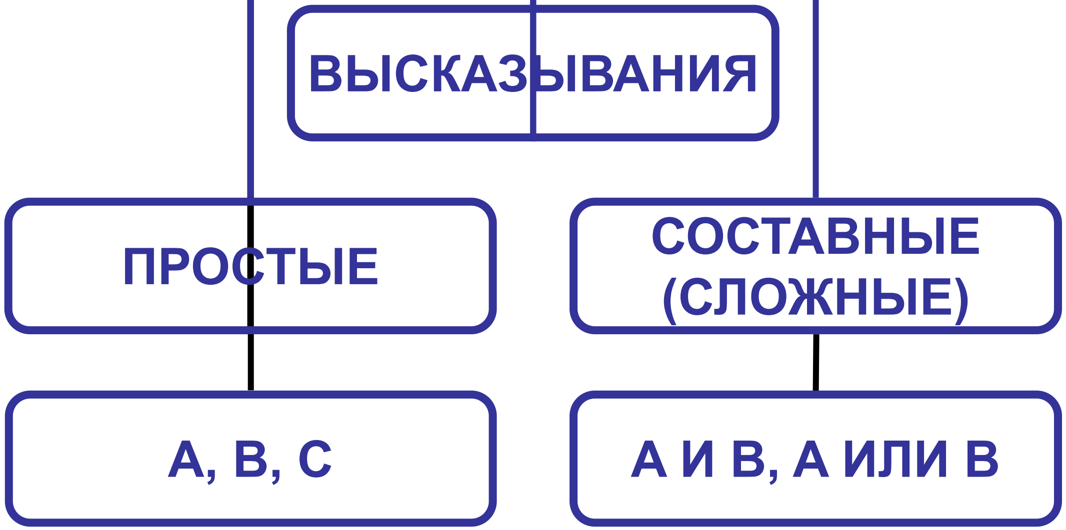
«$x^2+5x-6=0$» – не высказывание, т.к. не указано значение **x**, при котором оно рассматривается.

Высказывание **не содержит внутреннего противоречия** и **несет смысловую нагрузку**.

Например:

«Это утверждение не может быть истинным» – не является высказыванием, т.к. этот ответ представляет предложение, в котором скрыто внутреннее противоречие.

Высказывания



К ***ПРОСТЫМ ВЫСКАЗЫВАНИЯМ*** относят неразложимые высказывания.

Пример: **А= {Число 122 – составное}**

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ – высказывание, которое можно разложить на части (простые высказывания). Сложное высказывание получается из простых путем выполнения над ними логических операций.

Пример: **В= {10 делится на 2 И 5 больше 3}**

Основные логические операции

ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ – способ построения сложного высказывания из нескольких высказываний. При этом значение истинности сложного высказывания полностью определяется значениями истинности исходных высказываний.

Таблицу, содержащую значения составных высказываний при всех сочетаниях значений входящих в него простых высказываний, называют **ТАБЛИЦЕЙ ИСТИННОСТИ СОСТАВНОГО ВЫСКАЗЫВАНИЯ**.

Основные операции алгебры логики

- Инверсия
- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Неравнозначность
- Импликация
- Эквивалентность

Инверсия

ИНВЕРСИЕЙ (**ЛОГИЧЕСКИМ ОТРИЦАНИЕМ**) высказывания **A** называется высказывание, которое истинно, если ложно высказывание **A** и ложно в противном случае.

Обозначения: $\overline{A}, \neg A$ (читается **«не A»**, **«неверно, что A»**).

Пример:

A = {Компьютер работает}

$\overline{A}$ **= {Компьютер не работает}**

Таблица истинности

A	$\overline{\mathbf{A}}$
0	**1**
1	**0**

Конъюнкция

КОНЪЮНКЦИЕЙ двух высказываний **A** и **B** называется высказывание, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно в остальных случаях.

КОНЪЮНКЦИЯ (**ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ**) образуется соединением **двух высказываний** в одно с помощью союза **«И».**

Обозначения: **A&B, A∧B, A·B** (читается **«A и B»**).

Пример:

A = {Число 11 положительное}

B = {Число 11 нечетное}

A & B = {Число 11 положительное И нечетное}

Таблица истинности

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

ДИЗЪЮНКЦИЕЙ двух высказываний **А** и **В** называется высказывание, которое ложно, когда оба высказывания ложны, и истинно в остальных случаях.

ДИЗЪЮНКЦИЯ (**ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ**) образуется соединением **двух высказываний** в одно с помощью союза **«ИЛИ».**

Обозначения: **A∨B, A+B, A|B** (читается **«А или В»**).

Пример:

А = {Число 11 положительное}

В = {Число 11 нечетное}

A ∨ B = {Число 11 положительное ИЛИ нечетное}

Таблица истинности

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Неравнозначность

НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬЮ (**ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ «ИЛИ»**) двух высказываний **A** и **B** называется высказывание, истинное, когда истинностные значения A и B не совпадают, и ложное – в противном случае.

Обозначения: $A \oplus B$ (читается **«либо A, либо B»**)

Пример:

A = {Студент получил 2}

B = {Студент получил 3}

$A \oplus B$ **= {Студент получил либо 2, либо 3}**

Таблица истинности

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Импликация

ИМПЛИКАЦИЕЙ (**ЛОГИЧЕСКИМ СЛЕДОВАНИЕМ**) двух высказываний **A (посылка)** и **B (заключение)** называется высказывание, которое ложно, когда посылка A истинна, а заключение B – ложно, и истинно – в остальных случаях.

Обозначения: **A** $\rightarrow$ **B, A** $\Rightarrow$ **B** (читается **«из A следует B»**, **«если A, то B»**, **«A влечет B»**).

Пример:

A = {Студенты пропускают занятия}

B = {Деканат в восторге}

A→B = {Если студенты пропускают занятия, то деканат в восторге}

Таблица истинности

A	B	A ⇒ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬЮ двух высказываний **А** и **В** называется высказывание, которое истинно, когда оба высказывания одновременно истинны (ложны), и ложно – в остальных случаях.

Обозначения: **А↔В, А≡В, А~В** (читается **«А эквивалентно В»**, **«А, тогда и только тогда, когда В»**).

Пример:

А = {Параллелограмм является ромбом}

В = {Диагонали параллелограмма перпендикулярны}

А↔В = {Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны}

Таблица истинности

А	В	А↔В
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Приоритет логических операций

- 1 **ИНВЕРСИЯ** $\overline{A}$
- 2 **КОНЪЮНКЦИЯ** $\wedge$
- 3 **ДИЗЪЮНКЦИЯ** $\vee$
- 4 **ИМПЛИКАЦИЯ** $\Rightarrow$
- 5 **ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ** $\leftrightarrow$

Операция одного приоритета выполняется слева направо. Для изменения порядка действий используются скобки **()**.

$$\underbrace{A \vee B}_{3} \overset{4}{\Rightarrow} \underbrace{C \,\&\, D}_{2} \overset{5}{\Rightarrow} \underbrace{\overline{A}}_{1}$$

Логическая формула

Логической формулой называется выражение, составленное из букв, обозначающих высказывания, знаков логических операций и скобок, удовлетворяющих следующим условиям:

- любая переменная, обозначающая высказывание – формула;
- если **A** и **B** – формулы, то $\overline{A}$, **A** $\vee$ **B**, **A** $\wedge$ **B**, **A**$\Rightarrow$**B**, **A**$\leftrightarrow$**B** – формулы (1);
- если в любую из формул (1) вместо переменной **A** и **B** подставить формулу, то получится формула.

Логическая формула

Истинность логической формулы

Логическое выражение называется ***тождественно истинным***, если оно принимает значение ***1*** на всех наборах значений переменных, входящих в него.

Чтобы найти правильный ответ, необходимо определить, будет ли предложенное высказывание верным. Это означает, что в результате вычислений высказывание должно принять значение ***истина***.

Логическая функция

Логической функцией называют функцию $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, аргументы которой $X_1, X_2, ..., X_n$ (логические переменные) и сама функция **F** (логическая переменная) принимают значения **0** или **1**.

Логическая функция может задаваться в виде:

- **логического выражения,**
- **таблицы истинности,**
- **логической схемы**.

Пример: **Записать с помощью логических формул следующие высказывания:**

A. «Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые».

PS: союз «а» имеет смысл связки «и».

Решение:

1-е предложение: A □ B.

2-е предложение: $\overline{A} \wedge B$.

Объединяем два высказывания в одно связкой «$\wedge$»:

$(A$ □ $B) \wedge (\overline{A} \wedge B)$

B. «Точка X принадлежит отрезку [A, B]».

Решение:

$(X \geq A)$ *И* $(X \leq B)$.

Пример: Вычислить значение выражения

$$(a+b<c)\vee(a=c)\wedge(b<10) \quad \textbf{при } \boldsymbol{a}=\mathbf{1},\quad \boldsymbol{b}=\mathbf{2},\quad \boldsymbol{c}=\mathbf{4}$$

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{a+b}_{1}<c)}_{2}\vee\underbrace{\underbrace{(a=c)}_{3}\wedge\underbrace{(b<10)}_{4}}_{5}}_{6}$$

1 $a+b=3;$

2 $3<4\Rightarrow$ ИСТИНА;

3 $a=c\Rightarrow$ ЛОЖЬ;

4 $b<10\Rightarrow$ ИСТИНА;

5 ЛОЖЬ $\wedge$ ИСТИНА $\Rightarrow$ ЛОЖЬ

6 ИСТИНА $\vee$ ЛОЖЬ $\Rightarrow$ ИСТИНА

Законы алгебры логики

1. Закон двойного отрицания

$$A = \overline{\overline{A}}$$

2. Переместительный (коммутативный) закон

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \,\&\, B = B \,\&\, A$$

Законы алгебры логики

3. Сочетательный (ассоциативный) закон

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$$

Законы алгебры логики

4. Распределительный (дистрибутивный) закон

$$(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$$

$$(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C)$$

5. Закон общей инверсии
(законы де Моргана)

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$$

$$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Законы алгебры логики

6. Закон поглощения

$$A \vee (A \,\&\, B) = A$$

$$A \,\&\, (A \vee B) = A$$

Законы алгебры логики

7. Закон исключения (склеивания)

$$(A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, B) = B$$

$$(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee B) = B$$