

Линии второго порядка на плоскости

- Общее уравнение кривой второго порядка
- Окружность
- Эллипс
- Гипербола
- Парабола

Общее уравнение кривой второго порядка

К кривым второго порядка относятся: *эллипс*, частным случаем которого является *окружность*, *гипербола* и *парабола*.

Они задаются уравнением второй степени относительно *x* и *y*:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

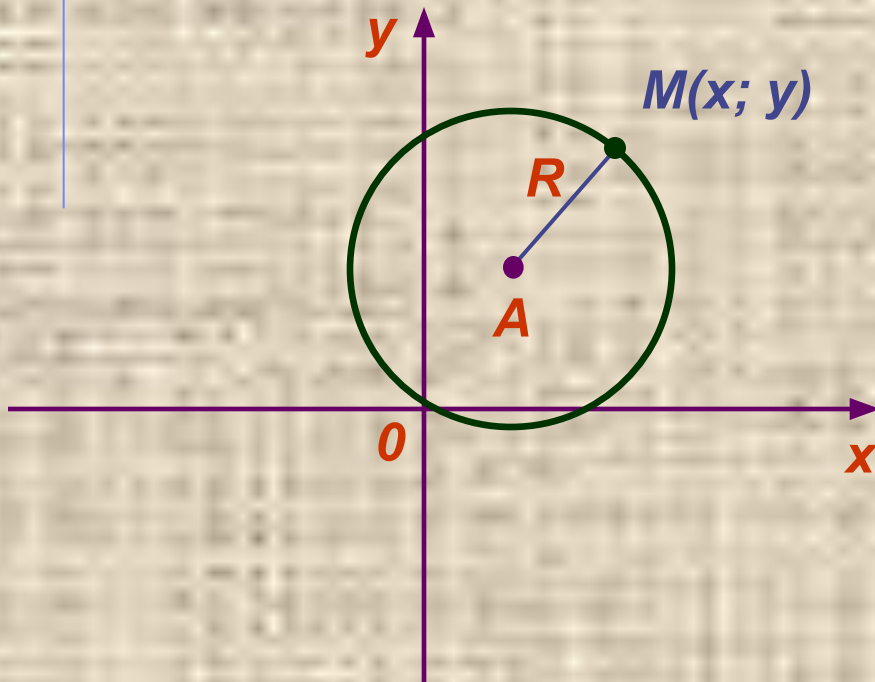
Общее уравнение кривой
второго порядка

В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от точки **$A(a; b)$** на расстояние **R** .

Для любой точки **M** справедливо:



$$|\overline{AM}| = R \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R \quad \Rightarrow$$

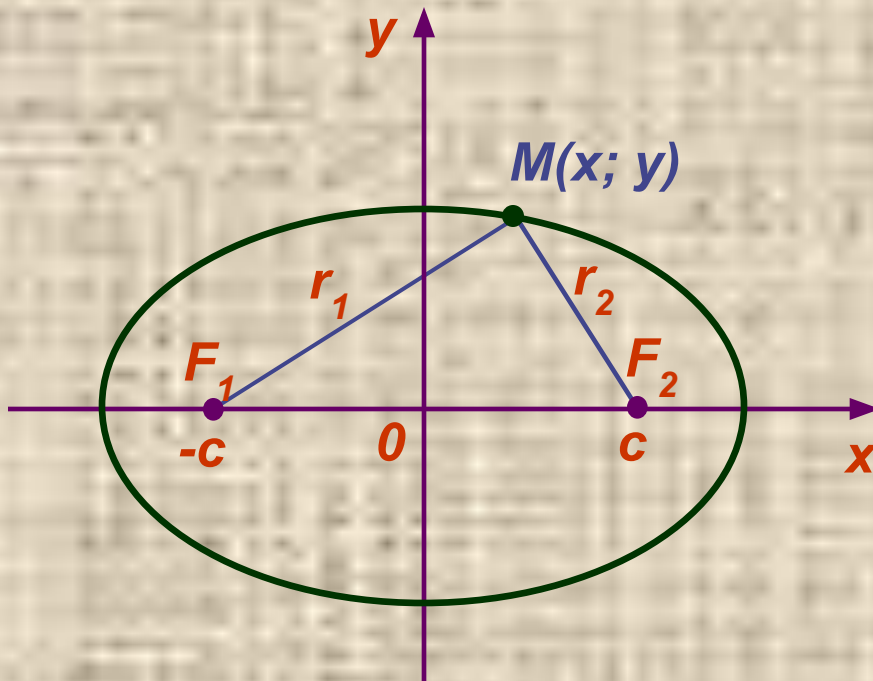
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Каноническое уравнение
окружности

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$.

Зададим систему координат и начало координат выберем в середине отрезка $[F_1 F_2]$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1 M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2 M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Эллипс

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2} \Rightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} - \cancel{x^2} - 2xc - \cancel{c^2} \Rightarrow$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2 : 4 \Rightarrow$$

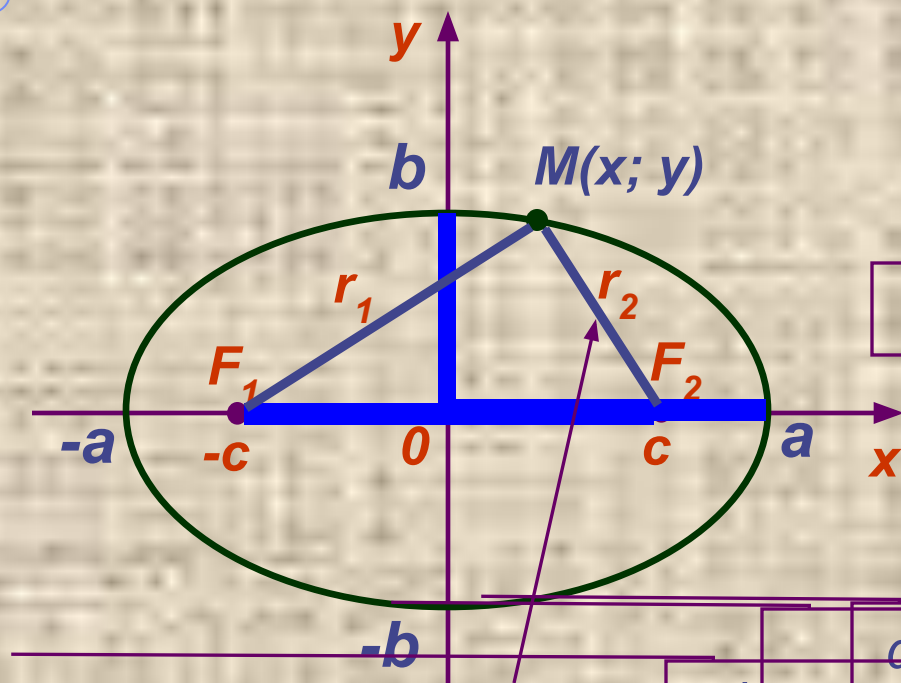
$$a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2 \Rightarrow$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 : (a^2b^2) \quad \boxed{b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Каноническое уравнение
эллипса

Эллипс



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$|F_1 F_2| = 2c$$

малая полуось

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

большая полуось

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

фокальные радиусы точки M

$$r_1 = a + \varepsilon x; \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

эксцентриситет эллипса

Эксцентриситет характеризует форму эллипса ($\varepsilon = 0$ – окружность)

Для эллипса справедливы следующие неравенства:

$$a > c; \quad a > b; \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Пример

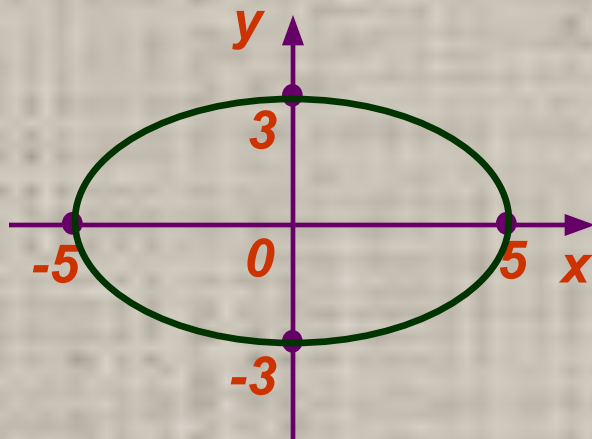
Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат в точках $F_1(-4; 0)$ $F_2(4; 0)$, а эксцентриситет равен $0,8$.

$$c = 4 \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{0.8} = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \quad b = 3$$

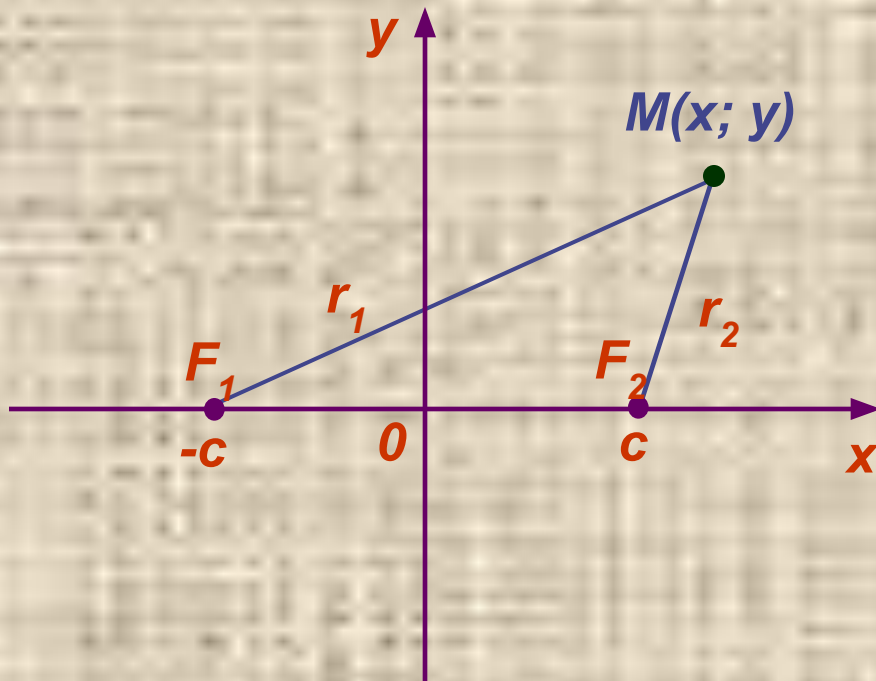
Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$.



$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Гипербола

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

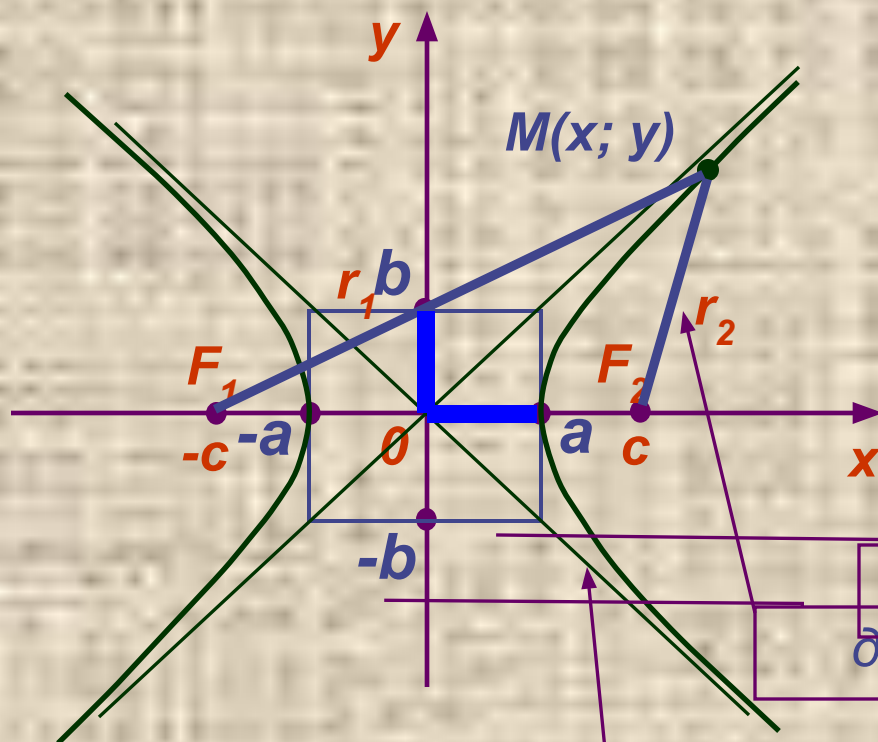
После тождественных преобразований уравнение примет вид:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 : (a^2 b^2) \quad b^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение
гиперболы

Гипербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

мнимая полуось
действительная полуось
радиусы
точки M

Для гиперболы справедливо: $\varepsilon > 1$
эксцентриситет гиперболы

асимптоты
гиперболы

Пример

Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(6; -4)$, если ее асимптоты заданы уравнениями:

$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} x \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 3b = \sqrt{6}a$$

Точка A лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{6^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2$$

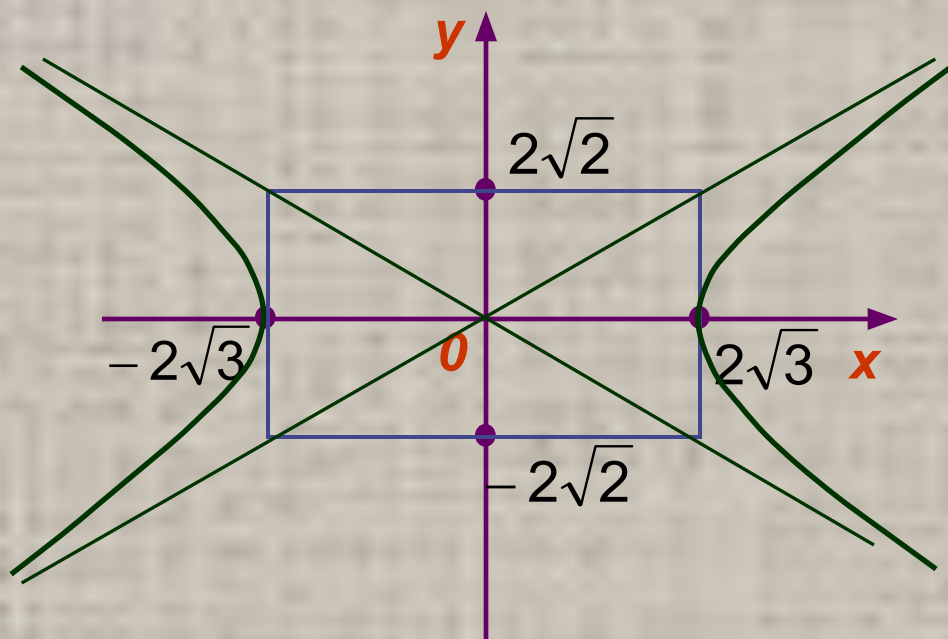
Решим систему: $\begin{cases} 3b = \sqrt{6}a \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 24a^2 - 16a^2 = \frac{2}{3}a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Пример

Каноническое уравнение гиперболы:

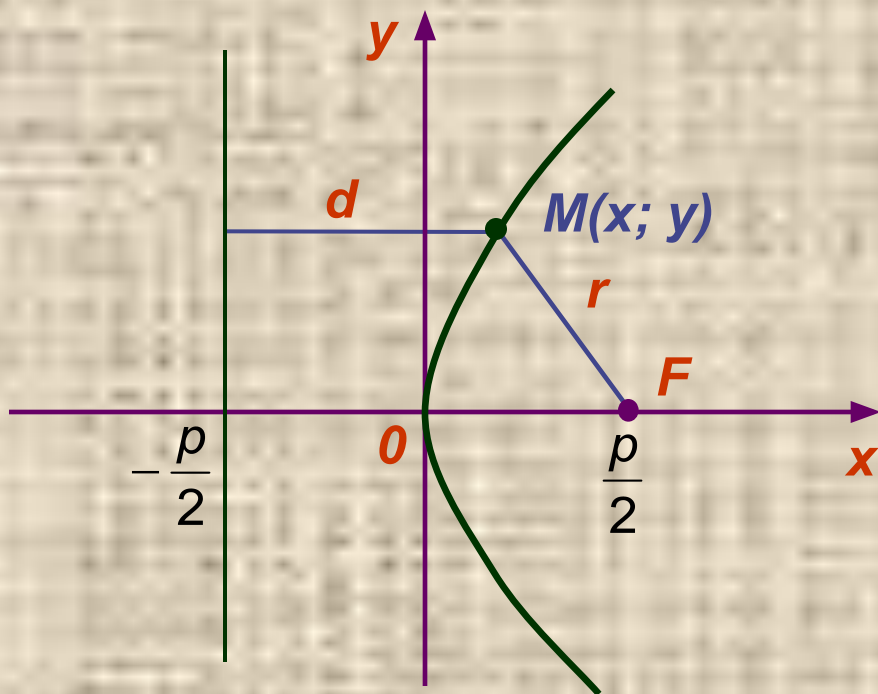
$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$$



Парабола

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки той же плоскости

$F(\frac{p}{2}; 0)$ называемой **фокусом**, равно расстоянию до прямой: $x = -\frac{p}{2}$



$$r = d \quad F(\frac{p}{2}; 0) \quad p > 0$$

$$r = |FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

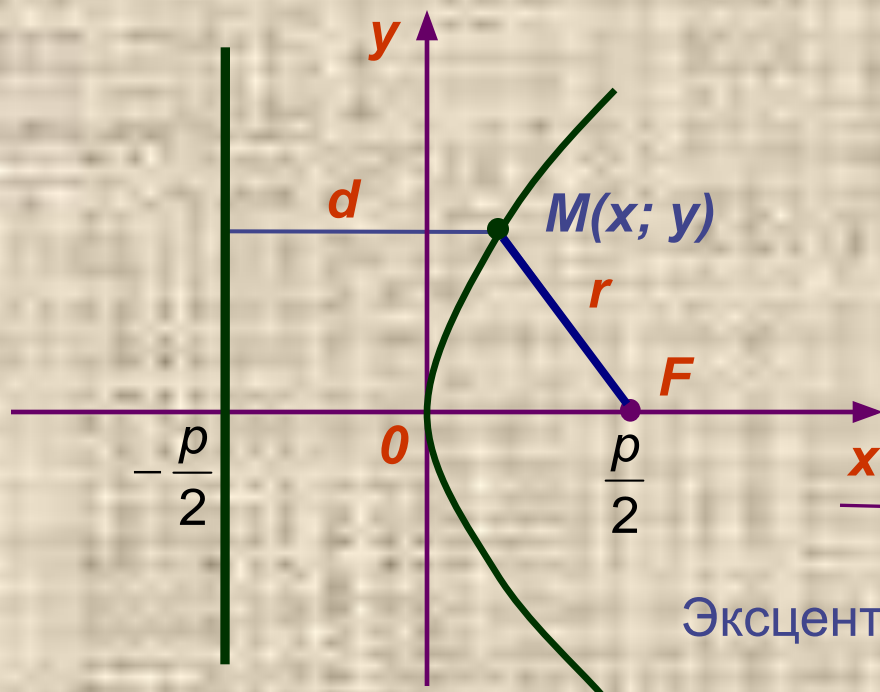
$$d = x + \frac{p}{2}$$

Парабола

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \Rightarrow$$

каноническое
уравнение параболы

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 = 2px$$



директриса параболы

$$r = x + \frac{p}{2}$$

фокальный радиус

фокус параболы

Эксцентриситет параболы: $\varepsilon = 1$

Преобразование общего уравнения к каноническому виду

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Составим из коэффициентов уравнения два определителя:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Дискриминант
уравнения

Дискриминант старших
членов уравнения $\Delta \neq 0$ $\Delta = 0$

Дискриминант уравнения	Дискриминант старших членов уравнения $\Delta \neq 0$	Дискриминант старших членов уравнения $\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс	Точка
$\delta < 0$	Гипербола	Пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	Парабола	Пара параллельных прямых

Преобразование общего уравнения к каноническому виду

Общее уравнение кривой называется пяти-членным, если $2Bxy=0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Приведение пяти-членного уравнения к каноническому виду рассмотрим на примере:

$$16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$(16x^2 - 32x) + (25y^2 + 50y) - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$16(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 2y) = 359 \Rightarrow$$

$$16(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 2y + 1) = 359 + 16 + 25 \Rightarrow$$

$$16(x - 1)^2 + 25(y + 1)^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$$

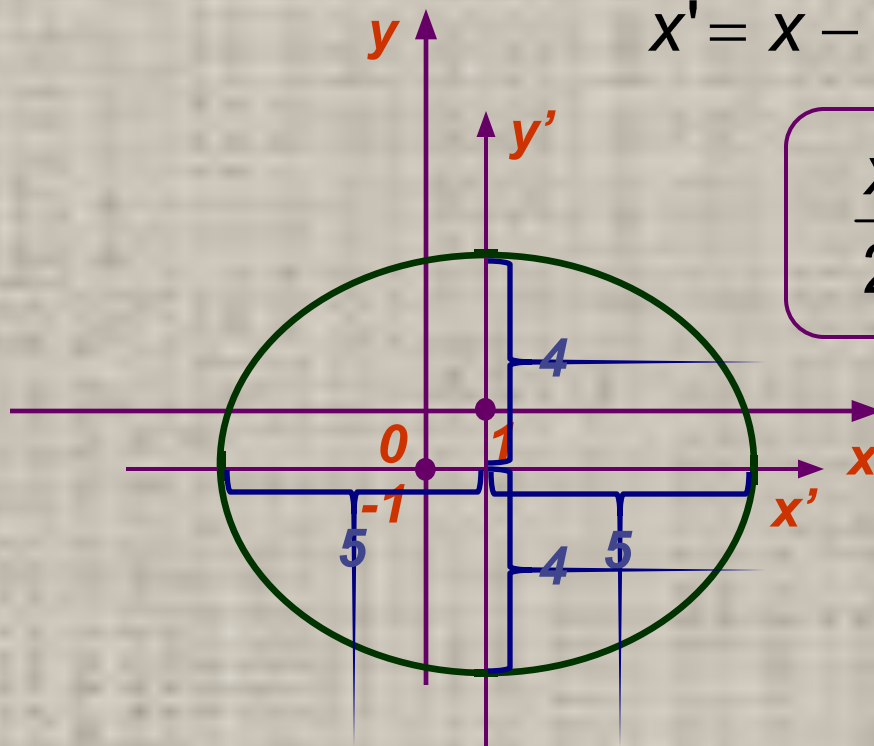
Преобразование общего уравнения к каноническому виду

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Перенесем начало координат в точку **(1; -1)**, получим новую систему координат:

$$x' = x - 1; \quad y' = y + 1$$

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1$$



Преобразование общего уравнения к каноническому виду

Если слагаемое $2Bxy$ в общем уравнении не равно нулю, то для приведения уравнения к каноническому виду необходимо повернуть оси координат на угол α . При этом зависимость между старыми координатами и новыми определяются формулами:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Угол α удовлетворяет условию:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}$$

В случае, если $A = C$, то

$$2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$