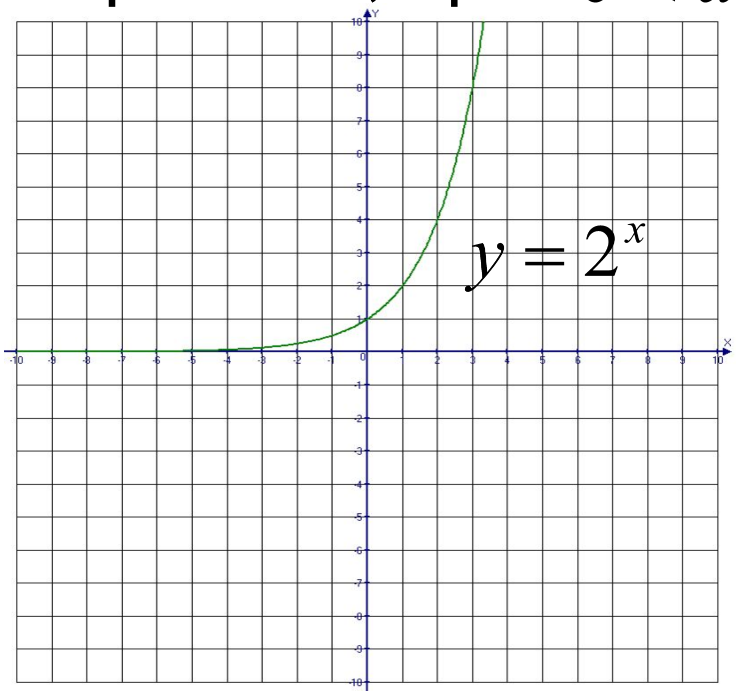
Решение типовых задач
из сборника ЕНТ по разделу:

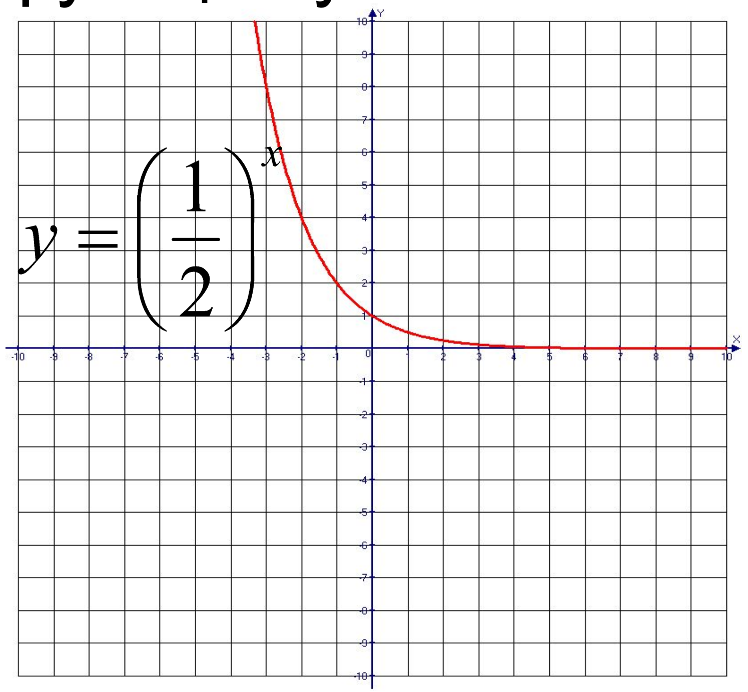
«Показательная и логарифмическая функции»

Основные понятия и формулы

Функция, заданная формулой $y = a^x$ (где $a > 0,\ a \neq 1$), называется *показательной функцией* с основанием a

1) $D(f) = R$ 2) $E(f) = R_+$ 3) При $a > 1$ - функция возрастает, при $0 < a < 1$ - функция убывает

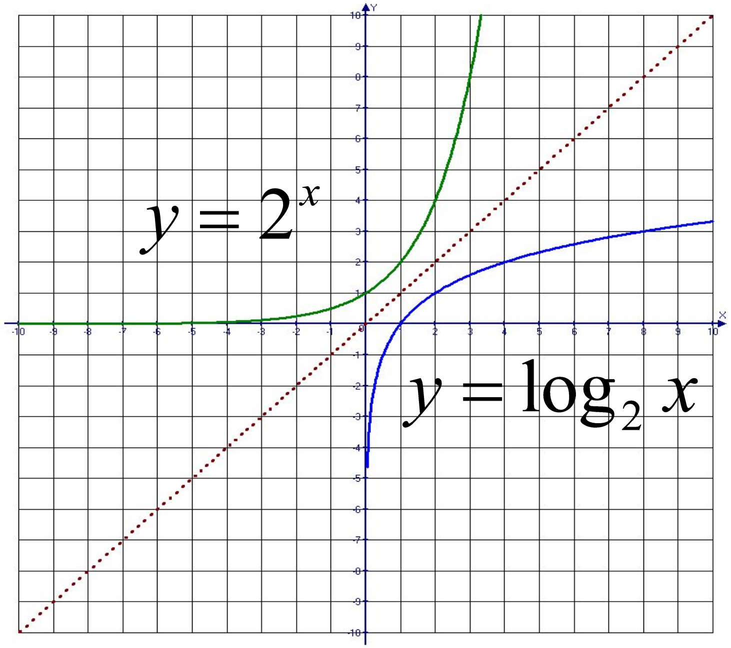


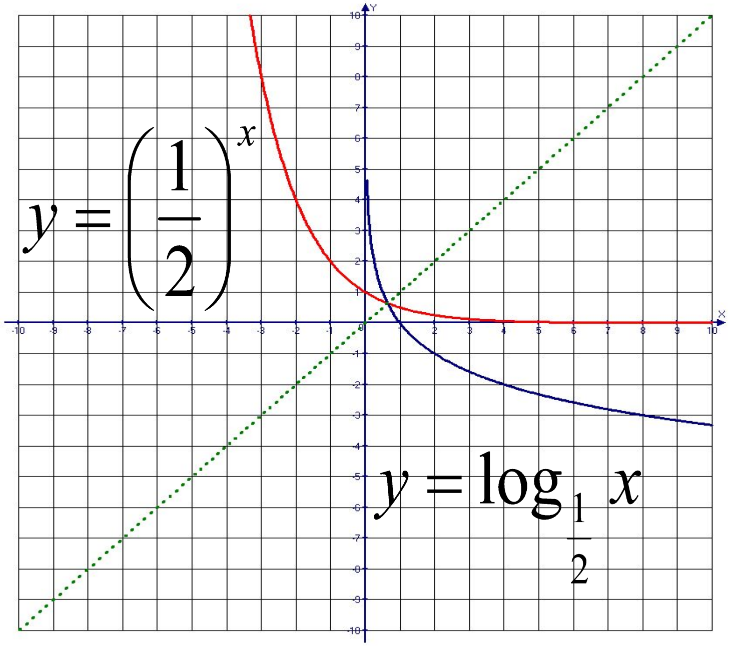


Основные понятия и формулы

Функция, заданная формулой $y = \log_a x$ называется *логарифмической функцией* с основанием a (где $a > 0, a \neq 1$)

1) $D(f) = R_+$ 2) $E(f) = R$ 3) При $a > 1$ - функция возрастает, при $0 < a < 1$ - функция убывает





Основные понятия и формулы

Логарифмом числа b по основанию a называют показатель степени N, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b , т.е. $\log_a b = N$

$a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество

Основные свойства логарифмов:

$1)\ \log_a 1 = 0$

$2)\ \log_a a = 1$

$3)\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$4)\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$5)\ \log_a x^p = p \cdot \log_a x$

$6)\ \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$

$7)\ \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Основные понятия и формулы

Натуральный логарифм: $\log_e x = \ln x$

Десятичный логарифм: $\log_{10} x = \lg x$

Производная и первообразная

$$1)\ (e^x)' = e^x$$

$$2)\ (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$3)\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$4)\ \int e^x dx = e^x + C$$

$$5)\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6)\ \int \ln x\, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

ПРИМЕР 1

Решите неравенство: $\log_2(x+20) < 3$

Решение:

$$\log_2(x+20) < 3$$

$$\begin{cases} x+20 > 0 \\ x+20 < 2^3, \quad т.к.\ 2 > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > -20 \\ x < -12 \end{cases} \Rightarrow x \in (-20; -12)$$

Ответ: (-20; -12)

ПРИМЕР 2

Решите неравенство: $2\log_2 x < 3$

Варианты ответа:

$A)(-3;0)\quad B)(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\quad C)(0;2\sqrt{2})\quad D)(-\infty;2\sqrt{2})\quad E)(-3;3)$

Решение:

$$2\log_2 x < 3;\quad \log_2 x < \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 2^{\frac{3}{2}},\ т.к.\ 2 > 1 \end{cases};\quad \begin{cases} x > 0 \\ x < \sqrt{8} \end{cases};\quad \begin{cases} x > 0 \\ x < 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x \in (0;2\sqrt{2})$$

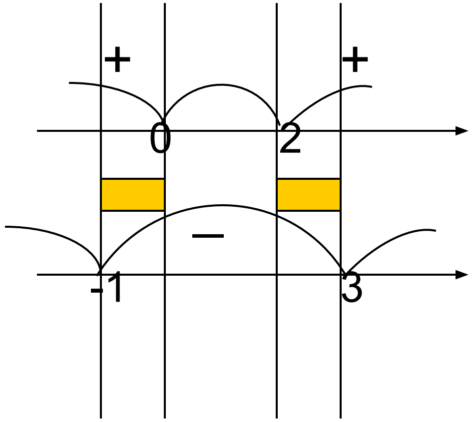
$$x \in (0;2\sqrt{2})$$

ПРИМЕР 3

Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)>-1$

Решение:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)>-1;$$



$$\begin{cases} x^2-2x>0 \\ x^2-2x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \quad т.к.\ \frac{1}{3}<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2)>0 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases} \quad D=16,\ \ x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2},\ x_1=-1,\ x_2=3$$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(2;3)$

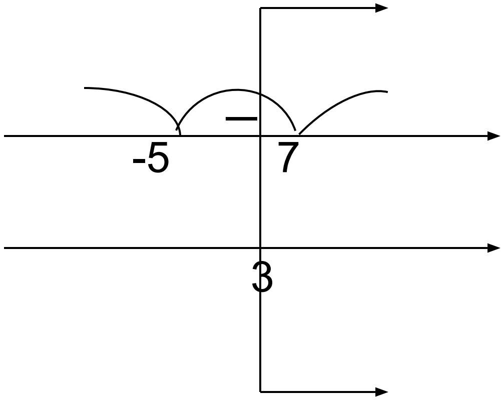
ПРИМЕР 4

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_2(x+1) > 2 \\ \dfrac{x-7}{x+5} \le 0 \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 > 4, \quad т.к.\ 2 > 1; \\ (x-7)(x+5) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 3 \qquad\qquad\qquad ; \\ (x-7)(x+5) \le 0 \end{cases}$$



$$x \in (3;7]$$

Ответ: $x \in (3;7]$

ПРИМЕР 5

Решите неравенство: $\dfrac{\log_3 0{,}2}{x+3} < 0$

Решение:

$ОДЗ: x \neq -3$

$т.к.\ \log_3 0{,}2 < 0 \Rightarrow x+3 > 0$

$x > -3$

$x \in (-3; +\infty)$

Ответ: $x \in (-3; +\infty)$

ПРИМЕР 6

Сколько целых решений имеет неравенство: $1-5\log_x 3+6\log_x^2 3<0$

Решение: $ОДЗ: x>0, x\neq 1$

$$\log_x 3 = y; \qquad 6y^2-5y+1<0$$

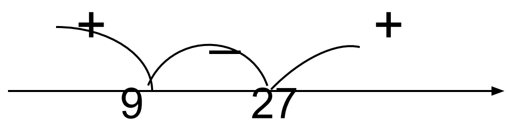
$$6y^2-5y+1=0$$

$$D=1; \qquad y_{1,2}=\frac{5\pm 1}{12}; \qquad y_1=\frac{1}{3}; \qquad y_2=\frac{1}{2}$$

$$1)\ \log_x 3=\frac{1}{3} \qquad 2)\ \log_x 3=\frac{1}{2}$$

$$x^{\frac{1}{3}}=3 \qquad x^{\frac{1}{2}}=3$$

$$x_1=27 \qquad x_2=9$$



$$x\in(9;27)$$

Подсчетом определяем, что количество целых решений: 10; 11; 12;…25; 26 равно **17**

Ответ: 17

Уровень В

Решите неравенство:

$$\lg(x+4)+\lg(2x+3)\le\lg(1-2x)$$

$$\textit{Ответ} \; : x\in(-1{,}5;\ -1]$$

$$\log_3 \log_5 \frac{3x+5}{x+6} < 0.$$

$$\left(-\infty; -\frac{25}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$4\log_3 x - 18\log_x 3 \leq -1.$$

Ответ:

$$\left(0;\, 3^{-\frac{9}{4}}\right] \cup (1;\, 9].$$

Front Work

1. Найдите наибольшее целое решение неравенства: $\log_2^2(5-x)-\log_2(5-x)^6 \le -9$

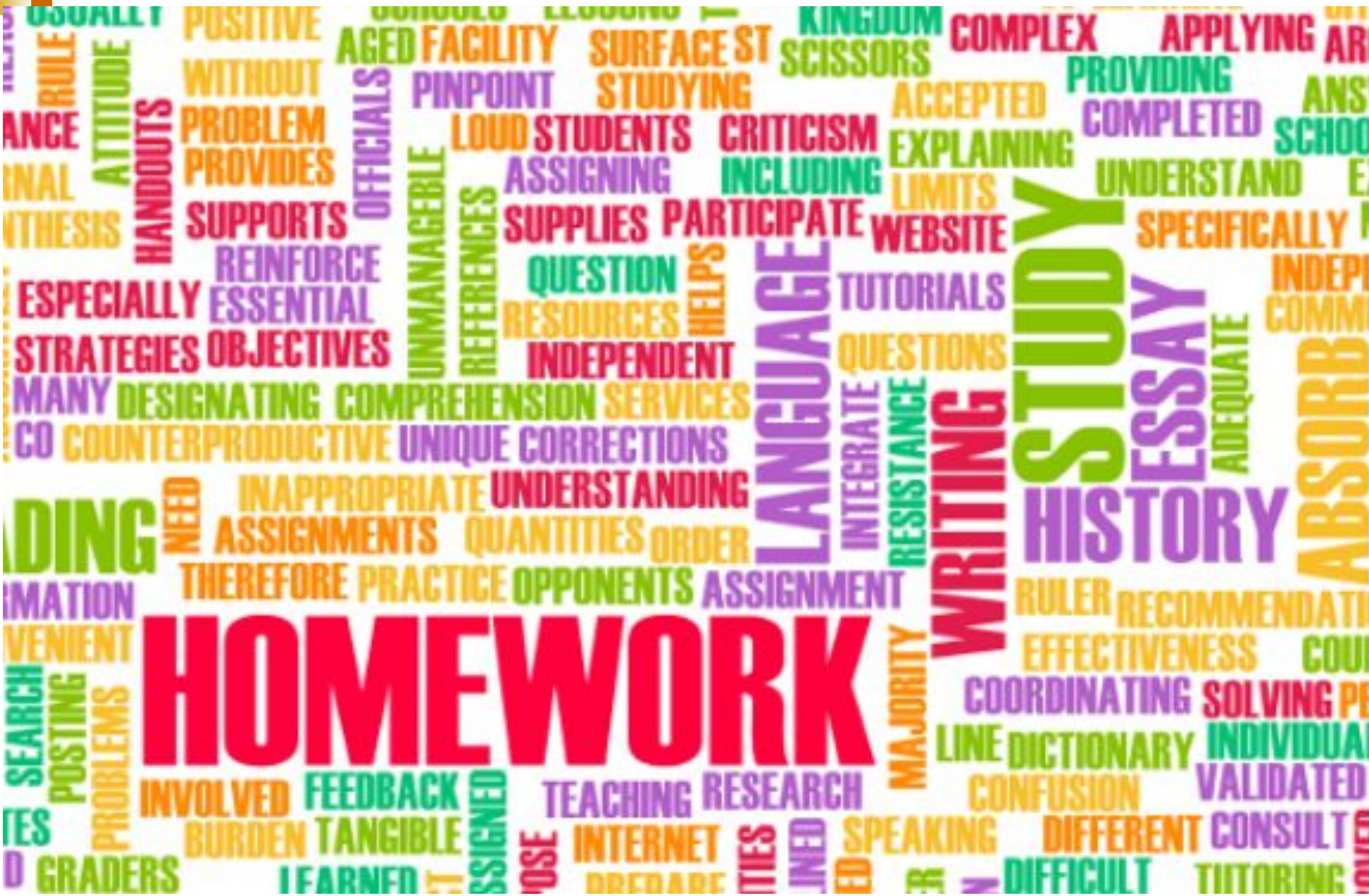
2. Решите неравенство: $\log_2 - \log_{x+1}(3x+2) \le 0$

3. Решите неравенство: $2^{\log_3 x} \le 56 - 6\cdot x^{\log_3 2}$

Ответы:

$1)\,-3 \qquad 2)\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right) \qquad 3)\,(0;\ 27]$

Individual work
ФР №7


USUALLY
POSITIVE
KINGDOM
COMPLEX
APPLYING
AGED
FACILITY
SURFACE
SCISSORS
RULE
ATTITUDE
WITHOUT
OFFICIALS
PINPOINT
STUDYING
ACCEPTED
PROVIDING
COMPLETED
HANDOUTS
PROBLEM
PROVIDES
LOUD
STUDENTS
CRITICISM
EXPLAINING
UNMANAGEABLE
ASSIGNING
INCLUDING
UNDERSTAND
REFERENCES
SUPPORTS
SUPPLIES
PARTICIPATE
LIMITS
WEBSITE
SPECIFICALLY
STUDY
REINFORCE
QUESTION
HELPS
LANGUAGE
TUTORIALS
ESSAY
ESPECIALLY
ESSENTIAL
RESOURCES
STRATEGIES
OBJECTIVES
INDEPENDENT
QUESTIONS
ADEQUATE
MANY
DESIGNATING
COMPREHENSION
SERVICES
INTEGRATE
RESISTANCE
WRITING
CO
COUNTERPRODUCTIVE
UNIQUE
CORRECTIONS
NEED
INAPPROPRIATE
UNDERSTANDING
HISTORY
ABSORB
ASSIGNMENTS
QUANTITIES
ORDER
THEREFORE
PRACTICE
OPPONENTS
ASSIGNMENT
RULER
HOMEWORK
EFFECTIVENESS
MAJORITY
COORDINATING
SOLVING
SEARCH
POSTING
PROBLEMS
LINE
DICTIONARY
INDIVIDUAL
INVOLVED
FEEDBACK
TEACHING
RESEARCH
CONFUSION
VALIDATED
BURDEN
TANGIBLE
INTERNET
SPEAKING
DIFFERENT
CONSULT
GRADERS
DIFFICULT
TUTORING