

# Решение 19 задачи ЕГЭ

Желтова Ольга

Николаевна

Учитель математики

МАОУ Лицей №6

Г. Тамбов

# Статистика и критерии

- Процент выполнения задания 19 ЕГЭ по математике в 2015 году:
- 1 балл получили 19,0%
- 2 балла получили 3,7 %
- 3 балла получили 0,7 %
- 4 балла получили 2,3 %

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                            |  | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.                                                                                                             |  | 4     |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.                                                                                                         |  | 3     |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.                                                                                                         |  | 2     |
| Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — верное доказательство в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки |  | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                               |  | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                 |  | 4     |

# Задачи на разбиение множеств

- Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.
- а) Является ли множество  $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$  хорошим?
- б) Является ли множество  $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$  хорошим?
- в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества  $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$ ?
- Демонстрационная версия ЕГЭ по математике, 2016

# Задачи на разбиение множеств

- а) Является ли множество  $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$  хорошим?

А:  $\{200, 299, 202, 297, 204, 295, \dots, 248, 251\}$ ,

В:  $\{201; 298; 203; 296; 205, 294, \dots, 249, 250\}$ .



# Задачи на разбиение множеств

- б) Является ли множество  $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$  хорошим?
- $2^{100} = 2 * 2^{99} = 2^{99} + 2^{99} = 2^{99} + 2^{98} + 2^{98} = 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^1 = 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^{99} + \dots + 2^1 + 2$

# Задачи на разбиение множеств

- в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества  $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$ ?

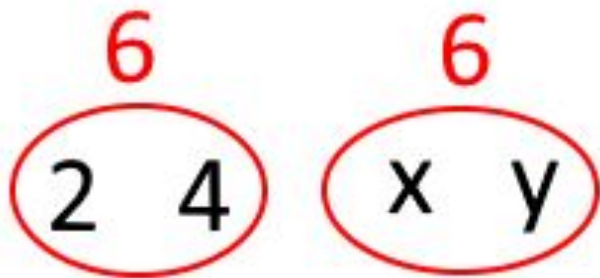
$$1) A=B+C+D$$

$$2) A+B=C+D$$

- 1 случай: одно число является суммой трёх других,  $\{1; 2; 4; 7\}$  и  $\{2; 4; 5; 11\}$ .
- 2 случай: множество содержит две пары чисел с равными суммами, т.е. сумма всех чисел должна быть чётна, чтобы подмножество можно было разбить на две группы. Следовательно, 2 и 4 либо одновременно входят в подмножество, либо одновременно не входят в него.

# Задачи на разбиение множеств

- Если 2 и 4 входят в подмножество, то либо сумма двух других чисел равна 6 ( $\{1; 2; 4; 5\}$ ), либо разность двух других чисел равна 2, это подмножества:
- $\{1; 2; 4; 5\}; \{2; 4; 5; 7\}; \{2; 4; 7; 9\}; \{2; 4; 9; 11\}$ .
- Если 2 и 4 не входят в подмножество, то хорошее подмножество лежит во множестве  $\{1; 5; 7; 9; 11\}$ .  
Получаем хорошие подмножества:
- $\{1; 5; 7; 11\}$  и  $\{5; 7; 9; 11\}$ .
- Всего 8 хороших подмножеств.



2 x      4 y

$$2+x=4+y$$
$$x=2+y$$

# Задачи на делимость

- После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса не поняла доказательство. На перемене один ученик вдруг понял доказательство (и только он). Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.
- а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?
- б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?
- в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?



# Задачи на делимость

- а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?
- Да. Пусть в классе учится 29 человек, из которых сперва 15 человек не поняли доказательство (большая часть класса), а затем их осталось 14 (меньшая часть).

# Задачи на делимость

- б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?
- Да. Пусть в классе было 24 ученика, из которых ровно 6 поняли доказательство. Тогда исходно процент понявших — 25, а после перемены, когда понявших станет 7, процент понявших будет нецелым.

# Задачи на делимость

- в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?
- Пусть всего в классе  $n$  учеников, а количество так и не понявших доказательство равно  $k$ . Очевидно,  $k$  не превосходит  $(n - 1)$ , ведь один ученик понял доказательство на перемене.
- Тогда искомый процент равен  $\frac{100k}{n}$
- Чтобы это число было как можно большим, требуется максимизировать дробь  $\frac{k}{n}$  при условии, что  $100k \nmid n$

# Задачи на делимость

Максимальный делитель 100 между 20 и 30 – 25, максимальная дробь –  $\frac{24}{25}$ ,

$$100 \cdot \frac{24}{25} = 96\%$$

- Докажем, что 96% - наибольший ответ.

$$\frac{24}{25} = 1 - \frac{1}{25} \quad \text{Если } n < 25, \text{ то } \frac{1}{n} > \frac{1}{25} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{25}$$

- Разберём случаи  $n \in \{26, 27, 28, 29\}$

# Задачи на делимость

$$n = 26 \Rightarrow k \nmid 13;$$

$$n = 29 \Rightarrow k \nmid 29;$$

$$k = 13; \quad \frac{13}{26} < \frac{24}{25}$$

$$k = 0; \quad 0 < \frac{24}{25}$$

$$n = 27 \Rightarrow k \nmid 27;$$

$$n = 30 \Rightarrow k \nmid 3;$$

$$k = 0; \quad 0 < \frac{24}{25}$$

$$k = 27; \quad \frac{27}{30} < \frac{24}{25}$$

$$n = 28 \Rightarrow k \nmid 7;$$

$$k = 21; \quad \frac{21}{28} < \frac{24}{25}$$

**Следовательно, 96% –  
максимально возможное  
значение**

# Задачи на делимость

- В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» — процент побед, округлённый до целого, «ничьи» — процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17).
- а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?
- б) Может ли после выигранной партии увеличиться показатель «поражений»?
- в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

# Задачи на делимость

- а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?
- Если из 6 партий шахматист выиграл одну, то показатель «побед» равен  $16, (6) = 17$ .

# Задачи на делимость

- б) Может ли после выигранной партии увеличиться показатель «поражений»?
- 200 партий: 100 побед, 95 проигрышей, 5 ничьих (2,5%).  
Показатель побед: 50, показатель ничьих: 3, показатель поражений: 47
- 201 партия: 101 победа, 95 проигрышей, 5 ничьих (2,48%).
- Показатель побед: 50, показатель ничьих: 2, показатель поражений: 48



# Задачи на делимость

- в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?

$$n = 50: a_{np} = \frac{100}{50} = 2; \quad a_{ноб} + a_{нич} = \frac{49 \cdot 100}{50} = 98$$

$$n < 50: a_{np} > \frac{100}{50}; \quad a_{np} > 2;$$

$$a_{ноб} + a_{нич} < \frac{49 \cdot 100}{50}; \quad a_{ноб} + a_{нич} < 98$$

$$a_{ноб} + 0,5 + a_{нич} + 0,5 < 99; \quad a_{пор} > 1$$

# Задачи на делимость

$$n = 51$$

*Поражения : 1*

*Победы : 12*

*Ничьи : 38*

$$a_{\text{поб}} = \frac{100 \cdot 12}{51} = 23,52 \approx 24$$

$$a_{\text{нич}} = \frac{100 \cdot 38}{51} = 74,5 \approx 75$$

$$a_{\text{пор}} = 100 - 75 - 24 = 1$$

# Задачи на делимость

- На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно  $-3$ , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно  $-8$ .
- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

# Задачи на делимость

- Пусть среди написанных чисел  $k$  положительных,  $l$  отрицательных и  $m$  нулей.
- Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому  $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$ .
- а) Сколько чисел написано на доске?
- Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому  $k + l + m$  — количество целых чисел — делится на 4.
- По условию  $40 < k + l + m < 48$ , поэтому  $k + l + m = 44$ . Таким образом, написано 44 числа.

# Задачи на делимость

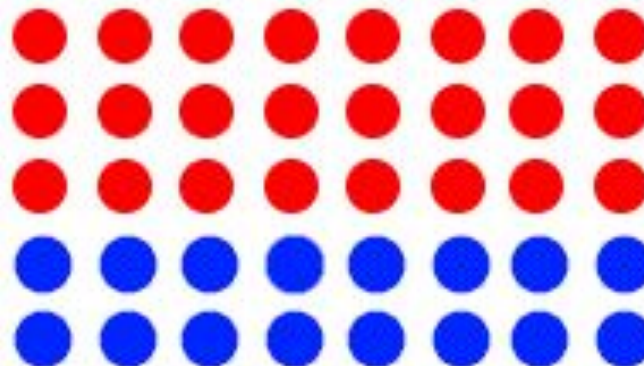
- б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- Приведём равенство  $4k - 8l = -3(k + l + m)$  к виду  $5l = 7k + 3m$ .
- Так как  $m \geq 0$ , получаем, что  $5l \geq 7k$ , откуда  $l > k$ . Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

# Задачи на делимость

- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?
- Подставим  $k + l + m = 44$  в правую часть равенства  $4k - 8l = -3(k + l + m)$ , откуда  $k = 2l - 33$ .
- Так как  $k + l \leq 44$ , получаем:  
 $3l - 33 \leq 44; 3l \leq 77; l \leq 25; k = 2l - 33 \leq 17$ ,  
то есть положительных чисел не более 17.
- Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число  $-8$  и два раза написан 0. Тогда указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

# Задачи на делимость

- В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.
- а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.
- б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?
- в) Сколько в роте может быть солдат?
- *Демонстрационная версия ЕГЭ по математике, 2015*



# Задачи на делимость

- а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором?
- Например, 50 и 60 солдат. Вместе 110, их можно построить в колонну по 10 человек в ряду так, что 5 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 6 рядов — только из второго.



# Задачи на делимость

- б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?
- Пусть в первом взводе  $k$  солдат, во втором  $l$  солдат. Тогда число солдат в ряду – общий делитель  $l$  и  $k$ . Также:
$$\begin{cases} 46 < k < l \\ k + l \leq 110 \end{cases}$$
- Пусть общий делитель – 13. Тогда, учитывая, что  $46 < k < 55$ , получаем, что  $k = 52$ . Наименьшее возможное значение  $l$  равно  $52 + 13 = 65$ , но вместе получается 117 человек, что противоречит условию.

# Задачи на делимость

- в) Сколько в роте может быть солдат?

$$\begin{cases} l - k \geq 9 \\ k + l \leq 110 \end{cases} \Rightarrow 2k \leq 101 \Leftrightarrow k \leq 50$$

- в) Пусть  $d$  – наименьший общий делитель  $l$  и  $k$ ,  $d > 8$ .

$$k + d \leq l \leq 110 - k$$

$$46 < k \leq 50$$

# Задачи на делимость

$$k = 47 \Rightarrow d = 47, \quad 47 + 47 \leq 110 - 47 = 63.$$

*Противоречие*

$$k = 48 \Rightarrow d = 12, \quad l = 60$$

*В роте 108 человек*

$$k = 49 \Rightarrow 98 \leq l \leq 110 - 49 = 61$$

*Противоречие*

$$k = 50 \Rightarrow d = 10, \quad l = 60$$

*В роте 110 человек*

# Свойства чисел

- Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.
- а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?
- б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?
- в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.
- *Тренировочная работа по математике 18.12.2015*

# Свойства чисел

- а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?
- Примером таких чисел являются 5014, 5015, ..., 5033. Очень счастливыми среди них являются числа 5014, 5023 и 5032.

# Свойства чисел

- б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

- Пусть число  $1000a + 100b + 10c + d$  счастливое. Тогда счастливым будет и

$$1000a + 100b + 10c + d + 2016 = 1000(a + 2) + 100b + 10(c + 1) + d + 6$$

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a + 2 + b = c + 1 + d + 6 \end{cases}, \text{ у системы нет решений}$$

# Свойства чисел

- в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.
- Будем проверять все простые числа и искать кратные им
- 2 – 2680                      7 – 3892
- 3 – 2415
- 5 – 2415

# Свойства чисел

- Рассмотрим число  $11$

$$1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) - (b - a + d - c)$$
$$(b - a + d - c) \equiv 11$$

$$[b + d - (a + c)] \equiv 11$$

- Так как  $a, b, c, d$  – цифры, то

$$\begin{cases} b + d - (a + c) = -11(1) \\ b + d - (a + c) = 0(2) \\ b + d - (a + c) = 11(3) \end{cases}$$



# Свойства чисел

(1)

$$b + d - (a + c) = -11$$

$$\begin{cases} b + d = a + c - 11 \\ a + b = c + d \end{cases}$$

$$d - a = a - d - 11 \Leftrightarrow 2d = 2a - 11 \Leftrightarrow 2(a - d) = 11$$

- 2 не кратно 11, а-d кратно 11 только когда  $a-d=0$ , т.е.  $d=a$ , что противоречит условию

# Свойства чисел

(3)

$$b + d - (a + c) = 11$$

$$\begin{cases} b + d = a + c + 11 \\ a + b = c + d \end{cases}$$

$$d - a = a - d + 11 \Leftrightarrow 2d = 2a + 11 \Leftrightarrow 2(d - a) = 11$$

- Аналогично с предыдущим случаем

# Свойства чисел

(2)

$$b + d - (a + c) = 0$$

$$\begin{cases} b + d = a + c \\ a + b = c + d \end{cases}$$

$$d - a = a - d \Leftrightarrow a = d$$

- Также противоречит условию.
- Таким образом, не существует счастливого числа, кратного 11.