

**Лекция по алгебре.
Тема: понятие логарифма,
основные свойства
логарифмов.**

Определение.

Логарифмом числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени c , в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b , т.е. если $a^c = b$, то можно записать $\log_a b = c$.

Примеры.

1) $\log_2 32$, здесь $b = 32$, $a = 2$, $c = 5$.

$$\log_2 32 = 5, \text{ т. к. } 2^5 = 32.$$

2) $\log_5 0,04$,

здесь $b = 0,04$, $a = 5$, $c = -2$.

$$\log_5 0,04 = -2, \text{ т. к. } 5^{-2} = 1/25 = 0,04.$$

3) Найти x , такое, что $\log_8 x = 1/3$.

По определению логарифма

$$x = 8^{1/3} = 2.$$

Основное логарифмическое тождество.

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

Откуда получаем основное
логарифмическое тождество

$$(b > 0, a > 0, a \neq 1)$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Примеры.

$$1) 0,5^{\log_{0,5} 6} = 6 .$$

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{5}^{2\log_5 3} &= ((\sqrt{5})^2)^{\log_5 3} \\ &= 5^{\log_5 3} = 3. \end{aligned}$$

Свойства логарифмов.

$$1) \log_a 1 = 0.$$

$$2) \log_a a = 1.$$

$$3) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$4) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$5.1) \log_a x^p = p \cdot \log_a x.$$

$$5.2) \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

$$6) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\text{Следствие: } 1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\text{Следствие: } 2) \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b.$$

$$\text{Следствие: } 3) \log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Свойства логарифмов, примеры.

$$\begin{aligned} 1) \log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3} &= \log_2 3^3 - 2\log_2 3 + \log_2 2 - \log_2 3 = \\ &= 3\log_2 3 - 2\log_2 3 + \log_2 2 - \log_2 3 = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

Использовались свойства 4, 5.1 и 2.

$$\begin{aligned} 2) \log_{\frac{1}{3}} 2 + \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}} (4\sqrt{18}) &= \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 8^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{3}} (4\sqrt{18}) = \\ &= \log_{\frac{1}{3}} (2 \cdot 8^{\frac{1}{2}}) - \log_{\frac{1}{3}} (4 \cdot \sqrt{18}) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2 \cdot 8^{\frac{1}{2}}}{4 \cdot \sqrt{18}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

Использовались свойства 5.1, 3, 4 и 2.