

Дискретная математика

Гр. ИВТ-25Д
Хаиртденов Т.К
СФТИ НИЯУ МИФИ
г.Снежинск
2016

Справочные данные

- Кафедра АИВС (Автоматизированных информационных и вычислительных систем)
- Преподаватель Мякушко Эдуард Валерьевич
- Заведующий кафедрой Крушной Валерий Васильевич

Введение

- **Дискрётная матемáтика** — часть математики, изучающая дискретные математические структуры, такие, как графы и утверждения в логике.
- **Дискретная математика** – область математики, занимающаяся изучением дискретных структур (конечного характера), возникающие как в пределах математики, так и в ее приложениях.

Введение

- Дискретная математика – математический аппарат, заложенный в основу работы всех основных цифровых устройств.
- Студент изучающий информатику и вычислительные устройства, не может не знать дискретной математики.

Информационно - измерительная система Человек



Информационно - измерительная система Техническая

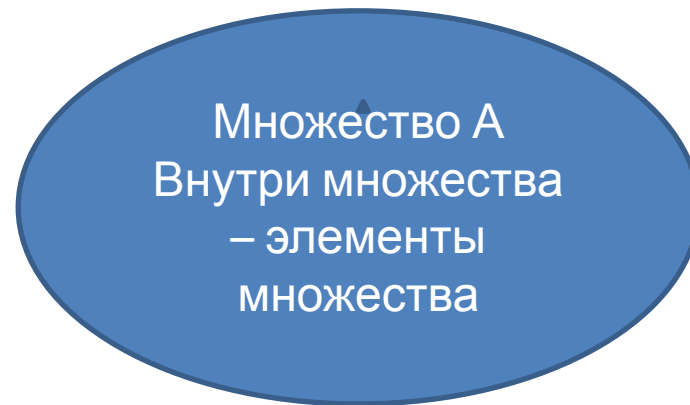


Восприятие внешнего мира информационно – измерительными системами

- Объекты который присутствуют вокруг нас (внешний мир), будем воспринимать используя математический объект – множество.
- **Мно́жество** — одно из ключевых понятий [математики](#), в частности, [теории множеств](#) и [логики](#).
- **Множество** – соединение в некое «М» определенных, хорошо различимых предметов «m» нашего созерцания или нашего мышления (которое будет называться «Элементами множества «М»»)

Мое личное определение, что есть множество.

- Множество – это совокупность различных объектов, объединенное в единое целое.



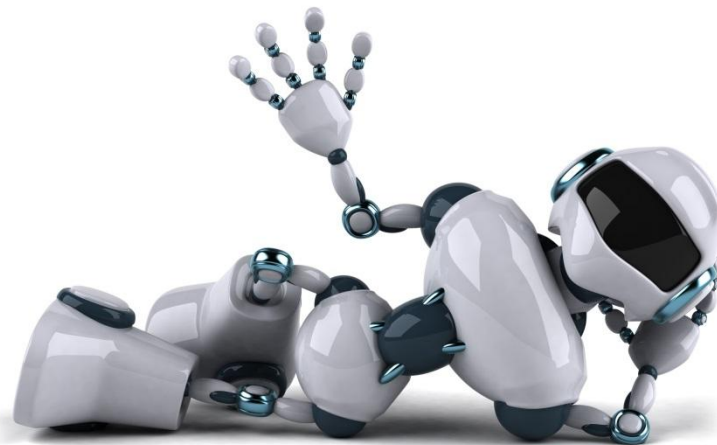
Восприятие внешнего мира роботом



Робот воспринимает внешний мир, опираясь на множества, а в множествах выделяя наличие или отсутствие элементов множества.

0 – отсутствие элемента в множестве,
1 – наличие элементов в множестве

00011110010101010101000101010010101010101001010101010101010101010101010101010101
00011110010101010101000101010010101010101010100101010101010101010101010101010101
00011110010101010101000101010010101010101010100101010101010101010101010101010101
00011110010101010101000101010010101010101010100101010101010101010101010101010101
00011110010101010101000101010010101010101010100101010101010101010101010101010101
00011110010101010101000101010010101010101010100101010101010101010101010101010101
00011110010101010101000101010010101010101010100101010101010101010101010101010101

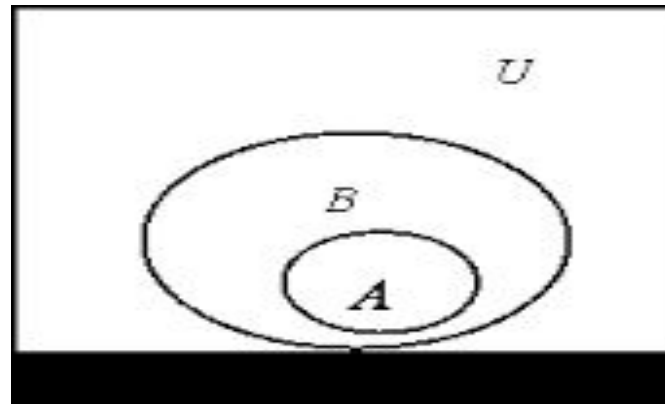


Формальное представление МНОЖЕСТВ

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $a \in A, b \in A, c \in A, d \in A$ – принадлежность элементов множеству
- $f \notin A, g \notin A, h \notin A$ – не принадлежность элементов множеству
- $|A|$ = количество элементов множества (мощность множества)
- $|A| = 4$

Пустое множество. Универсум.

- $|A| = 0$, множество A – пустое множество, т.к у него отсутствуют элементы.
Обозначение $\emptyset$.
- Универсум – универсальное множество.
Обозначается U , показывает границы в которых находятся все остальные множества.



Множество. Вектор.

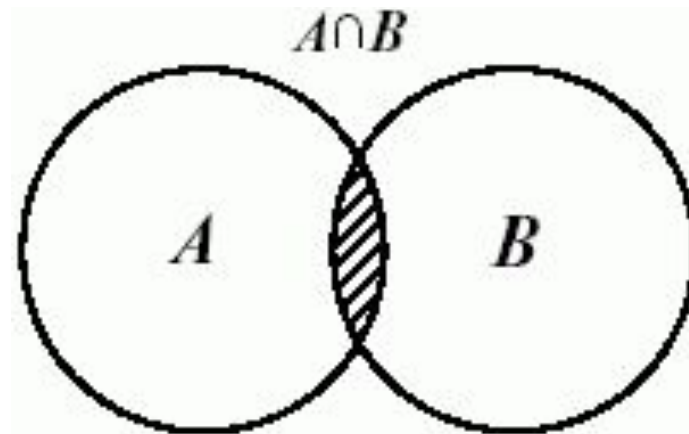
$A = \{a, b, c, d\}$, элементы множества можно перемещать. Важно наличие элемента, а не его положение. $A = \{b, c, a, d\}$

$A = (a, b, c, d)$, A – вектор, элементы вектора находятся каждый в своем месте, поэтому они называются координатами.

Координаты нельзя перемещать со своего места.

Операции над множествами.

- Взаимодействие множеств можем показать через операции над ними.
- Пересечение множеств $A \cap B$ = общие элементы

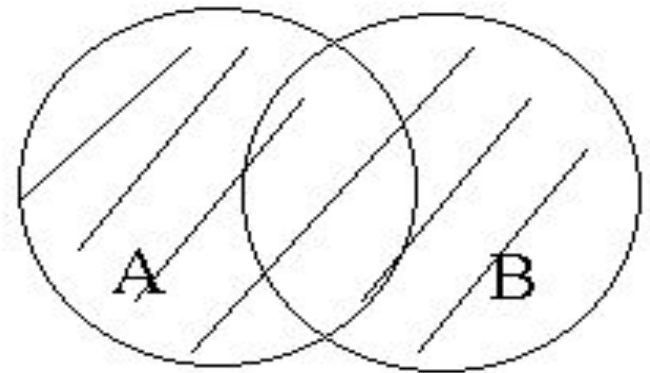


Пример пересечения МНОЖЕСТВ.

- $|U| = 10, |A| = 8, |B| = 5, |A \cap B| = 3$
- $U = \{a, b, c, d, e, r, t, y, u, q\}$
- $A = \{a, b, c, t, r, e, y, q\}$
- $B = \{a, b, c, u, d\}$
- $A \cap B = \{a, b, c\}$

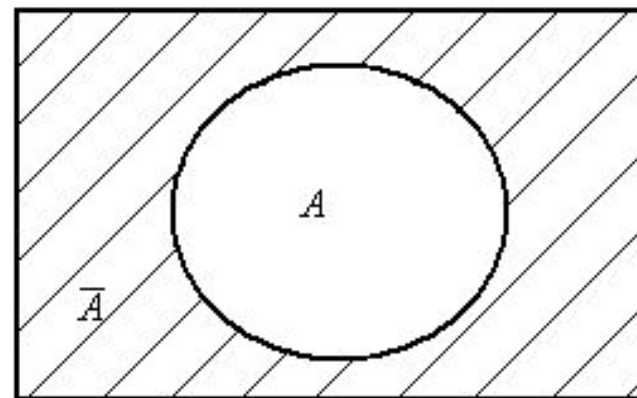
Объединение множеств.

- $|U| = 10, |A| = 8, |B| = 5 \mid A \cup B| = 10$
- $U = \{a,b,c,d,e,r,t,y,u,q\}$
- $A = \{a,b,c,t,r,e,y,q\}$
- $B = \{a,b,c,u,d\}$
- $A \cup B = \{a,b,c,t,r,e,y,q,d,u\}$



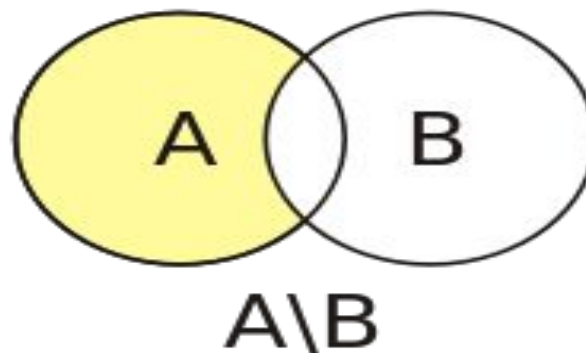
Дополнение.

- Дополнение – это элементы которые не достают до универсума
- $|U| = 10, |A| = 8$
- $U = \{a,b,c,d,e,r,t,y,u,q\}$
- $A = \{a,b,c,t,r,e,y,q\}$
- $\neg A = \{d,u\}$



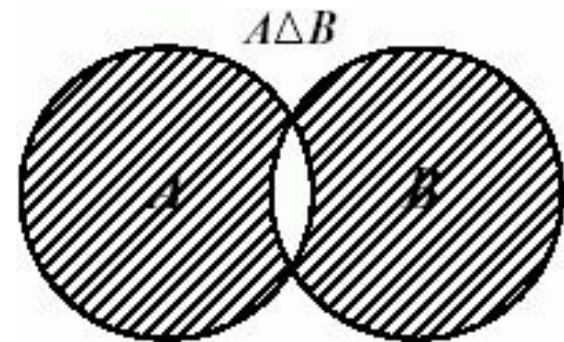
Разность множеств.

- $|U| = 10, |A| = 8, |B| = 5$
- $U = \{a,b,c,d,e,r,t,y,u,q\}$
- $A = \{a,b,c,t,r,e,y,q\}$
- $B = \{a,b,c,u,d\}$
- $A \setminus B = \{t,r,e,y,q\}$
- $B \setminus A = \{u,d\}$



Симметрическая разность.

- $|U| = 10, |A| = 8, |B| = 5$
- $A \cup B = \{a, b, c, t, r, e, y, q, d, u\}$
- $A \cap B = \{a, b, c\}$
- $A \Delta B = \{t, r, e, y, q, d, u\}$



Самостоятельная работа.

Множество подмножеств.(Булеан)

- $A = \{x, y, z\}$
- $\beta(A)$ – множество подмножеств
- $\beta(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{xy\}, \{xz\}, \{yz\}, \{x, y, z\}\}$
- $|\beta(A)| = 8 = 2^n$, где n – число элементов множества.
- Множество подмножеств - это объекты, окружающие информационно - измерительную систему(роботы)
- Робот воспринимает эти объекты через двоичные вектора

Взаимно – однозначные соответствия Булеана и

множества двоичных векторов

- $\beta(A) = \emptyset \leftrightarrow (0,0,0)$
 - $\{x\} \leftrightarrow (1,0,0)$
 - $\{y\} \leftrightarrow (0,1,0)$
 - $\{z\} \leftrightarrow (0,0,1)$
 - $\{xy\} \leftrightarrow (1,1,0)$
 - $\{xz\} \leftrightarrow (1,0,1)$
 - $\{yz\} \leftrightarrow (0,1,1)$
 - $\{x,y,z\} \leftrightarrow (1,1,1)$
- Таким образом единица показывает наличие элемента,
А ноль его отсутствие в подмножестве который является
элементом Булеана

Пример

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $\beta(A) = \emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0,)$
- $\{a, b, c, d\} \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$
- $\{a, b\} \leftrightarrow (1, 1, 0, 0)$
- $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$
- $\{a, d\} \leftrightarrow (1, 0, 0, 1)$
- $\{b, c\} \leftrightarrow (0, 1, 1, 0)$
- $\{b, d\} \leftrightarrow (0, 1, 0, 1)$
- $\{c, b\} \leftrightarrow (0, 1, 1, 0)$
- $\{a\} \leftrightarrow (1, 0, 0, 0)$
- $\{b\} \leftrightarrow (0, 1, 0, 0)$
- $\{c\} \leftrightarrow (0, 0, 1, 0)$
- $\{d\} \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$
- $\{a, b, c\} \leftrightarrow (1, 1, 1, 0)$
- $\{a, b, d\} \leftrightarrow (1, 1, 0, 1)$
- $\{d, b, c\} \leftrightarrow (0, 1, 1, 1)$
- $\{a, c, d\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 1)$

Взаимодействие объектов показывается через операции над подмножествами

- $\beta(A) = \emptyset \leftrightarrow (0,0,0)$
- $\{x\} \leftrightarrow (1,0,0)$
- $\{y\} \leftrightarrow (0,1,0)$
- $\{z\} \leftrightarrow (0,0,1)$
- $\{xy\} \leftrightarrow (1,1,0)$
- $\{xz\} \leftrightarrow (1,0,1)$
- $\{yz\} \leftrightarrow (0,1,1)$
- $\{x,y,z\} \leftrightarrow (1,1,1)$
- $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset \leftrightarrow (1,0,0) * (0,1,0) = (0,0,0)$
- $\{x,y\} \cup \{z,x\} = \{x,y,z\} \leftrightarrow (1,1,0) + (1,0,1) = (1,1,1)$ (дизъюнкция -max)
- $\neg\{z\} = \{x,y\} \leftrightarrow \neg(0,0,1) = (1,1,0)$ (отрицание)
- Операции пересечения, объединения и дополнения являются Булевыми операциями над подмножествами.

Пример №2

- $A = \{a,b,c,d\}$
- $\beta(A) = \emptyset \leftrightarrow (0,0,0,0)$
- $\{a,b,c,d\} \leftrightarrow (1,1,1,1)$
- $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset \leftrightarrow (1,1,0,0) * (0,0,1,1) = (0,0,0,0)$
- $\{a,c\} \cup \{b,d\} = \{a,b,c,d\} \leftrightarrow (1,0,1,0) * (0,0,1,1) = (0,0,0,0)$
- $\neg\{d\} = \{a,b,c\} \leftrightarrow \neg(0,0,0,1) = (1,1,1,0)$

Опреации над множествами (подмножествами) обладают определенными свойствами

№	Множества	Переменные логических функций
1	Коммутативность $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$	$X_1 * X_2 = X_2 * X_1$; $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$
2	Ассоциативность $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;	$(X_1 * X_2) * X_3 = X_1 (X_2 * X_3)$ $(X_1 + X_2) + X_3 = X_1 + (X_2 + X_3)$
3	Дистрибутивность $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(X_1 * X_2) + X_3 = (X_1 + X_3) * (X_2 + X_3)$; $(X_1 + X_2) * X_3 = (X_1 * X_3) + (X_2 * X_3)$;
4	Закон Де Моргана $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$; $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$	$\neg(X_1 * X_2) = \neg X_1 + \neg X_2$ $\neg(X_1 + X_2) = \neg X_1 * \neg X_2$
5	Объединение множества $A \cup A = A$	$X_1 + X_1 = X_1$
6	Пересечение множества $A \cap A = A$	$X_1 * X_1 = X_1$
7	Объединение с дополнением множества $A \cup \neg A = U$	$X_1 + \neg X_1 = 1$
8	Пересечение с дополнением $A \cap \neg A = \emptyset$	$X_1 * \neg X_1 = 0$
9	Объединение с универсумом $A \cup U = U$	$X_1 + 1 = 1$
10	Пересечение с универсумом $A \cap U = A$	$X_1 * 1 = X_1$

Взаимно – однозначные соответствия для построения цифровых технических систем

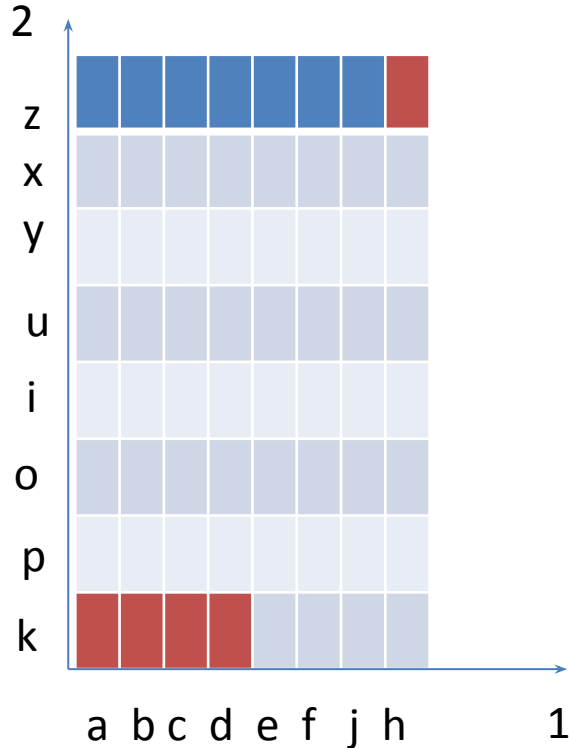
- $(\beta(A), \cup, \cap, -)$
- $\updownarrow \quad \updownarrow \updownarrow \updownarrow$
- $(B^n, +, *, \neg)$
- $\updownarrow \quad \updownarrow \updownarrow \updownarrow$
- $(P(n), +, *, \neg)$
- где $\beta(A)$ – множество подмножеств; B^n -
множество двоичных векторов длины n ; $P(n)$ -
множество переменных логических функций
где n - количество переменных.

Операции над переменными логических функций.

$X_1 X_2$	Const 0	$X_1 * X_2$	$\neg(X_1 * X_2)$	$X_1 + X_2$	$\neg(X_1 + X_2)$	$X_1 \rightarrow X_2$	$\neg(X_1 \rightarrow X_2)$
00	0	0	1	0	1	1	0
01	0	0	1	1	0	1	0
10	0	0	1	1	0	0	1
11	0	1	0	1	0	1	0

$X_2 \rightarrow X_1$	$\neg(X_2 \rightarrow X_1)$	$X_1 \equiv X_2$	$\neg(X_1 \equiv X_2)$	X_1	$\neg X_1$	X_2	$\neg X_2$	Const 1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1

Отношения



$A = \{a, b, c, d, e, f, j, h\}$

$B = \{z, x, y, u, i, o, p, k\}$

$A \times B$ - произведение множеств (Декартово произведение)

$|A \times B| = 64$

$A \times B = \{(a, k), (b, k), (c, k), (d, k), \dots, (e, z), (f, z), (j, z), (h, z)\}$

Relation – отношение, это множество

показывающее отношение между

элементами множеств входящих в прямое

произведение. Обозначается R , находится

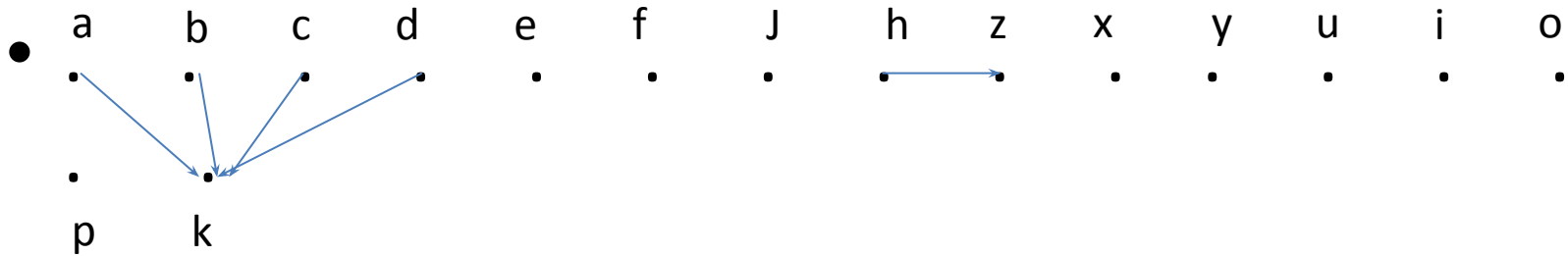
внутри границ $A \times B$ являющегося

универсумом. Пример: $|R| = 5$; $R =$

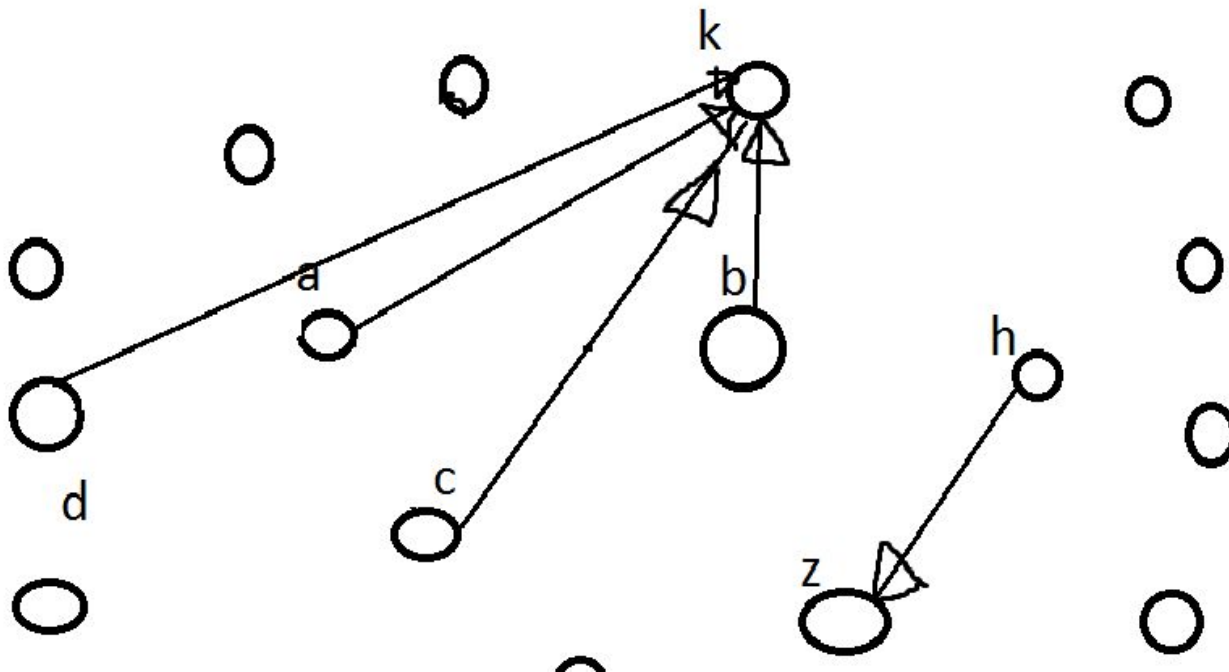
$\{(a, k), (b, k), (c, k), (d, k), (h, z)\}$. $|R| = |A \times B|$ - полное

отношение; $|R| = 0$ – пустое отношение.

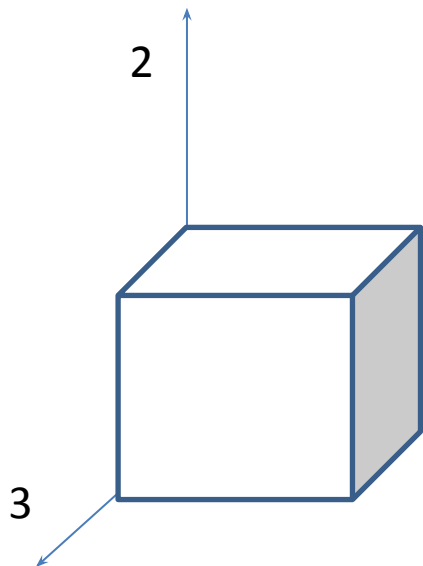
Графическое изображение отношений (граф)



Граф – топологический объект, расположение вершин графа не фиксировано, а фиксировано лишь связь между вершинами (элементами множеств)являющимися отношением



Отношение на прямом произведении $A \times B \times C$



$A = \{a, b, c\}$, расположено на оси 1

$B = \{x, y, z\}$, расположено на оси 2

$C = \{p, o, h\}$, расположено на оси 3

$$|A \times B \times C| = 27$$

$A \times B \times C = \{(a, x, p), (a, x, o), (a, x, h), (b, x, p), (b, x, o), (b, x, h), (c, x, p), (c, x, o), (c, x, h), (a, y, p), (a, y, o), (a, y, h), (b, y, p), (b, y, o), (b, y, h), (c, y, p), (c, y, o), (c, y, h), (a, z, p), (a, z, o), (a, z, h), (b, z, p), (b, z, o), (b, z, h), (c, z, p), (c, z, o), (c, z, h)\}$

Примеры отношения на прямом произведении $A \times B \times C$

- $R \subseteq A \times B \times C$
- $|R|=8, R = \{(a,x,p), (a,x,o), (a,x,h), (b,x,p), (b,x,o),$
 $(b,x,h), (c,x,p), (c,x,o)\}$

Операции над отношениями

- $R_1 \subseteq A \times B$, $|A| = 5$, $|B| = 5$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{f, i, j, h, k\}$
- $R_2 \subseteq A \times B$, $|R_1| = 12$, $|R_2| = 12$

R_1	f	i	j	h	k
a	0	0	1	1	1
b	1	0	1	0	1
c	1	1	0	0	0
d	0	0	1	1	0
e	1	0	0	0	0

R_2	f	i	j	h	k
a	0	1	0	0	1
b	1	0	1	1	1
c	1	0	1	0	0
d	0	0	1	0	1
e	1	0	1	0	1

$R_1 \cap R_2$	f	i	j	h	k
a	0	0	0	0	1
b	1	0	1	0	1
c	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0
e	1	0	0	0	0

Обратное отношение.

- R^{-1} – обозначение обратного отношения.
- $R = \{(a,b), (c,d), (e,f), (i,j)\}$
- $R^{-1} = \{(b,a), (d,c), (f,e), (j,i)\}$
- Т.о отношение осуществляется в «обратную» сторону

Композиция отношений.

- $R_1 \subseteq A \times B$
- $R_3 \subseteq B \times C$
- $R_1 \subseteq A \times B$
- $R_1 \circ R_3$ - обозначение операции.
- $R_1 \circ R_3 \subseteq A \times C$, таким образом операция композиция позволяет перейти в другой универсум («расширить» действие отношений).

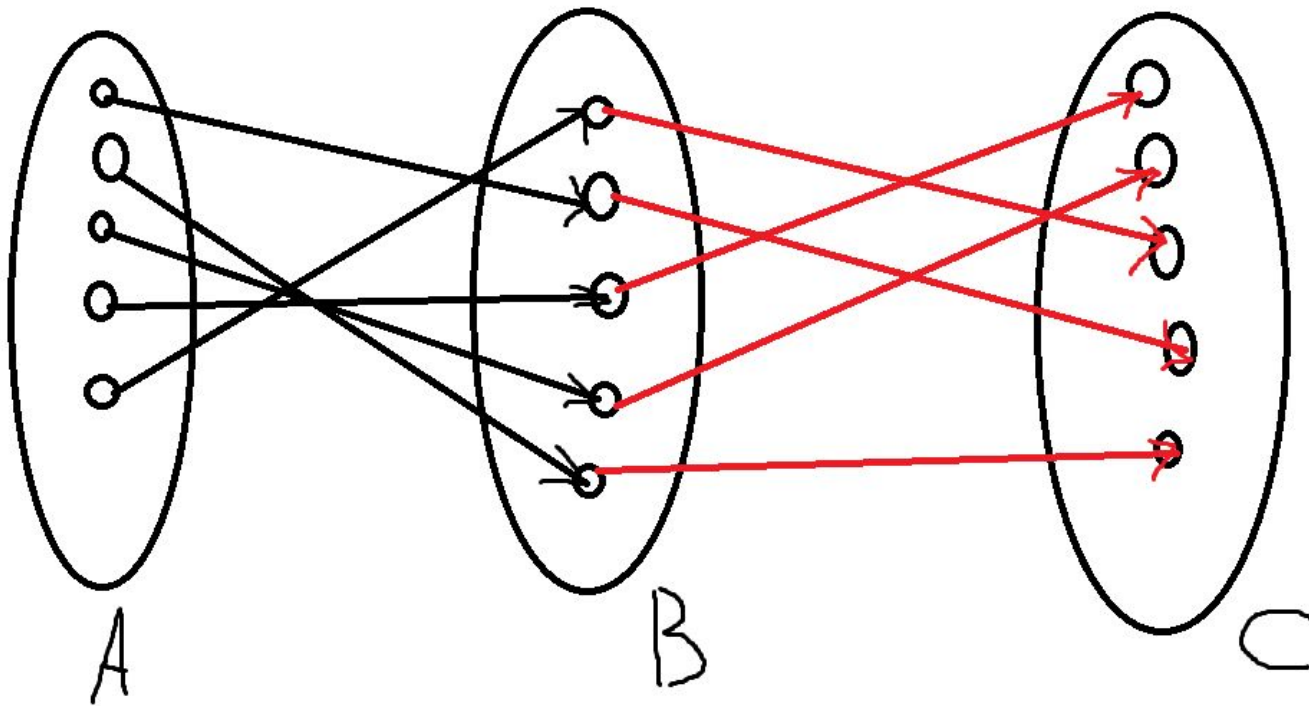
$$|C| = 5, C = \{q, w, e, r, t\}, |R_3| = 14$$

R_1	f	i	j	h	k
a	0	0	1	1	1
b	1	0	1	0	1
c	1	1	0	0	0
d	0	0	1	1	0
e	1	0	0	0	0

R_3	q	w	e	r	t
f	1	0	0	0	1
i	1	1	1	0	0
j	0	1	0	1	1
h	1	0	1	0	1
k	1	0	1	1	0

$R_1 \circ R_3$	q	w	e	r	t
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	1	1	1	0	1
d	1	1	1	1	1
e	1	0	0	0	1

Графическое изображение операции композиции.



Отношения на прямом произведении Булеана.

- $R \subseteq \beta(A) \times \beta(A)$, где $A = \{x, y, z\}$, R - пересечение

R	$\emptyset$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{y,z\}$	$\{x,y,z\}$
$\emptyset$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{x\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{y\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{z\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{x,y\}$	0	1	1	0	1	1	1	1
$\{x,z\}$	0	1	0	1	1	1	1	1
$\{y,z\}$	0	0	1	1	1	1	1	1
$\{x,y,z\}$	0	1	1	1	1	1	1	1

Контрольная работа №2

- $R_1 \subseteq A \times B$
- $R_2 \subseteq A \times B$
- $R_3 \subseteq B \times C$
- $|A| = |B| = |C| = 10; |R_1| = 70, |R_2| = 80$
- $|R_3| = 60$
- Выполнить операции над отношениями
- Сформировать отдельный файл (в свою папку группы)
- Единицы в произвольном порядке

Переменные логических функций.

Операции над переменными логических функций.

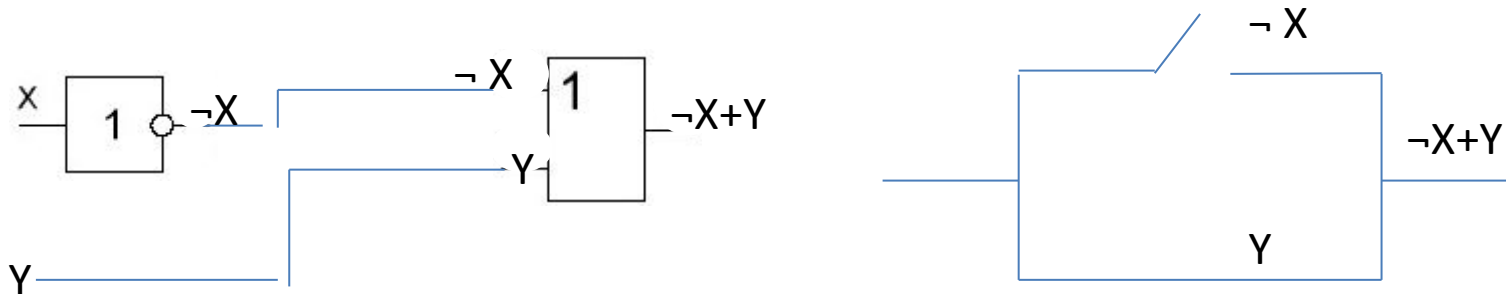
Операция	Отрицание операции
Const 1; K_1	Const 0; K_0
Конъюнкция $X \bullet Y$	Отрицание конъюнкции $\neg(X \bullet Y)$; штрих Шеффера $X Y$
Дизъюнкция $X + Y$	Отрицание дизъюнкции $\neg(X + Y)$; стрелка Пирса $X \downarrow Y$
Импликация $X \rightarrow Y$	Отрицание импликации $\neg(X \rightarrow Y)$
Обратная импликация $Y \rightarrow X$	Отрицание обратной импликации $\neg(Y \rightarrow X)$
Равнозначность (эквивалентность) $X \equiv Y$	Неравнозначность $\neg(X \equiv Y)$; Сложение по модулю 2 $X \oplus Y$
Переменная X	Отрицание переменной $\neg X$
Переменная Y	Отрицание переменной $\neg Y$

XY	K_1	K_0	$X \bullet Y$	$\neg (X \bullet Y);$	$X + Y$	$\neg (X + Y)$	$X \rightarrow Y$	$\neg (X \rightarrow Y)$	$Y \rightarrow X$	$\neg (Y \rightarrow X)$	$X \equiv Y$	$X \oplus Y$	X	$\neg X$	Y	$\neg Y$
00	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
01	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
10	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
11	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

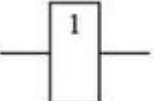
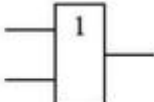
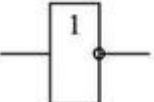
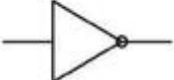
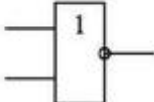
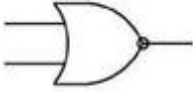
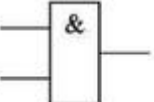
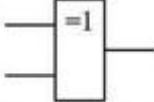
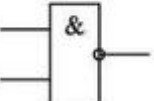
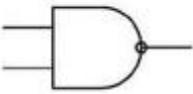
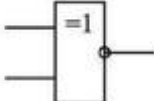
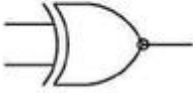
Любую операцию над переменными логических функций мы можем представить через Булевый базис($\bullet$, $+$, $\neg$).

XY	$X \rightarrow Y$	$\neg X + Y$
00	1	1
01	1	1
10	0	0
11	1	1

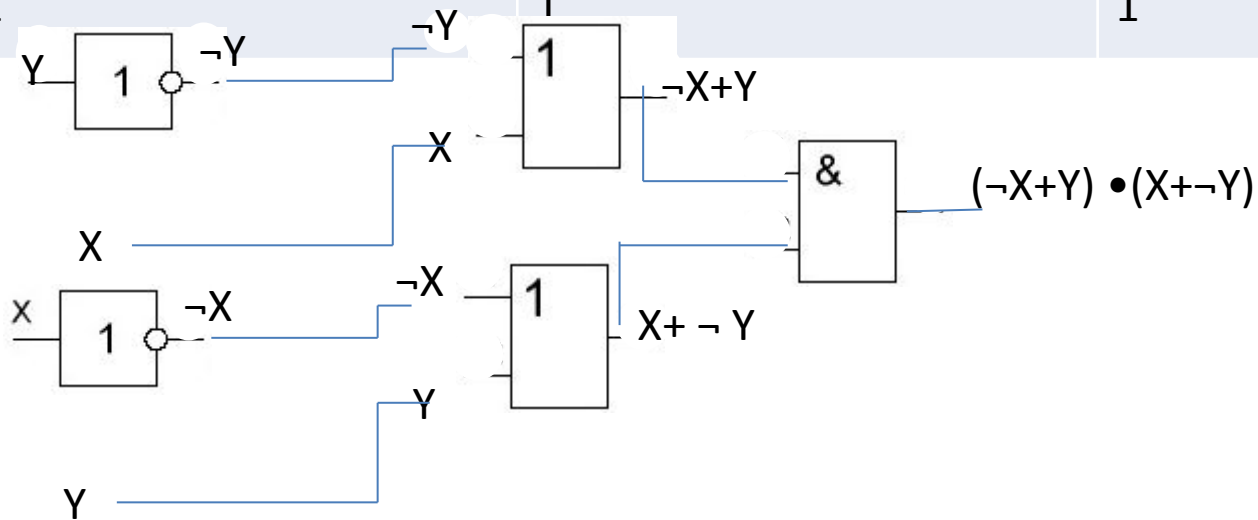
Это позволяет использовать в вычислительных системах минимальное количество логических элементов.



Схемное изображение логических элементов.

ГОСТ	ANSI	ГОСТ	ANSI
 Буфер	 BUF	 ИЛИ	 OR
 Инвертор	 INV	 ИЛИ-НЕ	 NOR
 И	 AND	 Исключающее ИЛИ	 XOR
 И-НЕ	 NAND	 Исключающее ИЛИ-НЕ	 XNOR

XY	$X \equiv Y$	$(\neg X + Y) \bullet (X + \neg Y)$
00	1	1
01	0	0
10	0	0
11	1	1



Операция эквивалентность
реализованная в Булевом базисе с
помощью релейно-контактной схемы.

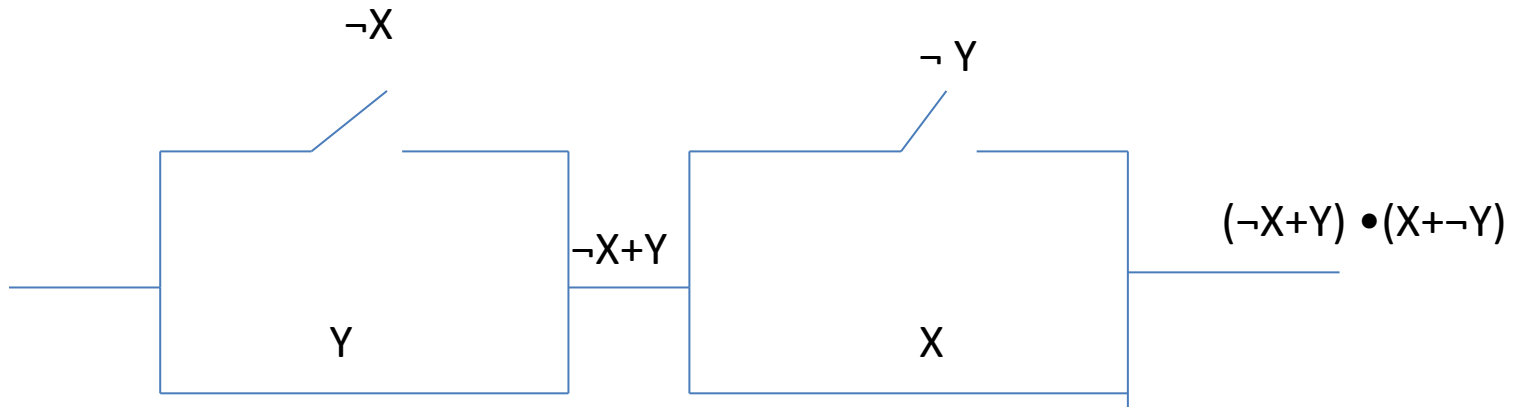


Таблица истинности (переключательная таблица)

- С помощью таблиц истинности получаем результат логической функции для любого числа переменных.
- Пример: $F(x,y,z)=x \bullet (y \rightarrow \neg z) + (x \equiv \neg y)$

Решение функций с помощью таблицы истинности.

- $F(x,y,z)=x \bullet (y \rightarrow \neg z) + (x \equiv \neg y)$

xyz	$\neg z$	$y \rightarrow \neg z$	$\neg y$	$x \equiv \neg y$	$x \bullet (y \rightarrow \neg z)$	$x \bullet (y \rightarrow \neg z) + (x \equiv \neg y)$
000	1	1	1	0	0	0
001	0	1	1	0	0	0
010	1	1	0	1	0	1
011	0	0	0	1	0	1
100	1	1	1	1	1	1
101	0	1	1	1	1	1
110	1	1	0	0	1	1
111	0	0	0	0	0	0

Решение представленное в таблице можно представить в Булевом базисе в виде СДНФ(совершенные дизъюнктивной нормальной формы

Решение функций с помощью таблицы истинности.

- $F(x,y,z)=x \bullet (y \rightarrow \neg z) + (x \equiv \neg y)$

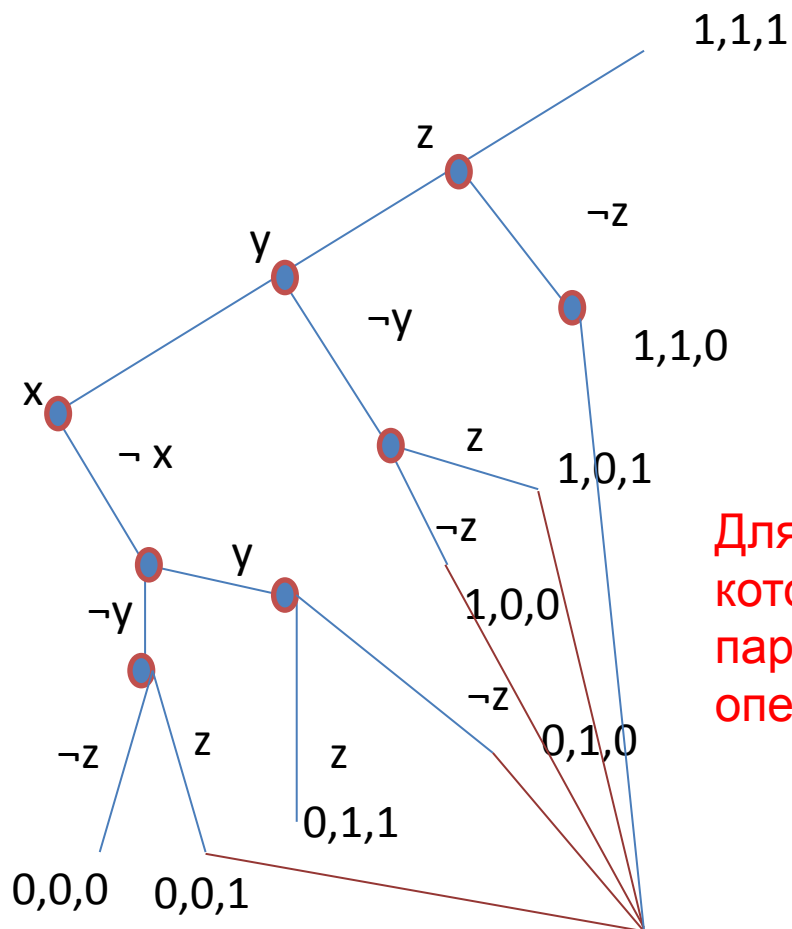
xyz	$x \bullet (y \rightarrow \neg z) + (x \equiv \neg y)$
000	0
001	0
010	1
011	1
100	1
101	1
110	1
111	0

СДНФ включает в себя те наборы переменных на которых получен результат 1.

5 наборов т.к. 5 единиц

$$\neg xy \neg z + xyz + x \neg y \neg z + x \neg yz + xy \neg z$$

Схемная реализация вычисления логической функции от 3х переменных с помощью рэлейно – контактной схемы (веник).



Для решения СДНФ необходимы наборы, на которых получили единицу включить параллельно. Параллельное соединение – операция конъюнкция.

$$\neg xy \neg z + xyz + x \neg y \neg z + x \neg yz + xy \neg z$$

	$(z \bullet y)$	$(x \bullet c)$	$(x \bullet c)$	$((x \bullet c) \bullet (z \bullet y))$	$(c \bullet y)$	$(c \bullet y)$	$((c \bullet y) \bullet ((x \bullet c) \bullet (z \bullet y))) \equiv ((\neg c) + (\neg y))$
0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0

x,y,z,c	$(\Gamma(x+c)) \rightarrow ((z \bullet y)) \equiv ((\Gamma c) + (\Gamma y))$
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	0
0110	1
0111	0
1000	1
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	0
1110	1

x,y z,c	00	01	11	10
00	0	0	1	0
10	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	1

Сднф: $xy \neg z \neg c + \neg x \neg y \neg z \neg c$

Данное сднф можно минимизировать.

Правило: заключаем единицы в квадратной таблице в контур (единицы располагаются рядом, вертикально или горизонтально). $S_k =$ площадь контура (количество единиц, заключенных в контур) S_k где m - количество переменных, i - целое число от $(0..m)/$ В нашем примере $2^{4-1} = 2^3 = 8;$

z,c \ x,y				
	00	01	11	10
00	0	0	1	0
10	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	1

z,c \ x,y	x,y			
	00	01	11	10
00	0	0	1	0
10	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	1

В зеленый контур входят: $\neg x y \neg z \neg c + \neg x \neg y \neg z \neg c$

количество сохраняемых переменных в контуре $n = \log_2 S_k = 1$

$$\neg x y \neg z \neg c + \neg x \neg y \neg z \neg c = \neg x y \neg z \neg c + \neg x \neg z \neg c$$

В синий контур входят: $\neg x \neg y \neg z \neg c + \neg x \neg y \neg z c + \neg x \neg y z c + \neg x \neg y z \neg c$

количество сохраняемых переменных в контуре $n = \log_2 S_k = 2$

$$\neg x \neg y \neg z \neg c + \neg x \neg y \neg z c + \neg x \neg y z c + \neg x \neg y z \neg c = \neg x \neg y$$

В фиолетовый контур входят: $\neg x \neg y \neg z c + \neg x \neg y z c$

количество сохраняемых переменных в контуре $n = \log_2 S_k = 1$

$$\neg x \neg y \neg z c + \neg x \neg y z c = \neg x \neg y c$$

В желтый контур входят: $\neg x \neg y z \neg c + \neg x y z \neg c$

количество сохраняемых переменных в контуре $n = \log_2 S_k = 2$

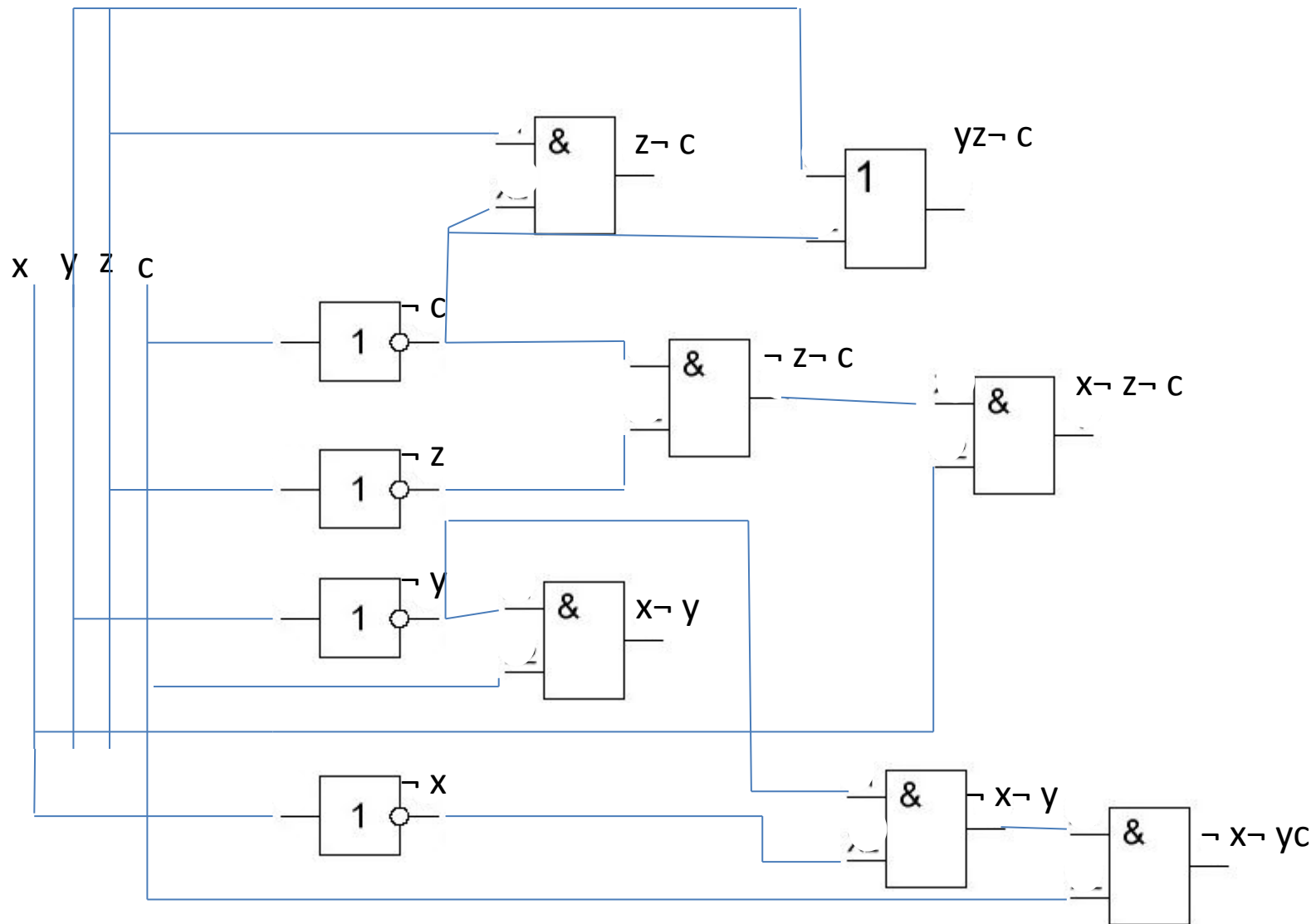
СДНФ:

$xy\bar{z}\bar{c} \cup x\bar{y}\bar{z}\bar{c} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z}c \cup x\bar{y}\bar{z}c \cup \bar{x}yzc \cup x\bar{y}zc \cup \bar{x}yz\bar{c} \cup xyz\bar{c} \cup$
 $x\bar{y}z\bar{c}$

Минимизированная СДНФ: $x\bar{z}\bar{c} + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}c + xz\bar{c} + yz\bar{c}$

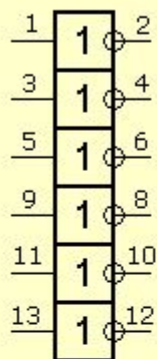
Решим минимизированную с помощью логических элементов



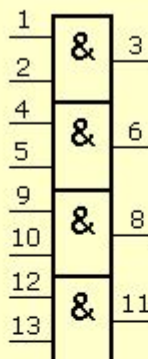


Логические элементы с большим количеством входов.

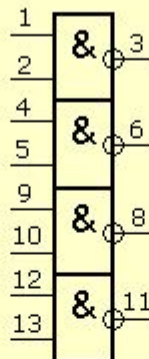
К155ЛН1
К561ЛН2



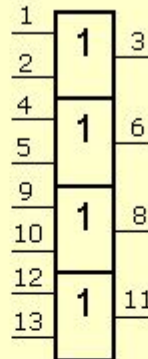
К155ЛИ1



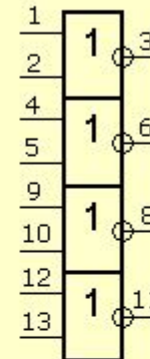
К155ЛА3
К155ЛА8



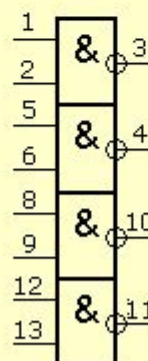
К155ЛЛ1



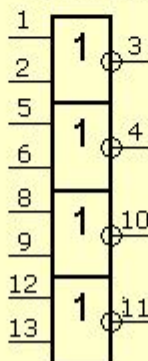
К155ЛЕ1



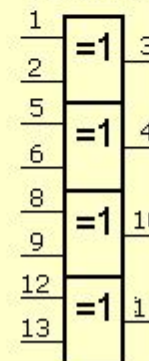
К561ЛА7
К176ЛА7



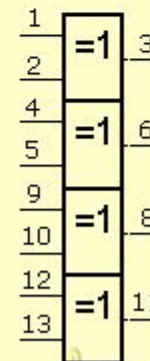
К561ЛЕ5
К176ЛЕ5



К561ЛП2
К176ЛП2



К155ЛП5

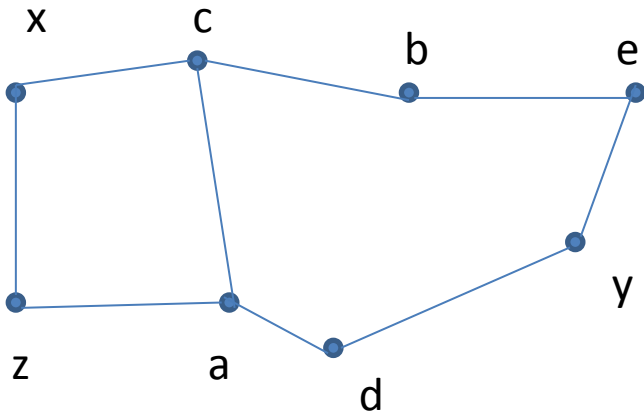


Графы.

- Граф состоит из множества вершин и множества ребер (ребра соединяют вершины или одну вершину).
- Если ребра имеют ориентацию (вход и выход), значит граф ориентированный, если не имеют, значит граф не ориентированный.
- Граф – есть топологический объект – расположение вершин не фиксировано (располагаются где угодно), фиксируются лишь соединения вершин ребрами.

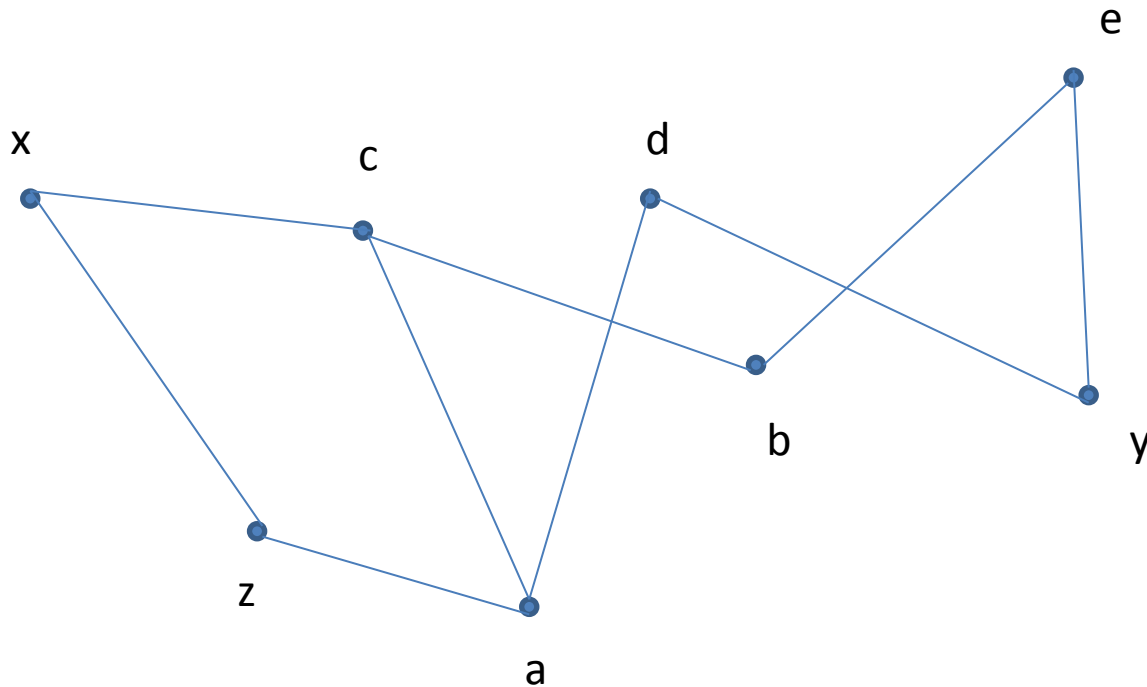
Неориентированный граф.

$A=\{x,y,z,c,a,b,d,e\}$ – множество вершин.



$B=\{\{x,z\},\{x,c\},\{c,b\},\{b,e\},\{e,y\},\{y,d\},\{d,a\},\{a,z\},\{c,a\}\}$ – множество ребер.

При изменении вершин топология графа не изменяется.



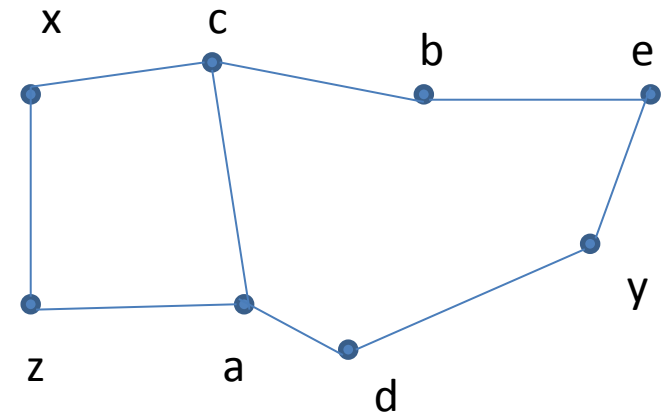
$B=\{x,z\},\{x,c\},\{c,b\},\{b,e\},\{e,y\},\{y,d\},\{d,a\},\{a,z\},\{c,a\}$

Задание графа с помощью отношения смежности.

- Отношение смежности отношение между вершинами графа. Если вершины графа соединены ребром, они связаны отношением смежности.
- R - отношение смежности.
- $R \subseteq A \times B$

Зададим неориентированный граф через отношение смежности.

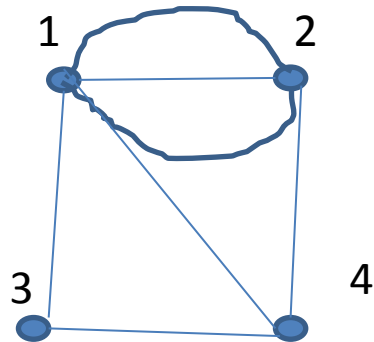
R	x	y	z	a	b	c	d	e
x	0	0	1	0	0	1	0	0
y	0	0	0	0	0	0	1	1
z	1	0	0	1	0	0	0	0
a	0	0	1	0	0	1	1	0
b	0	0	0	0	0	1	0	0
c	1	0	0	1	1	0	0	0
d	0	1	0	1	0	0	0	1
e	0	1	0	0	1	0	0	0



$V = \{\{x, z\}, \{x, c\}, \{c, b\}, \{b, e\}, \{e, y\}, \{y, d\}, \{d, a\}, \{a, z\}, \{c, a\}\}$ – множество ребер.

Если в главной диагонали будут одни единицы, вершины будут иметь ребра в виде петли.

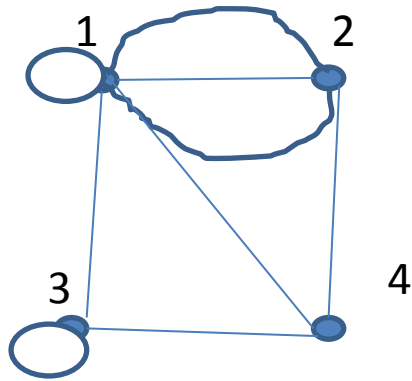
Неориентированный мульти-граф, отношении смежности.



R	1	2	3	4
1	0	3	1	1
2	3	0	0	1
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

Мультиграф допускает кратные ребра, но не допускает петли.
Псевдограф допускает и кратные ребра, и петли.

Неориентированный псевдо-граф, отношении смежности.

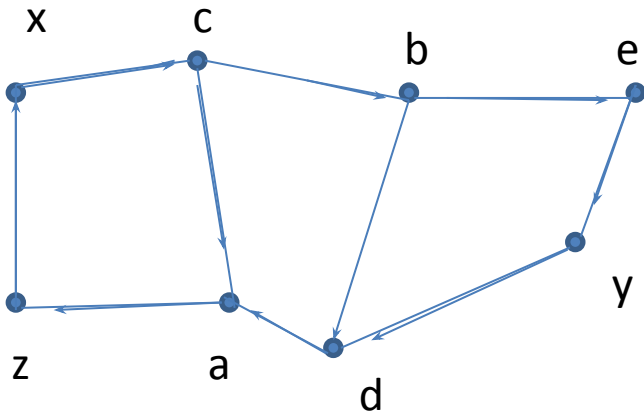


R	1	2	3	4
1	1	3	1	1
2	3	0	0	1
3	1	0	1	1
4	1	1	1	0

Мультиграф допускает кратные ребра, но не допускает петель.
Псевдограф допускает и кратные ребра, и петли.

Ориентированный граф.

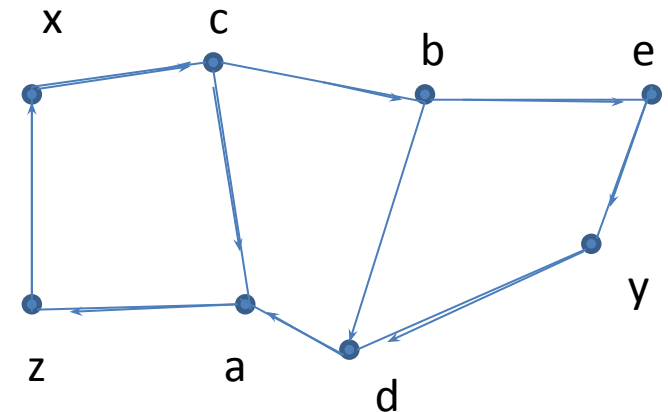
$A=\{x,y,z,c,a,b,d,e\}$ – множество вершин.



$B=\{(z,x),(x,c),(c,b),(b,e),(e,y),(y,d),(d,a),(a,z),(c,a)(b,d)\}$ – множество ребер.

Зададим ориентированный граф через отношение смежности.

R	x	y	z	a	b	c	d	e
x	0	0	0	0	0	1	0	0
y	0	0	0	0	0	0	1	0
z	1	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	1	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	1	1
c	0	0	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	1	0	0	0	0
e	0	1	0	0	0	0	0	0

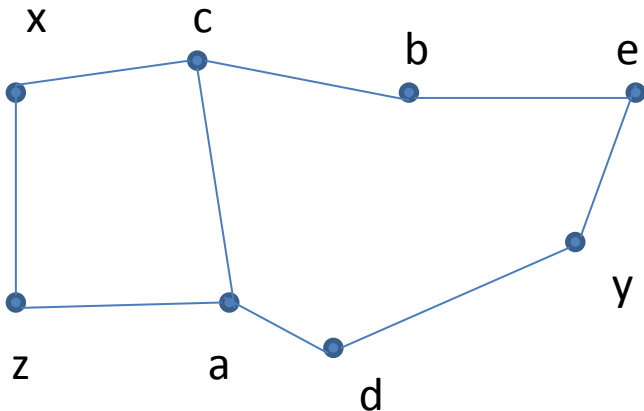


$V = \{(x,z), (x,c), (c,b), (b,e), (e,y), (y,d), (d,a), (a,z), (c,a), (b,d)\}$ – множество ребер.

Если в главной диагонали будут одни единицы, вершины будут иметь ребра в виде петли.

Неориентированный граф. Можем задать через отношение инцидентности.

$A=\{x,y,z,c,a,b,d,e\}$ – множество вершин.



$B=\{\{x,z\},\{x,c\},\{c,b\},\{b,e\},\{e,y\},\{y,d\},\{d,a\},\{a,z\},\{c,a\}\}$ – множество ребер.

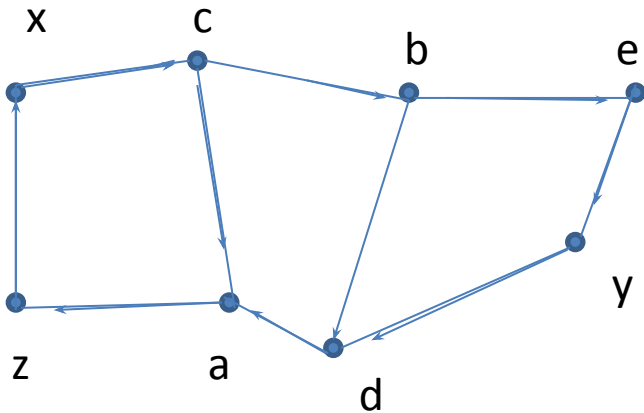
Зададим граф с помощью ОТНОШЕНИЯ ИНЦИДЕНТНОСТИ.

- R - отношение инцидентности.
- $R \subseteq A \times B$ (отношение инцидентности - отношение между вершинами и ребрами)

R	x	y	z	a	b	c	d	e
{xz}	1	0	1	0	0	0	0	0
{zc}	0	0	1	0	0	1	0	0
{cb}	0	0	0	0	1	1	0	0
{be}	0	0	0	0	1	0	0	1
{ey}	0	1	0	0	0	0	0	1
{yd}	0	1	0	0	0	0	1	0
{da}	0	0	0	1	0	0	1	0
{az}	0	0	1	1	0	0	0	0
{ca}	0	0	0	1	0	1	0	0

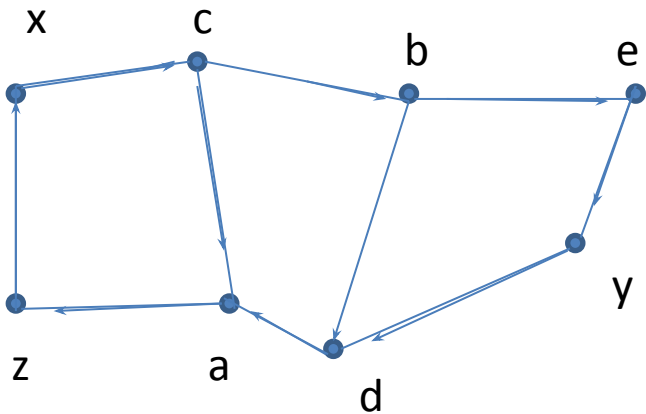
Ориентированный граф

$A=\{x,y,z,c,a,b,d,e\}$ – множество вершин.



$B=\{(z,x),(x,c),(c,b),(b,e),(e,y),(y,d),(d,a),(a,z),(c,a)(b,d)\}$ – множество ребер.

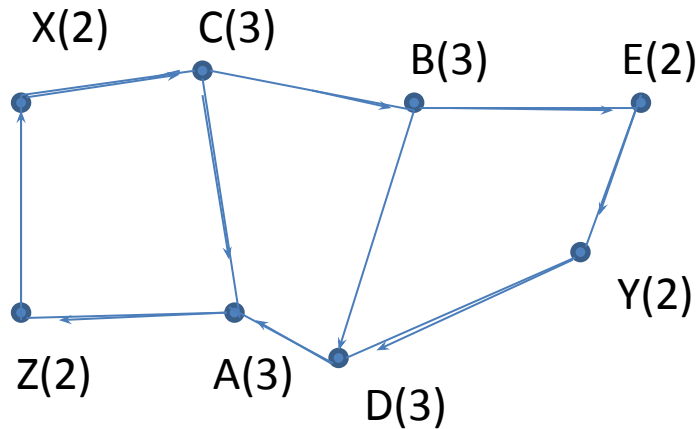
Зададим орграф через отношение ИНЦИДЕНТНОСТИ.



R	x	y	z	a	b	c	d	e
(xz)	1	0	-1	0	0	0	0	0
(zc)	0	0	1	0	0	-1	0	0
(cb)	0	0	0	0	1	-1	0	0
(be)	0	0	0	0	1	0	0	-1
(ey)	0	1	0	0	0	0	0	-1
(yd)	0	1	0	0	0	0	-1	0
(da)	0	0	0	1	0	0	-1	0
(az)	0	0	1	-1	0	0	0	0
(ca)	0	0	0	1	0	-1	0	0
(bd)	0	0	0	0	1	0	-1	0

Числа характеризующие граф.

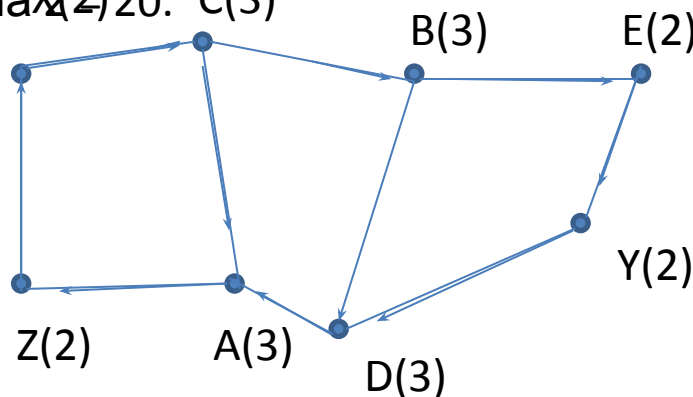
- Степенью вершины называется количество ребер, выходящих из этой вершины. Если это количество четно, то вершина называется четной, в противном случае вершина называется нечетной.



В скобках возле вершины расставлены ее степени.

Теорема о степенях вершин в теории графов.

- Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству всех ребер.
- Доказательство. **Степень вершины** — это количество концов ребер, сходящихся в этой вершине. Поэтому сумма степеней всех вершин графа равна количеству всех концов ребер, которые есть в графе. Но у каждого ребра ровно два конца, значит общее количество ребер в два раза меньше количества концов всех ребер, откуда и получаем утверждение теоремы.
- Проверим на примере. Сумма степеней = 20, количество ребер умноженное на 2 = 20.

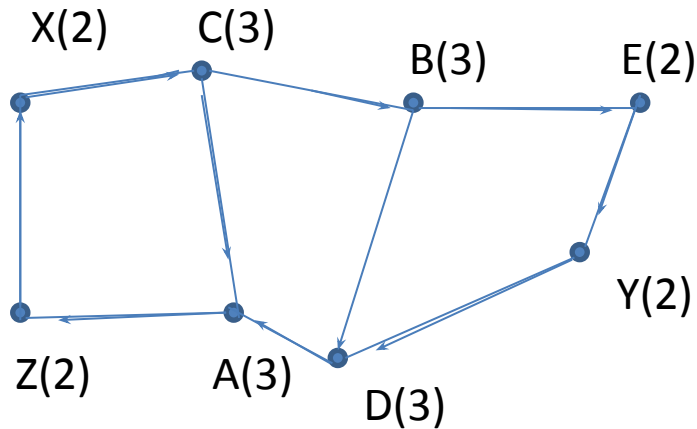


Цикломатическое число.

- **Цикломатическим числом графа** - называется число $\mu = N - n + p$, где N - число ребер графа, n – число его вершин, P – число компонент связности. Для связного графа $\mu = N - n + 1$.
- **Компонента связности графа** — некоторое множество вершин графа такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.
- **Путь в графе** — последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром.

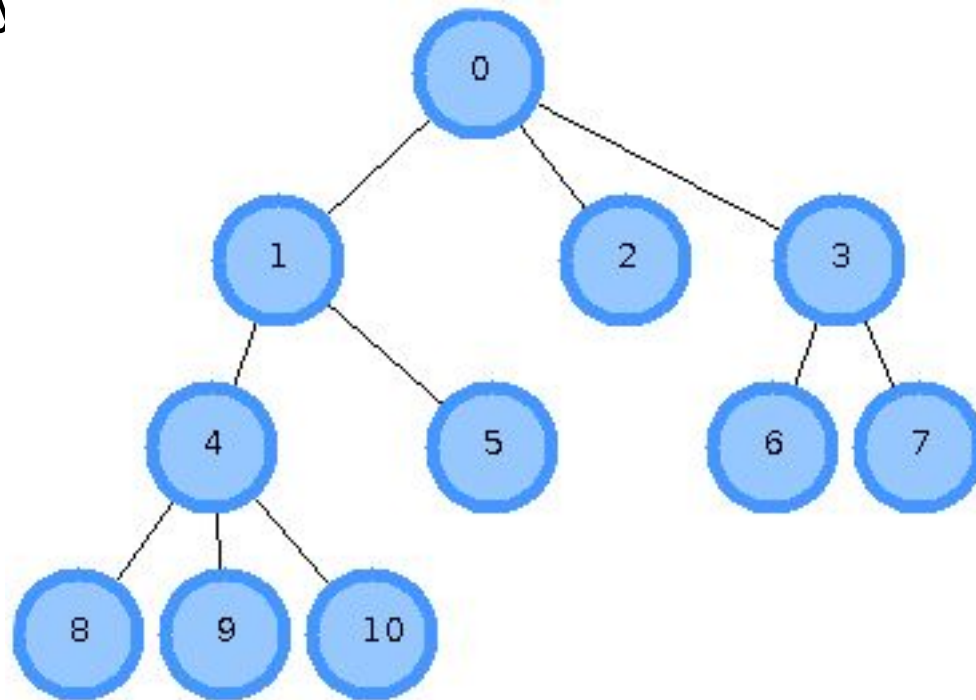
Найдем путь орг. графа

- $(x, c, b, e, y, d, a, z, x)$
- (x, c, a, z, x)
- (x, c, b, d, a, z, x)



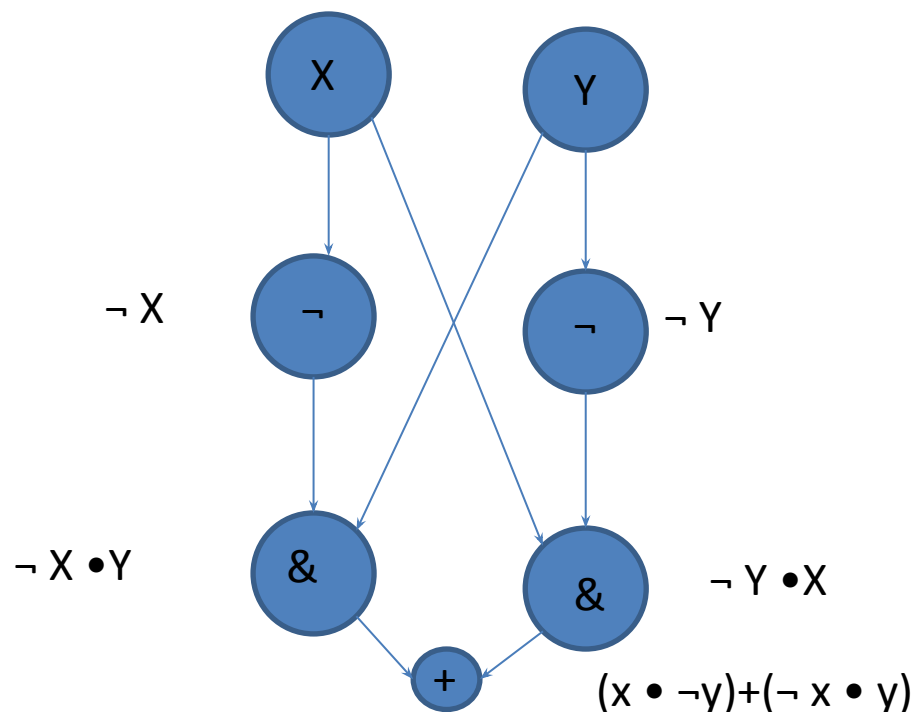
Цикломатическое число позволяет перейти к графу который называется деревом.

- Цикломатическое число связного графа можно определить как число ребер, которое нужно удалить, чтобы граф стал деревом.
- **Дерево** — это связный ациклический граф. Связность означает наличие путей между любой парой вершин, ацикличность — отсутствие циклов и то, что между парами вершин имеется только по одному пути.



Граф дерева используется для моделирования операций над переменными логических функций

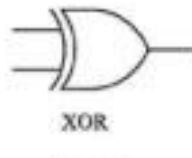
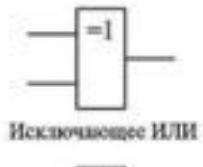
- $F(x,y)=x \oplus y = \neg((\neg x + y) \cdot (x + \neg y)) =$
- $= \neg(\neg x + y) + \neg(x + \neg y) = (\neg \neg x \cdot \neg y) + (\neg x \cdot \neg \neg y) =$
- $= (x \cdot \neg y) + (\neg x \cdot y)$ – выход графа – дерево.



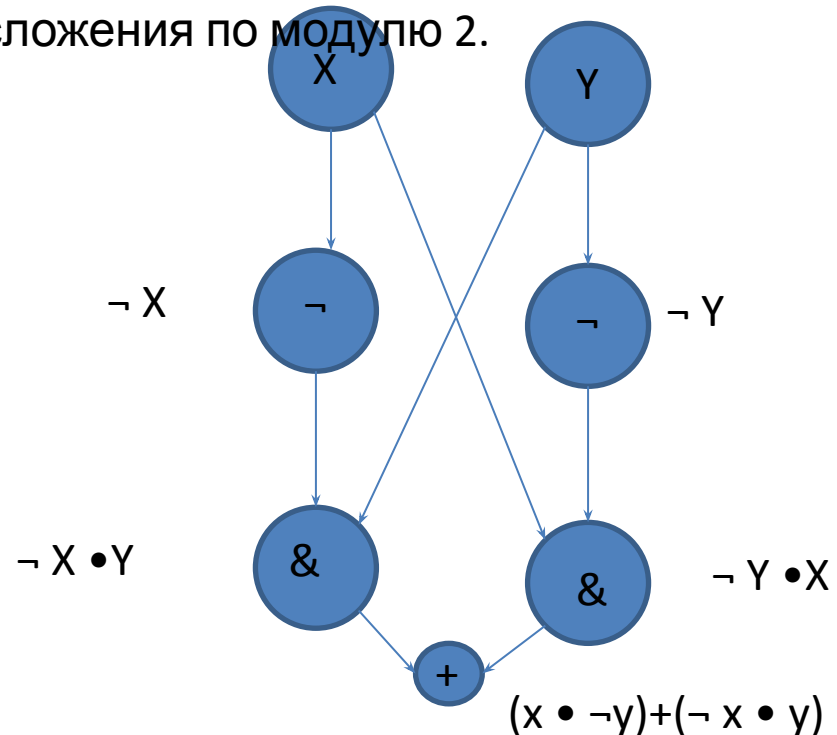
Данный граф представляется как схема размером - 5. Т.к. учитываются те вершины, которые не являются переменными. (У которых отсутствуют полу-степени захода).

Данная схема, граф – дерево представляется как вершина графа в которой выполняется операция сложения по модулю 2 (неравнозначность).

-  - вершина графа неравнозначности.



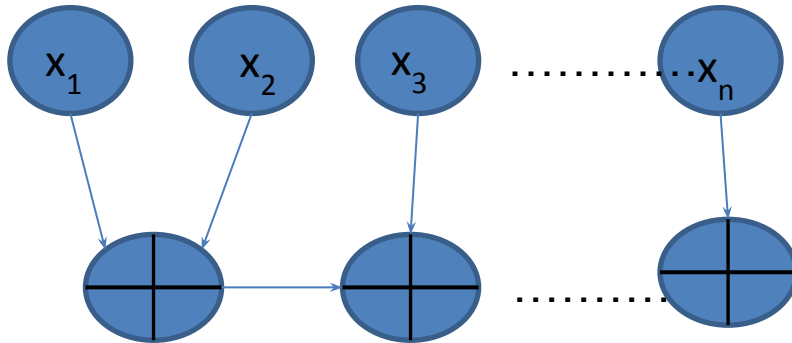
- Логические элементы выполняющие операцию сложения по модулю 2.



Рассмотрим функцию сложения по модулю 2.

- $f:A^n \rightarrow B$
- A – область определения функции
- B – область значений функции
- Если $A=B$, то f – функция, есть операция где $A = \{0,1\}$ $B = \{0,1\}$
- $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n$

Представим функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \dots \oplus x_n$ в виде графа.



Размер схемы = $5(n-1)$

Мажоритарная функция.

- Major – главный, функция принимает значение один на тех и только тех наборах, в которых единиц больше чем нулей(функция

xyz	f(x,y,z)
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1